

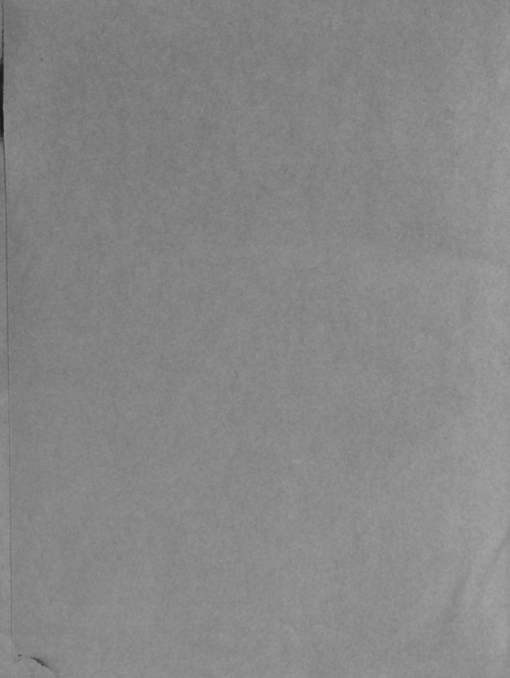




*John Wells Esq.*



QA  
3  
.B5289



Bernoulli, Jacques, 1654-1705

75-07

**JACOBI  
BERNOULLI,  
BASILEENSIS,  
OPERA.**

---



*Tomus Primus.*



*GENEVAE,*

**Sumptibus Hæredum CRAMER  
& Fratrum PHILIBERT.**

---

**M. DCC. XLIV.**

1000000

1000000

1000000

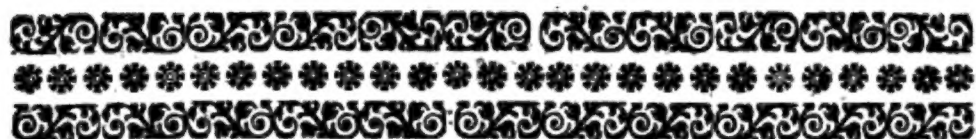
1000000

1000000

1000000

1000000

1000000



VIRO EXCELLENTISSIMO,  
CELEBERRIMO,  
NICOLAO BERNOULLI,  
J. U. DOCT. ET PROFESSORI,  
*Academiæ Basileensis h. t. Rectori Magnifico,*  
S. P. D. G. C. G.



O V A M, quam curavi, Operum  
Patruī Tui editionem cui dedi-  
carem non erat, Vir Doctissime,  
quod ambigerem. Hæc tot no-  
minibus Te nuncupat Patro-  
num, ut clientelam istam, ne si velim qui-  
dem, possim ad alium traducere. Nam ut  
mittam, quæ diu inter nos intercessit, quam-  
que spero fore perpetuam, amicitiam; cui  
potius consecrarem ingenii *Bernoulliani* mo-  
numenta, quam Tibi, non nominis tantum

\* 2

here-

heredi, sed doctrinæ; simillimoque Præceptoris Discipulo; cui Collectionem hanc offerrem prius, quam Illi, cujus diligentia & benignitate integra facta est & amplior; cui denique notas, quibus, ut potui, loca quædam illustrare conatus sum, melius commendarem, quam Viro, cujus hortatione & exemplo viam monstrante inductus sum, ut id operis susciperem. Tu igitur quicquid id est, five munusculum, five, ut ego censeo, quod optimam certe partem jam Tuum, nunc, veluti quodam alluvionis jure, accrescit Tibi totum, accipe & amare me pergito. Sic Te Deus sospitet, nobisque ut diutissime vivas & felicissime concedat. Vale. Genevæ. Cal. Octob. 1743.

LECTORI



# LECTORI S.



ET USTORUM Auctorum Scripta,  
quibus Artes & Scientias suo tem-  
pore excultas tradere nobis adnite-  
bantur, dum vel legimus servata,  
vel perdita desideramus; nequit fie-  
ri, quin illorum socordiam indigne-  
mur quorum barbarie vel incuria  
perierunt; horum contra laudemus industriam qui his  
colligendis conservandisque utilem operam dede-  
runt. Si quos autem ab interitu salvos præstare te-  
nemur Auctores, ii certe sunt, quos novis Artibus  
condendis aut insigniter promovendis gloriam adse-  
cutos cernimus. Quamobrem cum Illustrum Viro-  
rum, quibus universa Mathesis, Calculus imprimis  
infini-

infinitorum ultra quam dici potest debet, BERNOULLIORUM fama, sine dubio, ad eos omnes perventura sit qui Mathematicis Disciplinis studebunt; interest hujus sæculi, ne videamur ingrati, transmittere posteris quæcunque litteris mandarunt suæ doctrinæ monumenta. Quod tutissime fieri posse confido, si conjunctim edendo moles veluti quædam obijciatur Tempori; ut quæ, licet immortalitate digna, singula forsan interirent Opuscula, viam ad posteros, agmine quasi facta, sibi faciant. Igitur, post editos præstantissimi JOHANNIS BERNOULLI labores, Opera Fratris ejus JACOBI, Mathematici pariter celeberrimi, ante aliquot annos defuncti, in manus tibi trado, Lector Candide. Laborem utilitatis Tuæ gratia susceptum si probes, finem adsecutus sum quem mihi proposui: Sin minus, Tui saltem juvandi voluntas errorum mihi veniam impetrabit.

Quid hic præstiterim vides. BERNOULLII Opuscula, vulgata prius sed dispersa, collegi; ne omissis quidem iis, quæ juvenis in usum Studiosorum conscripsit, ut Professorium munus, vel adipisceretur, vel expleret. Quanquam enim non sint cum illis omnino comparanda quæ maturior vulgavit, illorum tamen lectio fructu non destituitur. Amœnum enim est videre a quibus initiis ad illum doctrinæ apicem evectum sit hominis ingenium: utile, cognoscere exemplo quid possint labor & studium.

Quod



Quod autem inter cæteros non compareat elegantissimus de *Arte conjectandi* Tractatus, causa est, quod is sit separatim editus, multorum manibus tritus, & facile parabilis. Hunc igitur, nisi intelligam aliter Tibi videri, prælo rursus committendum non existimavi. Sed, quæ Nostro dederunt occasionem scribendi, aliena Schediasmata nonnulla intermiscui; ut nusquam quid sit id de quo agitur ambigas.

Tractatus singulos unde eruerim in margine adnotavi. Nunc vero primum lucem aspiciunt publicam Auctoris *Posthuma varia*; quorum, post mortem, edendorum Nostro consilium fuisse testatur Titulus ipsius manu conscriptus, una cum tribus Articulis prioribus. Sequentes ad decimum tertium usque, dictante BERNOULLIO, descripserat Celeb. JACOBUS HERMANNUS. Reliquos viginti, ex Patruī Schedis excerptos, mecum humanissime communicavit Excellentissimus NICOLAUS BERNOULLI, Auctoris e Fratre NICOLAŌ Nepos, & doctissimis, quas simul editas habes, notis exornavit.

Quas cum mitteret Vir amicissimus, me per litteras magnopere hortabatur, ut & ipse non ad priores modo Posthumorum Articulos, sed ad omnia omnino Opuscula e quibus ista Collectio conficitur, meas quoque notas adjungerem. Ego, quamvis huic oneri imparem me, tot præsertim negotiis distractum, facile agnoscerem, & sera aliquantulum veniret hortatio,

tatio, impressis jam plusquam trecentis paginis, nolui tamen omittere quicquam eorum quæ, tanti Viri judicio, Tyronibus faciliorem Auctoris nostri lectionem efficere possent. Horum itaque in gratiam, Tyronibus enim unice scripsisse me profiteor, non iis qui edita tenent loca Matheseos; Horum, inquam, in gratiam, conatus sum primum ea quæ, propter brevitatem aut alias ob causas, erant intellectu difficiliora paucis explanare; deinde, quæ sine probatione afferebantur demonstrare: tum paulatim, Lectori familiarior factus, Methodis particularibus generaliores, ubi poscere videbatur argumenti dignitas, substituere tentavi: denique, quod synthetice adstruebatur, analytice nonnunquam investigare periclitatus sum. Quo successu, tuum, Lector Benevole, iudicium esto. Parce autem ac sobrie, hac libertate, quæ mihi prope licentia videbatur, usus sum, ne Textum Commentarius opprimeret. Vereor tamen ut multis displiceat labor iste meus, querentibus Auctori fuisse admistum aliquid tam dispar sui atque dissimile; Ac sane justissimam esse reprehensionem non diffiterer, nisi, quæ in hisce notis congeffi, pleraque summis, quos toties laudo, Mathematicis deberentur. Utcunque erit, juvabit saltem me illorum voluntati paruisse, quorum amicitia nihil habeo antiquius, & eorum utilitati consuluisse, quorum commodo nihil est mihi carius. Vale.

VITA

V I T A  
CELEBERR. MATHEMATICI  
JACOBI BERNOULLII

In Acad. Basil. Mathem. Profess. Meritiss.

*O R A T I O N E P A R E N T A L I*

EXPOSITA

DIE XXIII NOVEMB. A. cld lō ccv.

*A*

J. JACOBO BATTIERIO

J. U. D. ELOQ. PROFESS. P.

---

Edita primum

*B A S I L E Æ,*

---

cld lō ccv.

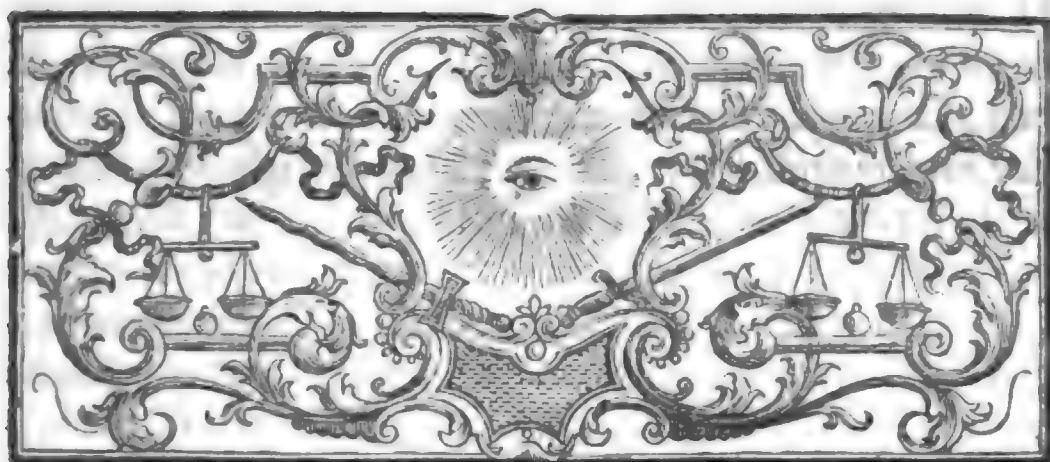
THE  
LIBRARY OF THE  
MUSEUM OF NATURAL HISTORY

NEW YORK

OF THE  
LIBRARY OF THE  
MUSEUM OF NATURAL HISTORY

---

NEW YORK



J. JACOBUS BATTIERIUS,

J. U. D.

Eloq. Professor Publ.

LECTORIBUS S. D.



*I morientibus etiam, quæ sunt TACITI verba, cura est decori exitus, semperque viri graves & honesti, & qui illis morientibus ministrant, id sibi cavendum existimarunt, ne quid, vel in vultu, vel in cetera corporis conformatione, indecorum etiam a morte conspici posset, ipsique adeo illi, qui violenta morte sibi pereunlum videbant, id agere sunt soliti, ut honeste caderent: non est profecto dubitan-*

bitandum, majorem longe honestæ ad posteritatem memoriæ propagandæ, quam illarum corporis sui exuviarum ad intempestivum decorem qualitercunque componendarum, curam atque studium morientium animis insidere, illisque volentibus fieri, si, quæ DEUS in hac vita præ aliis beneficia in eos contulit, quæque per illos præclara corporis animique viribus geri voluit, ad posteritatis notitiam transmittantur. Præterquam enim quod hæc cogitatio justiore illis & minus tristem mortis conditionem facit, quando vident, non item ut corporis vitam, sic memoriam quoque sui fato interituram; tum vero posteritatis, cujus eos curam aliquam gerere merito est credendum, non parum interest, illam proposito clarorum Virorum exemplo ad virtutis & eruditionis æmulationem excitari. Ceterum uti hæc erga defunctos pietatis testificatio ipsa in se admodum est laudanda; ita certe reprehendendum est perversum illorum institutum, qui tum demum suo se officio rite defunctos putant, cum in exponendis demortuorum virtutibus & dissimulandis vitiis nihil mediocriter dixerint aut fecerint. Quæ res non potest non diversum habere exitum, quam quem illi in dicendo sibi proposuerant. Ea enim ratione id accidit, ut qui ascititium illum Oratoris fucum atque imposturam animadvertunt Auditores, omnem illius narrationi fidem abrogent, & cum non levi existimationis defuncti dispendio ne veras quidem

dem ejus laudes sibi persuaderi patiantur. Qua in re paria fere isti cum Veterum stultitia facere videntur, qui, magno quodam viro id notante, amicorum defunctorum urnis cippos & columnas marmoreas cum imponent, optabant tamen iisdem terram levem, votis suis plane contraria facientes: Ita hi, dum famæ defunctorum volunt consulere, nimia illa & modum excedente laudatione totam evertunt. De ALEXANDRO M. illud est memoriæ proditum, quod cum ei in Hydaspæ amne naviganti Poëta quidam carmen obtulisset, in quo ille Regem turres dejicientem montesque perfodientem introduxerat, cum indignatione a se illum repulerit; Apage, dicens, isthæc mendacia, quæ illa etiam, quæ vere a me gesta sunt, in falsitatis possunt suspicionem adducere. Ego vero, qui Clarissimi viri, JACOBI BERNOULLII, principis horum temporum Mathematici, & in Academia nostra Professoris celeberrimi, quem mensis Augusti dies XVI nobis tristi atque præcoce fato subduxit, vitæ mortisque historiam oratione parentali explicare constitui, quanquam in exponendis ejus laudibus, quas sibi summas mathematicarum rerum scientia apud omnes comparavit, non habeo necesse vereri, ne quid supra illius meritum dicam; reputavi tamen apud animum meum, consultius me facturum, si, quæ res fidei plus & invidiæ minus habitura videbatur, tenui sed ingenua Oratione præcipua duntaxat vitæ & studiorum il-

lius capita delibarem potius, quam amplificandis ejus virtutibus, aut falsis ei astruendis, fidem in Auditorum animis consumerem. Ei Orationi publice recitandæ statutus est a me dies XXIII hujus mensis Novembris. Vos ergo, qui defuncti memoriam honoratis (honorabitis autem, si omnino suus apud vos literis honos constat) dicto die, hora X matutina, in Auditorium Ictorum frequentes confuite, & me incomta oratione, qualem lugubrem esse convenit, iusta conjunctissimo Collegæ facientem benigne audite. Dabitur a me vicissim opera, ne quod amoris, honoris, & observantiæ officium ullo unquam tempore frustra a me expectetis. Valete.



*Rectore Academiæ Magnifico*

**D.SAMUELE WERENFELSIO, S.Th.D.**

**Vet. Test. Prof. celeberr.**

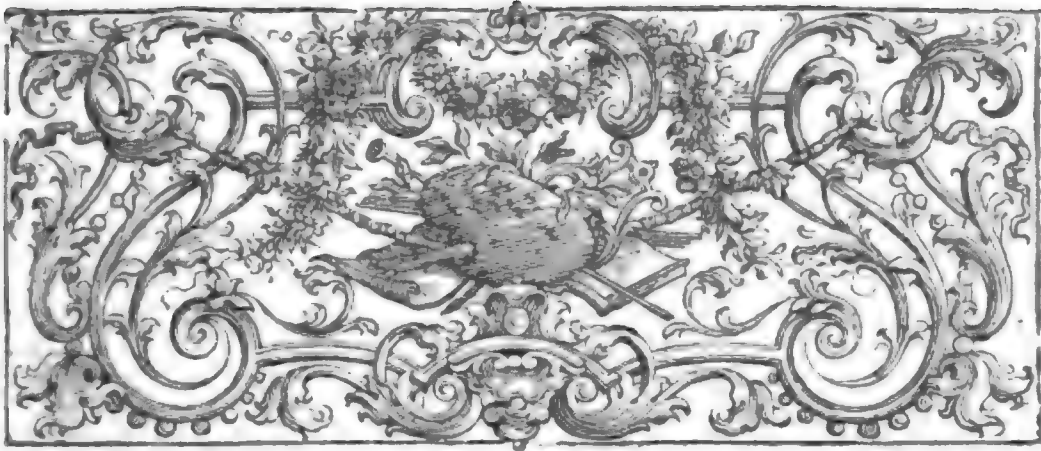
*Decano Facultatis Artium Spectabili*

**D. EMANUELE KÖNIG, Med. D.**

**Physicæ Profess. meritiss.**

**VITA**





V I T A  
JACOBI BERNOULLII  
MATHEM. CELEBERR.

**S**I qui sunt ex vobis, AUDITORES, qui temere hoc a me factum existimant, quod ego potissimum, homo mathematicarum rerum scientia minime omnium initiatus, & plane ἀγνοῦντων, hanc mihi præstantissimi nostrorum temporum Mathematici publica oratione laudandi provinciam sumserim; hi, quod pace illorum dixerim, parum ex condigno hujus Viri virtutes æstimare, ejusque eruditionem angustis admodum finibus circumscribere videntur. Ut enim negari profecto non potest, mathematicæ eruditionis laudem præ aliis omnibus in eo emicuisse, eaque illum præcipue inter eruditos se censeri voluisse; ita vicissim nemo est qui non intelligat, præter hanc principem & præcipuam facultatem, aliarum quoque laudandarum artium segetem quasi quandam in eo effloruisse, quæ si priori illi dignitate exæquari non debent, insigne tamen de-

cus,

cus, &, ut ita loquar, colorem illi conciliarunt. Eam intelligo virtutem, qua & adversarios disputando convincere, & quæ subtiliter atque ingeniose ab ipso excogitata erant, eleganter, perspicue, ac copiose differere sciebat. Quarum rerum intelligentia cum ad plures pertineat, & a me quoque, per id tempus quo ego illo conjunctissimo Collega sum usus, sæpius in eo cum admiratione fuerint animadversæ, videor meo quodam jure in laudanda præstantissimi Viri memoria partem mihi posse vindicare. Quod si vero ad dicendum parem ejus doctrinæ facultatem orationis non attulero, illud erit vobis cogitandum, nec alium facile quenquam potuisse reperiri, qui tam eximias laudes verbis exæquare potuisset. Quare permittite, *Auditores*, ut hoc officio, quod & defuncti voluntas non obscure mihi paulo ante obitum destinavit, & ea, quæ non interrupta mihi semper cum eo intercessit, amicitia quasi pro imperio injungit, qualicunque, fideli certe ac ingenua, vitæ & studiorum ipsius enarratione defungar, & literati Orbis desiderio, qui ut hunc Virum ex egregiis ingenii monumentis jam diu nosse & admirari cœpit, etiam præcipua vitæ illius momenta, quibusque ille adminiculis usus ad tam eximiam eruditionem pervenerit, sibi explicari postulat, bona vestra cum venia satisfaciam.

Natus est JACOBUS BERNOULLIUS iis majoribus, quos ob constantem purioris Religionis professionem ALBANI Ducis credulitas patria sua *Antverpia* pulsos, in exteris regionibus fortunarum suarum sedem querere coegit, postquam in illa civitate BERNOULLIORUM gens, METERANO \* quoque celebri rerum Belgicarum scriptori memorata, diutissime flourerat, & Consulatum quoque gesserat. Accidit ea calamitas JACOBO, qui cum octo liberis utriusque sexus domo profugus *Frankfurti* domicilium posuit, ibique A. MDCLXXXIII denatus est. Ejus ex filio nepos cognominis, cum nostræ Religionis esset addictior, a fratribus, qui reliquorum Protestantium religio-

\* Edit. Germ. L. XI, p. 225. & L. XVI p. 343.

religionem amplexi apud *Francofurtenses* perpetuam fortunarum sedem constituerunt, quorumque posteritas etiamnum ibi perdurat, secessione facta, *Basileam* commigravit, quæ urbs aliis quoque familiis ob eandem religionis causam patria profugis, & meæ quoque, benignum hospitium exhibuit. Parentem habuit noster NICOLAUM, senem venerabilem, Fori judicialis & Camerae Rationum apud nos assessorem, qui inverso factorum ordine octogesimo ætatis anno primogeniti hujus filii sui funus duxit. Matrem, MARGARETHAM SCHÖNAUBRAM, quam præcoce funere ereptam in adolescentia amisit. Hoc conjugum pari præter defunctum nati sunt tres alii filii etiamnum superstites, primus Urbis Senator suo merito jamdum designatus; alter *Groninganae* hucusque, nunc nostræ Academiæ in docenda Mathesi Professor ascriptus, inter principes hujus ævi Mathematicos jamdiu connumeratus; tertius Artis Pharmaceuticæ unus omnium peritissimus. Natus est autem anno superioris seculi quinquagesimo quarto, die xxvii Decembris, atque, ut primum per ætatem doctrinæ capax est habitus, Gymnasii nostri Præceptoribus iis litteris, quibus pueritia ad eruditionem & honestatem informari solet, instruendus est traditus. Horum industria cum jam eo usque in literis profecisse est visus, ut in Academicam lucem translatus Philosophiæ studio vacare posset, cœpit ille, ne tantæ de se excitatæ spei per socordiam decoqueret, uti domestica informatione Venerandi & Cl. Viri, D. D. JOH. JACOBI HOFMANNI, tunc Græcæ Linguae, nunc Historiarum apud nos Professoris celeberrimi: & per illud triennium, quod tractando Philosophiæ studio legibus est constitutum, Peripateticorum dogmata, quæ fere sola tunc temporis in Scholis tradi solebant, avide hausit: donec ex illis angustis eluctatus, anno c1o1ocLxxi, Magister Artium publice renunciatus animum ad studium sacrum applicare cœpit, magis tamen, quod postea semper est professus, ex Patris sui quam propria voluntate: quippe qui ad aliud studiorum genus propendere se, & a natura quasi impelli, animadverteret. Jam tum enim in illa adolescentia ex figurarum quarundam geometricarum inspectione se-

b

cretam

cretam quandam oblectationem in animo suo existere sentiens, paulatim mathematicas disciplinas ita deperire cœpit, ut ad hoc studium a natura factus esse videretur. Quod consilium quamquam Patri minus probari animadverteret, neque adeo ulla ab eo subsidia in eum usum acciperet, in proposito tamen usque rectum clavum tenuit, &, impellente genio, identidem ad suos numeros ac figuras furtivo quodam studio divertit, &, cum proprios libros nullos haberet, quoscunque ipsi fors aliunde obiciebat, ingenti aviditate evolvit. Ibi illud accidit memorabile, ut quæ res ejus in mathematica scientia profectus insigniter rememoratura credebatur, plurimum etiam hoc ipso fine ei prodesset. Idem enim illi tum contigit, quod de HENRICO VALESIO, Viro inter *Gallos* Græcis Latinisque literis instructissimo, in illius vita memoratur, eum scil. cum patrem haberet præparcum, & ipse, adolescens minime pecuniosus, libros emere non posset, nonnisi commodatos legere consuevisse: de quibus dicere solebat, nullis se libris melius unquam fuisse usum: hos enim a se exactissime evolvi & excerpti, ut quos paulo post restituendos nunquam in manus suas redituros esse nosset. In his rei librariæ, quantum quidem ad mathematicam scientiam pertinet, angustis constitutus, strenue tamen, quoad res ferebat, propositum urgit: eo tunc emblemate uti solitus, quod obfirmatum ejus in eo, quod semel cœperat, studiorum genere persequendo animum, atque omnibus objectis difficultatibus reluctantem exprimeret. Repræsentabat autem illud PHAETHONTEM, PHOEBI patris sui currui insistentem, cum hac epigraphe: *INVITO PATRE SIDERA VERSO*. Adeo se opprimi non patitur concitatus ille naturæ impetus, non frustra certe a DEO animis nostris infusus, cui qui refragantur, ad nullum unquam excellentem in doctrina gradum, quasi reflante vento, eluctari potuerunt: cum contra, qui cursum illum naturæ atque destinationem ad certum vitæ & doctrinæ genus quasi manu ducentem secuti, id unum sibi agendum censuerunt, cujus a naturæ autore DEO ingenitam sibi facultatem deprehenderunt, tanquam secundo amne proVecti, ad id quod in literis summum est, pervenisse

venisse observentur. Plane ut hac quoque parte, quæ sunt CICERONIS verba, Naturam optimam ducem tanquam DEUM sequi eique parere pulchrum sit: cujus ut supremæ parentis imperio qui obtemperat, parentibus minus obedisse argui non potest. Aut putatisne, *Auditores*, ex antiquis OVIDIUM, ex recentioribus PETRARCHAM & CASAUBONUM, illam in literis laudem fuisse consecuturos, si parentum suorum vota secuti jurisconsultorum scriptis atque tristibus fori altercationibus, ad quæ illi nunquam sine nausea accedebant, quam humanioribus studiis, ad quæ a natura facti erant, suas vigilias impendere maluissent?

Quamquam autem egregius adolescens illum mentis ardorem, quo ad Mathesin ferebatur, objectis sibi impedimentis non remitteret, id tamen effecit necessariorum subsidiorum penuria, ut tum quidem ultra vulgaris Arithmeticæ, Geometriæ, & Astronomiæ cognitionem penetrare non posset. Quin imo quemadmodum illis, qui natalis terræ angulum nunquam sunt egressi, ullas extra suum cælum terras jacere vix sit verisimile: sic ille, cui nisi tritos Mathematicorum libellos adhuc videre non contingerat, ignorabat etiam, esse alia longe præstantiora, quæ a doctissimis Viris in illa doctrina & elucubrata jam essent, & aliorum industria eruderari possent. Dedit tamen jam in illis primæ adolescentiæ rudimentis quendam ex se perspicacissimi ingenii fructum, excutiendo celebri Problemate chronologico de inveniendi anno Periodi Julianæ ex datis tribus cyclis, Solis, Lunæ, & Indictionum, quod occasione propositionis secundæ, quæ in prima parte *Deliciarum Mathematicarum* DANIELIS SCHWENTERI extat, proprio Marte octodecim annorum tyro felicissime resolvit. Ea ergo ætate, præter Theologiam, cujus studium nunquam deposuit, Matheseos tractatio præcipuam occupationum ejus partem faciebat: cui tamen, ut erat omnium doctrinarum ejus ingenium capax, humaniorum literarum, quæ in elegantiori orationis conformatione consistunt, studium conjunxit; quibus eo cum profectu incubuit, ut, quæ laus non admodum ab iis expectatur, qui omnem suam industriam uni veritati indagandæ

addicunt, in utroque & solutæ & ligatæ orationis genere ea jam tum ediderit artis documenta, quæ ingenii acumine, verborum nitore, sententiarum elegantia, etiam peritissimis illarum artium magistris potuerint satisfacere. Extant etiamnum, ut semel hac de re dicam, præter joculare illius carmen *Scarroneis* versibus Gallica lingua, insigni festivitate & rara in peregrino præsertim homine imitationis felicitate, conditum, cui ab argumento *Pomum Eridos* titulum fecit, alia ejus Latina carmina complura, quæ pro re nata magna cum ingenii & Poeticæ facultatis commendatione ludit. In Epigrammate cumprimis plane videbatur regnare, quod carminis genus tam concinna brevitate, tanta venustate, & acumine (quæ sunt præcipuæ ejus carminis virtutes) tamque apte & argute sciebat concludere, ut non minus poëtica hæc tam elegantis ingenii monumenta, quam illa mathematica, in doctorum hominum manus pervenire fuerit opotandum.

Tam procul ille a quorundam male feriatorum opinione erat remotus, qui homine altioribus studiis & veritatis præcipue indagatori operato orationis curam ut rem levem & nugatoriam indignam arbitrantur. Quanto rectius noster cum CICEBRONB, illo bene & dicendi & sentiendi magistro, utrumque officium conjungendum esse credidit? Eloqui enim copiose, modo prudenter, melius esse statuebat, quam vel acutissime sine eloquentia cogitare: quod cogitatio in se ipsa vertatur; eloquentia complectatur eos, quibuscum communitate juncti sumus. Neque tamen hæc sive mathematica sive humanitatis studia ita sibi illum totum vindicarunt, quin theologicum quoque ex voluntate Patris, qui filium Ministerio destinabat, semel cœptum magna cura urgeret, eo successu, ut A. 1610 C. LXXVI, præmisso examine in eorum numerum reciperetur, quibus sacrorum publice docendorum facultas conceditur: quo ille officio postea & apud nos, & *Genevæ* præcipue, tum & in *Lemovicensi* illa commoratione sua, concionibus ad populum habendis feliciter est defunctus. Et intra hæc quidem studia, Theologiæ, Humaniorum literarum, & Matheſeos, suam ille industriam coercuit, sed ita, ut



ut præcipuam tamen operæ suæ partem in postremo illo collocaret, in eoque uno studeret excellere. Neque enim tam bene comparatum esse norat cum præstantibus etiam ingeniis, ut si æquali diligentia plura studia complectantur, ultra mediocritatem fere in singulis proficiant. Quando & ERATOSTHENEM ferunt, utut magno esset ingenio præditus, tamen quod, præter Geographiam, plurium quoque aliarum disciplinarum cognitionem partitis studiis sectaretur, in omni literarum genere infra primos substituisse, eoque nomine *βῆτα* fuisse cognominatum.

Hæc studiorum fundamenta postquam in patria posuit, peregrinatione literaria linguarum & artium cognitionem locupletare constituit: hancque mense Maio A. MDCLXXVI, bono cum DEO est ingressus, & *Genevam* primum appulsus, paulo post in ea urbe insigne dexteritatis & judicii sui specimen edidit. Erat tum spectabili inter *Genevenses* Mercatori, Domino A WALDKIRCH, filia ELISABETHA, quæ bonarum literarum capaci ingenio a natura instructa, calamitate aliqua jam inde a secundo post nativitatem mense omnem oculorum usum amiserat. Hanc ille solerti & arguta quadam docendi ratione usus non eo tantum perduxit, ut literas expedite pingere disceret, sed & Logicæ, Physicæ, & Historicæ artis scientiam non poenitendam sibi compararet. Post viginti mensium commorationem, *Geneva* relicta, totam fere *Galliam* perlustravit. Accidit enim tum temporis, ut cum CLAUDIUS BLANCHERIUS *Marchio* LOSTANGIUS ex *Lemovicensibus*, filio suo ephorum & præceptorem quæreretur, noster oblata sibi ea conditione A. MDCLXXVIII per *Lugdunenses*, & *Arvernios* facto itinere, *Nedam*, ejus *Marchionis* sedem, peteret, in qua postquam per menses tredecim Concionatoris & Informatoris officio est functus, continuata per *Lemovicenses* & *Petrocorios* profectio, *Burdegalam* venit, cujus urbis amœnitate captus per semestre tempus, quo in ea substitit, præter conversationem, quam cum doctis ejus civitatis Viris, BAUDOVERO Mathematico, nec non RONDELETIO, GOYONIO, & SARRAVIO, qui tum in Reformatorum Ecclesia sacra administrabant, frequentem habuit, Tabulas quoque Gnomoni-

cas universales, quæ inter defuncti schedas etiamnum ineditæ latent, magno studio concinnavit : excursionem quoque in vicinam *Regulam*, ubi tum *Aquitania* Parlamentum jus dicebat, fecit. Hinc secundo *Garumna* in Oceanum delatus, *Aquitania* litora & *Ream* insulam prætervectus, *Rupellam* appulit, unde per *Nemetes*, & *Salmurium*, ubi Cel. CAPELLUM; hinc per *Aurelianum*, ubi PAJOTUM compellavit, *Lutetiam Parisiorum* venit, in qua urbe postquam duorum mensium spatio quicquid vel in hominibus vel in ædificiis rebusque aliis visendum occurrebat, curiosis oculis perlustrasset, Patriæ & Parentum ex tanto intervallo iterum aspiciendorum desiderio impulsus, per *Francia Insulam*, *Campaniam*, *Lotharingiam*, *Assatiam*, ipsò Ascensionis die *Basileam* intravit. Hujus ille itineris Gallici eum fructum tulit, ut illius Linguae tam uberem tamque accuratam sibi notitiam compararet, ut, quod de illo ipsorummet Gallorum judicium fuit, cum ipsis ejus linguae magistris præstantissimis de puritate & elegantia certare posset. Quo minus autem etiam in Matheseos studio insignem aliquam ex ea professione utilitatem caperet, duabus potissimum rationibus factum esse sæpe amicis commemorare est solitus, nempe cum ætatis vitio, quæ rerum utilium incuriosa fere inania tantum sectatur, & in istis peregrinationibus non a patria magis quam a semetipsa aberrare consuevit: tum vero & opinionis quodam errore, quod solidas & vere sic dictas scientias, ut in quibus hucusque tam parum a se profici potuisset meminerat, ne dari quidem ulla existimaret. Ex qua re illud est consecutum, ut nec de compellendis viris doctis, ex quorum alloquio plurimum poterat proficere, nec de aliis uberioris scientiæ consequendæ mediis multum sollicitus esset.

Ex illo ergo Gallico itinere domum redux, suasu amicorum Cel. MALEBRANCHII *Scrutinium veritatis* & CARTESII scripta tum primum cepit evolvere, cujus scriptoris Methodum potius quam Principia approbabat. Hæc ei lectio ad id profuit, ut jam in Philosophia ultra consueta compendia sapere inciperet. Dum in his est, Cometæ, qui per id tempus in cælo formidandæ



dae magnitudinis effulsit, occasione, quendam ingenii lusum de  
 futura ejus nova apparitione in publicum edidit: pauloque post  
 A. 1711 c. lxxxix m. Aprili secundo *Rheno* alteram in *Belgium*  
 & *Angliam* profectiorem instituit, certus, id quod priori itine-  
 re a se peccatum fuerat, in hoc emendare. Et in *Belgio* qui-  
 dem *Amstelodami* aliquanti temporis moram traxit, ibique ALE-  
 XANDRUM DE BIE, Matheseos Professore, res mathematicas  
 in gratiam nautarum vernacula lingua explicantem aliquoties au-  
 diit: ac per otium in vicinas urbes & provincias excursionem  
 fecit. Inprimis autem *Lugduno-Batava* Universitati penitus lu-  
 strandae aliquod tempus dedit, in qua Celeberrimis Viris, WIT-  
 TICHIO, LE MOINE, Theologis: BOCKELMANNO J. C. &  
 WOLDBERO Philosopho innotuit. Et huic certe Belgicae commo-  
 rationi illud se debere saepe praedicabat, quod excussis, quibus  
 haecenus immerfus erat, tenebris atque praediciis, sanioris Phi-  
 losophiae & demonstrationum mathematicarum, quas a praestan-  
 tissimis ejus scientiae magistris publice videbat exhiberi, dulcedi-  
 ne inescatus, ipse quoque ad illorum exemplum ad altiorem  
 aliquem doctrinae gradum viam affectare coepit. Ibi ergo Ele-  
 menta *Euclidea* docuit prius quam didicit, ratus, id quod res  
 est, & quod proverbio dicitur, docendo nos discere, eamque  
 optimam esse proficiendi rationem, si, quae ipse jam primum  
 didiceris, aliis discenda propines. Qua in re eadem ejus, quae ju-  
 diciosissimi cujusdam apud nos Viri, ratio fuit, qui de se ipso sa-  
 pe commemorabat, accidisse sibi aliquando, ut cum in Orientali  
 quadam lingua, quam nec ipse adhuc penitus cognitam habe-  
 bat, discipulum erudiret, & non ipse minus, quam discipulus  
 faciebat, informationi se praeparare haberet necesse, ipse hunc  
 singulis diebus nonnisi uno Grammatices ejus linguae capite an-  
 teverteret. Sed ut ad nostrum redeamus, haec ille tam assidua  
 lectione, meditatione, doctorumque Virorum conversatione,  
 praecipue autem quod *Cartesianam* Geometriam attentissimo stu-  
 dio tum primum evolveret, tanta ad mathematicam ejus scien-  
 tiam accessio est facta, ut brevi post tempore, volens aliquod  
 profectuum suorum, quos in *Belgio* fecerat, specimen publice  
 extare,

extare, primo quidem Conamen illud suum *de Cometarum motu* in Latinam linguam translatum, multo quam prius auctius: postea etiam Tractatum *de Gravitate Ætheris*, Belgicis typis excusos in publicum ediderit, qui libri, quemadmodum de HORTENSII scriptis memoriæ est proditum, tanquam PHIDIÆ signa simul aspecti fuere & probati. Ergo, ut solent mutuis finibus & nexis quasi vestigiis labor atque gloria convenire, sic ut unius finis alterius gradus efficiatur, ex illo scriptorum suorum tirocinio primus ei ad nomen inter Mathematicos sui temporis comparandum aditus patuit: inprimis cum inde ab eo tempore *Diarium Eruditarum Parisense*, & *Acta Lipsiensia* singulis annis observationibus suis locupletaret.

Postquam autem in literario illo Batavicarum Academiarum mercatu animum mathematica eruditione egregie instruxerat, & gravissima scorbuti ægritudine fuerat defunctus, discendi aviditate provectus per præcipuas *Brabantie*, *Zeelandie*, *Flandrieque* civitates, *Caletum* usque continuato itinere in *Angliam* trajecit, in qua insula Ill. BOYLIIUM, ISAACUM VOSSIUM, ROBERTUM HOOKIUM, JUSTELLUM, STILLINGFLEETUM, BAXTERUM, GALIUM, aliosque Celeberrimos Viros, salutare non intermisit. Inter alios compellavit ADRIANUM quoque BEVERLANDIUM, Virum ab impiis, quas etiam scriptis publice editis Orbi manifestas esse voluit, sententiis quam eruditione sua celebriorem: qui tunc ex Belgio relegatus in ISAACI VOSSII familia degebat. Non quod malæ frugis hominem vel tanti æstimaret, sed ut ex perspecta bonorum malorumque, & eorum qui vere, quique ad speciem tantum eruditi essent, indole, quæ nativa esset eruditionis facies, posset internoscere: secutus in ea re exemplum prudentium familiæ patrum, qui, dicente PLINIO, pluribus sæpe veris denariis adulterinum emunt, ut verus agnoscatur. Ex *Anglia Hamburgum* est transvectus, unde brevi per *Germaniam* transitu in patriam A. MDCC LXXXII rediit. Quanquam ne tum quidem prius sibi cessandum existimavit, quam bimestri itinere *Helvetiæ* pagos omnes in duorum amicorum, & inter eos dilectissimi Fratris mei, comitatu esset emensus. Ex eo tempore

pore stabilem in patria pedem posuit, & mathematica studia, cum principia tam pulchre ipsi se dedissent, majori etiam labore urgenda fuit: ad quorum amorem & diligentem tractationem ut popularium animos, hactenus in ea re segniores, excitaret, Collegium, quod vocant, experimentale Physico-Mechanicum publice aperuit, primusque rerum harum pulcherrimarum in urbe nostra vel autor vel evulgator extitit. Contigit tum, ut ab Ecclesia Reformata, quæ *Argentina* colligitur, opera ejus in Sacris Gallica & Germanica lingua ad populum docendis requireretur. Sed ille, infirmitatis suæ, ut aiebat, sibi conscius, eam conditionem respuit, profecturus contra *Heidelbergam*, ubi in docenda publice Mathesi vicarium ei Professoris munus destinabatur, nisi matrimonio, quod amicorum & Parentis præcipue suasu hoc ipso Anno 1610 c. lxxxiv iniit, in patria fuisset retentus. Hoc ipsi sœdus contractum est cum lectissima virgine JUDITHA, STUPANORUM celebrium Urbis nostræ Medicorum, quorum etiamnum scripta leguntur, nepte & pronepte: e qua geminæ sobolis, masculæ & fœmineæ, pater est factus: quarum hæc in honesto & felici Domini NICOLAI RYHINERI Mercatoris conjugio vivit: filius autem pictoriæ artis, ad quam discendam naturali quadam animi inclinatione ferebatur, *Augusta Vindelicorum* etiamnum operam navat, & jam ea tirocinii sui argumenta dedit, quæ præstantem in futurum artificem urbi nostræ pollicentur.

Hac matrimonii via cum jam plene in suam tutelam pervenisset, decrevit, reliquis studiis quibuscunque quibus se non esse natum sentiebat sepositis, totum se dare Matheseos scientiæ, famamque de se excitatam non tueri tantum, sed majorem etiam sibi altruere. Hoc loco, quando res ipsa id postulare videtur, profligandam mihi video illorum sententiam, quæ defuncti estimationi certe perquam est injuriosa, qui, quod sæpe ex illis est auditum, universum hoc Cl. Viri interioris illius & abstrusioris Matheseos excolendæ institutum, tanquam sterile & in mera contemplatione positum, ex quo nulla in humanam societatem commoda redundare possint, sibi damnandum censuerunt.

Cujus suæ opinionis principem & antesignanum habent sane non levem, SOCRATEM, qui, ut est apud LAERTIUM, Geometriam non nisi modice discendam aiebat: eorum vero studium, qui ad descriptiones usque intellectu difficiles discendo progrederebantur, penitus improbabat; quod diceret, non videre se quem usum ea res habere posset: posse autem aiebat omnem hominis vitam occupare, & profectibus aliarum disciplinarum plurimum officere. Sed hi quidem homines, qui cum pressius urgentur, demonstrationes totamque adeo rem mathematicam a se ne intelligi quidem, & algebraicos characteres tantum non pro magicis haberi confiteri coguntur, quemadmodum hanc suam sententiam, quam de re sibi incomperta tanto supercilio ferunt, contra omnium seculorum constantissimum consensum tueantur, ipsi viderint. Illud certe perspicue falsum est, quod pro confesso sibi sumunt, nihil esse in studiis laudandum, quod non idem sit utile. Quod quidem si illis damus, jam artes illæ omnes e Rep. fuerint exterminandæ, quæ elegantiam magis quam hujus vitæ necessitatem utilitatemve in operibus suis confectantur. Ipsa certe communis hominum vita, & commerciorum, quæ inter eos viget, ratio, abunde illos refellit, quæ non illis rebus carissimum pretium posuit, quæ in quotidiano victu maximum usum habent, sed quæ vel raritate vel difficultate præ aliis vulgatoribus se commendant. Quæ ergo vel invidia vel inscitia est, in scientiarum dijudicatione diversam viam insistere, & illarum tantum rerum cognitioni pretium ponere, quæ quidem usum in hac vita insignem, ceterum intelligentiam pervulgatam & in promptu positam habent; iis contra artibus, quæ res a vulgariis oculis remotas & reconditas eruunt, eo solo nomine dignitatem & æstimationem omnem abrogare, quod illarum usus non æque perspectus est & diffusus? — Et profecto, si quod res est dicere volumus, in omnibus his a quibus Eruditi appellamur disciplinis, si ea quæ ad vitam commodius & honestius degendam faciunt ab illis quæ præter curiosam contemplationem & scientiam nihil admodum continent sejungimus, quam, DEUS bone! macilenta, & exucca, omnisque ornatus indiga

indiga tota hæc, cujus scientiam profitemur, Encyclopædia, tanquam mundo detracto mulier, omnium oculis apparebit. Sed nolo jam ego adversus mathematicarum contemplationum contemptores ista defensione uti, ne id sibi a me dari existant, quod est minime illis concedendum, nullum ex hoc studii genere fructum in hac vita expectari posse. Nisi forte eam illi nullam esse utilitatem putant, si quis se ipsum & animum suum hujusque facultates, rerum admirabilium, quas DEUS in natura non temere expressit, quamque inde existere necesse est, bonitatis, prudentiæ & majestatis Divinæ cognitione instruere satagat. BERNOULLIUS certe noster id se egisse in schedis suis confitetur, ut illis contemplationibus suis vestigia sapientiæ Creatoris sui in illius operibus rimaretur. Neque vero tam sterilis est Mathematicorum contemplatio, quin etiam ad civilem hanc vitam & cultiorem & instructiorem efficiendam plurima adminicula suppeditet. Enimvero ut illi qui humani corporis structuram primi hominibus tradidisse contenti, medendi artem ipsi non exercuerunt, apud æquos & cordatos viros non minorem laudem invenerunt, minusque humanæ societati profuisse judicantur, quam qui traditam ab illis scientiam postea ad sanandas ægrotudines transfulerunt: Ita qui mathematicis contemplationibus unice sunt dediti, quanquam ipsi ad mechanicam operationem, quam ut ingenuo homine indignam ipsi ex antiquis PLATO & ARCHIMEDES attingere nunquam voluerunt, non progrediuntur, tamen, cum curis suis atque vigiliis ea principia extruant, quæ aliis postea in rerum humano generi utilissimarum inventionum perfectione mirifice subserviunt, nemo Mathematicorum illas vigilias jure infructuosas dixerit. Plane si quæ Geographicæ, Nauticæ, aliarumque artium incrementa sperari possunt, mathematicæ disciplinæ, ut quarum illæ nonnisi quædam quasi propagines existunt, in subsidium veniant necesse fuerit. Sed ad id, unde juxta me *Bernoullianorum* studiorum defensio abduxit, tempus est ut revertar.

Tunc ergo ut urgeret propositum, & in Matheos studio aliquid excellens efficeret, autores omnes una cum *Fratre*, cui

prius Matheseos principia magna fide & egregio cum successu impertierat, legere, & inter legendum aliis explicare instituit: ad quod studium cum perpetua quædam meditatio accederet, paulo post ipsa interioris Geometriæ adyta, sua ipse opera, nullius præceptoris industria adjutus, vere *αὐτοδίδακτος*, sibi reclusit, ac præstantissima tam veterum quam recentiorum inventa plana perspectaque reddidit. Fuit autem hæc illius laus plane singularis, quod cum plurimi ante ipsum Geometriæ ea quæ a maioribus tradita erant edidicisse contenti nihil ex se laudandum promere satagerent, aut, si quando ambitione compulsi ad scribendum accederent, aliorum inventa in suos libros exscripta in se transferrent, Phorcydum sororum imitatores, quæ, ut est in fabula, cum non nisi unum, sed exemtilem, oculum haberent, eo invicem utebantur: Ipse bonum patremfamilias agere maluit, fecitque ampliora quæ accepit; ut mathematicæ supellectilis ab antecessoribus ad eum transmissa hæreditas major ab ipso ad posteros transiret. Inprimis autem ut magni operis, ita magnæ & eximiæ laudis fuit illa nostri industria, quam cum ingeniosissimo *Fratre* posuit in indagando Calculo, quem vocant, differentialium & integralium: in quem a Celeberrimo LEIBNITIO primum inventum, & in *Actis Eruditorum Lipsiensibus* \* non nisi recte & quasi per ænigma in mathematici cujusdam problematis resolutione allegatum, non prius inquirere destitit, quam optato fine potiretur: cujus ille primum specimen exhibuit in iisdem *Actis* mense Maio. c l o l o c x c. solutione Problematis, quod a Cel. LEIBNITIO de invenienda linea descensus æquabilis olim fuerat propositum. Hancque ejus dexteritatem mirifice sibi probari testatus est LEIBNITIUS †: hoc addito corollario, analysin illam sui Problematis eruere utique non fuisse cujusvis, nec quequam sibi esse notum, qui melius quam BERNOULLIUS mentem suam penetraverit. Quibus gemina sunt ea præconia, quæ ille idem ingeniosissimis Fratribus etiam postea impertuit: cujusmodi illud est, quod non dubitare se ait,

\* Mens. Octobr. 1684.

† Mens. Jul. 1684.



ait, \* ipsos aliqua detecturos, ad quæ pervenire sibi ipsi difficile esset futurum, \*\* & ad ea jam illos pervenisse in Calculo differentiali, quæ HUGENIUS per jocum hypertranscendentia appellabat: † denique effecisse illos, ut jam non ipsorum minus quam suus ille calculus esse videatur. Et hoc quidem tam egregio invento non minus exultavit BERNOULLIUS noster quam ARCHIMEDES olim, qui cum ex balnei mensura furtum in corona per fraudulentam argenti ad aurum admistionem deprehendisset, e balneo profiliens suum illud *Opus* alta voce ingeminavit. Nec profecto injuria: quippe cum hujus methodi beneficio novas subinde regulas novaque principia extrueret, & quæstiones plurimas, quas ne tentare quidem alii sustinuisent, feliciter resolveret; alia vero tantum inchoata ab aliis perpoliret, absolveret, & ad summum perduceret.

Dum in his est, DEUS ipse, tam egregiis ejus laboribus præmium constituens, theatrum ei aperuit, in quo industriam suam publice exercere posset. Mortuo enim Cl. Viro PETRO MEGERLINO Jcto, Mathematico, & Historico eximio, scriptis quoque editis celebri, cum in Mathematica Professione successor ei desideraretur, nemo illi provincie cum laude sustinendæ visus est magis idoneus quam noster, ut qui suæ in hac scientia eruditionis testem universum Orbem literatum allegare poterat. Ergo Matheseos Professor d. xv Febr. An. clc lcc lxxxvii conspirantibus in unum suffragiis electus, Dignitates quidem Academicas, Rectoris semel, Decani vero Philosophici tertium magna cum industriæ atque dexteritatis commendatione administravit. In iis vero, quæ ad ornandam provinciam, quam acceperat, proprie pertinebant, id omne quod a Professore publico requiritur, cumulatissime præstitit. Namque & publica & domestica informatione tam diligentem tamque utilem studiosis operam navavit, ut exteri quoque non pauci hujus Viri fama suis sedibus exciti ad illum convolarent. Possem nominare complures, qui hodiernum in celeberrimis *Germania* Academiis

\* Mens. Sept. 1691.

\*\* Mens. Jul. 1695.

† Mens. Maio 1697.

ex eo haustam scientiam cum laude publice profitentur,\* & in alios transfundunt. Et fuit profecto in illo peculiaris ad docendum aptitudo, atque tanta, ut difficillima quæque & impeditissima Auditoribus suis ea docendi facilitate propinare nosset, ut nescirent fere, per ludumne aut somnum, an serio studio ista didicissent. In publicis vero, quas subinde in gratiam studiosorum repræsentabat, disputationibus, argumentum deligebat non de trivio sumtum, sed ex recondita Mathesi depromptum: in eoque defendendo, studiosæ juventuti, quoties eam vel in argumentando aberrare, vel in percipiendo hæsitare animadvertebat, mira perspicuitate atque dexteritate expeditissimam eluctandi viam quasi digito commonstrabat. Quodcunque autem a publicis occupationibus supervacuum erat temporis, Geometriæ novis accessionibus & inventis locupletandæ impendit: cujus rei fidem faciunt præter illas, quæ in defuncti seriniis adhuc ineditæ jacent, lucubrationes, variæ illæ observationes, quas cum *Actis Eruditorum Lipsiensibus*, tum & *Diario Gallico* insertas Orbis eruditus cum admiratione legit.

Hac tam recondita & tot in publicum editis præclari ingenii monumentis declarata eruditione magno omnium doctorum consensu inter principes suæ ætatis Mathematicos adnumerari meruit, factumque, ut longe jam pervulgata ejus fama magnorum non in literis tantum, sed etiam in præcipuis Principum ministeriis Virorum literis fuerit compellatus: quos inter facile primas tenent Viri non natalium magis quam eruditionis dignitate spectatissimi, Illustrissimus Dominus ROGERUS BRULARTUS *Marchio* DE PUYSEULX ET SILLERI, &c. &c. Magni *Gallicarum* REGIS ad *Helvetios* Legatus Excellentissimus: tum & Illustr. Dominus GUILIELMUS HOSPITALIUS, Eques & *Marchio* S. MESMII ET MONTELERII, qui in præfatione ejus libri, cui *Analyseos quantitatum infinite parvarum* titulum fecit, BERNOULLIIS Fratribus omnem se mathematicæ suæ suppellectilis substantiam debere ingenue profitetur. Cum his paria in amore defuncti faciebant Nobilissimus NICOLAUS FATIO DUILLIERIUS, Regiæ Anglorum Societati jamdudum ascriptus: Amplis-



Amplissimus item GOTHOFREDUS GULIELMUS LEIBNITIUS, Sereniss. Electoris *Brunsvicensis* Consiliarius Status, Regiæ Societatis Borussicæ Præses, Vir in tantum laudandus, in quantum virtus & eruditio possunt intelligi, ut cujus in omni literarum genere, Jurisprudentia, Historia, & Mathesi, ubique sibi parem, hoc est, excellentem doctrinam nostra hæc ætas prædicat & futura admirabitur. Nec non Celeberrimi Viri, PETRUS VARIGNONIUS, Regiæ Scientiarum Academiæ Socius, Matheseos in Collegio apud *Parisienses* Mazarineo: OTTO item MENKENIUS, & CHRISTOPHORUS PFAUTZIUS, *Lipsienses* Professores meritissimi. Quanquam autem vel una hæc tam illustrium nominum commemoratio abunde demonstrat, quantam in eo doctrinæ amplitudinem repositam fuisse oporteat, qui tantorum Virorum gratiam & amicitiam potuerit promereri, ingens tamen ad ejus dignitatem cumulus accessit, honorificentissimo Parisiensis & Borussicæ Academiæ testimonio, a quibus ille inter primos in Sociorum numerum est relatus. Plerique enim nostis, Auditores, de constituendis Regiis in *Gallia* & *Borussia* Scientiarum Academiis non prius, quam de BERNOULLIO nostro in eas cooptando fuisse cogitatum: cujus rei abunde fidem faciunt ea diplomata\*, quibus illi verbis quam fieri potuit honorificentissimis ea dignitas est oblata. Quo loco illud non est prætereundum, quod vel inprimis Parisiensis Academiæ eximiam de hujus Viri doctrina existimationem declarat, quod illa defuncti memoriam solenni ritu in publico Societatis conventu hujus ipsius mensis die XIV, parentali oratione, singulari nec promiscue omnibus tribui solito honoris genere, prosecuta est.

Ad hanc tam eximiam rerum mathematicarum cognitionem indeque consecutam nominis celebritatem quibus ille adminiculis pervenerit, operæ pretium est cognoscere. Fuit autem in illo, quod ad egregios in unaquaque arte faciendos progressus plurimum valet, naturalis quædam ad Matheseos studium inclinatio:

\* Quorum Parisiense exaratum est d. 1. April. 1699, Berolinense d. 13. Julii 1701.

natio : cui suffragabantur eximiae & plane singulares animi dotes, quæ cum etiam singulæ in uno homine deprehensæ magnam laudem merentur, in eo reperiiebantur universæ. Erat enim in illo iudicium rectum & solidum, quo vera a falsis, & quæ adumbratam tantum speciem habebant, a rebus solidis accurate sciebat internoscere. Isti gemina erat vis ingenii peracris, non ea quidem, quæ celeriter res objectas comprehenderet & continuo sine meditatione in rei naturam penetraret; sed qualem CATONIS Majoris describit PLUTARCHUS, quem ad percipiendum fuisse tardum, sed ea quæ semel percepisset, nunquam oblivioni tradidisse & egregie in suos usus convertisse scribit. Quanquam illa percipiendi difficultas, non tam naturæ cuidam vitio, quam singulari ejus accurationi videtur tribuenda; ut qui externam rei superficiem nosse non contentus (in quod fere vitium illa in percipiendo, ut sic dicam, tam rapacia ingenia solent incidere) ipsa rei viscera & medullam introspicere, nihilque, quod ad certam atque plenam rei cognitionem quicquam posset conducere, incompertum & inexploratum relinquebat. At postquam ille rerum notiones semel animo impressas habebat, nunquam illas sibi iterum elabi, sed nec otiosas apud se delitescere patiebatur, iisque continuo versandis & inter se comparandis, eas vel perficiebat, vel novas ipse ex se promebat. Accedebat enim ad naturales illas animi dotes studium quoddam singulare, quod amore Matheseos successum nunquam illum sinebat quiescere, priusquam propositum sibi finem, in quo se postea mirifice oblectabat, esset assecutus. Erat autem in meditatione tam assiduus, ut semper fere cogitabundus conspiceretur, sæpeque ei amicis inter se colloquentibus assistenti accideret, ut post longam illorum dissertationem, quid inter illos actum esset, requireret. Quale quid cum aliis summis viris, tum ARCHIMEDI quoque, cujus premebat vestigia, sæpenumero usu venisse traditur, ut figuris suis intentus, quia corporis cultum intermittebat, a ministris ad ungendum abstraheretur, & ne tum quidem ab opere suo quicquam remittens per corporis unguenta, figuras & lineamenta digito describeret. Quanquam autem id

id studium longa assuetudine jam in mores transferat, alebatur tamen insigniter honesta quadam ambitione, quæ ipsum, ut mag-  
 norum illorum ætatis suæ Mathematicorum doctrinam atque cele-  
 britatem æmularetur, impellebat, plane ut, quod de tibicinibus  
 tradit PLUTARCHUS, eos cum in Liberalibus olim singuli artis  
 suæ specimen ederent, remisse & oscitanter id fecisse; orta au-  
 tem cum aliis concertatione, accuratius longe concentum instru-  
 xisse: idem de nostro affirmari queat, illum scilicet cum Clarissi-  
 mis Viris, tandem etiam cum ingeniosissimo *Fratre*, orta stu-  
 diorum contentione & doctrinæ æmulatione, se ipsum quodam-  
 modo superasse. Quare tam excellentibus ingenii dotibus cum  
 indefesso studio & perpetua quadam meditatione conjunctis,  
 non est mirum, si nihil unquam ejus se animo tam intricatum  
 obtulit, quod non istis adminiculis adjutus felicissime superaret.  
 Hoc idem tamen tam versatile ingenium, ne quid dissimulem,  
 si quando ad tractanda quædam impediti operis negotia in vita  
 accederet, sæpenumero hæsitare, nec viam, qua se facile expli-  
 caret, invenire deprehendebatur: quod ei cum multis præstan-  
 tissimis viris fuit commune. Et quid mirum, in hac civili vita,  
 cum pleraque non tam ad rationis normam quam obliquis qui-  
 busdam vis ab hominibus gerantur, sæpenumero cespitare eos,  
 qui, prout rationis artem ipsi profitentur, ita ad hujus ductum  
 actiones suas omnes sibi conformandas arbitrantur? His ingenii  
 dotibus ingentem conciliabat elegantiam eximia eloquendi facul-  
 tas, quam ille præter exercitationem inde a juventute semper  
 continuatam, diligenti præcipue earum rerum, quæ dicendæ e-  
 rant, meditatione comparavit. Ut vel ejus exemplo verum esse  
 comprobetur illud FLACCI, dicentis, bene sapere & sentire prin-  
 cipium esse & fontem bene dicendi.

Quamquam autem ea, quæ adhuc commemoravi, naturæ &  
 industriæ bona magnam in se habent commendationem, tanto  
 tamen illa majoris haberi merentur, quod nimia illorum æstimatio  
 modestiam ejus nunquam potuit expugnare. Enimvero uti negari  
 non potest, illum honesta quadam ambitione, sine qua nemo  
 unquam magnum in doctrina gradum fecit, impulsum, & lau-  
 dem

dem quæfisse inter doctos , & quæfitam non facile passum sibi eripi : ita rursus , nec de aliis illum contemtim , nec de se nimis liberaliter sensisse aut dixisse , illi quam optime possunt testificari , qui cum eo familiarius consueverunt. Ipse memini , aliquando illum mihi dicere , quo magis in mathematicarum rerum contemplatione proficeret , tanto magis omnis humanæ cognitionis , quantacunque illa esset , imperfectionem a se penitus introspecti. Quod cum diceret , idem illud ei videbatur contigisse , quod *MENEDEMUS* illis dicebat usu venire , qui discendi gratia *Arbenas* ventitabant : hos nempe primo quoque tempore fuisse sapientes , deinde studiosos sapientiæ , mox rhetoras , tandem procedente tempore rerum omnium evasisse ignaros. Et huic modestiæ fuit tribuendum , quod ab omni quorundam stolidæ eruditorum inepta arrogantia remotus , in consuetudine & colloquio non morosum se aut difficilem , sed humanum , atque omnium , qui eum requirerent , usibus expositum præbuit. In primis autem cum Collegis suis amice vixit , & concordiæ , si quis alius , vel colendæ , vel , si qua illam labefactatam crederet , resarciendæ erat studiosus. Sed & cum aliis semel contractam amicitiam religiose servabat ; quam tamen non cum omnibus promiscuè , sed cum delectis tantum Viris arctiorem sibi contrahendam existimavit. In hoc numero erant præcipui triga Clarissimorum hujus Academiæ procerum , Magnificus Acad. Rector , D. SAMUEL WERENFELSIUS , Theologus ; D. JACOBUS BURCARDUS , Jurisconsultus ; D. NICOLAUS EGLINGERUS , Medicus. Nec minus ipsi veracitatis & ingenuitatis studium fuit , adeo ut tacere mallet , aut diserte negare , quam id dicere aut promittere , cujus ipsum postea pænitere ac pudere posset. In primis averfabatur illam hominum pestem , qui aliis , & frequentius malis quam bonis , turpiter assentantur. In frequentando Divino cultu , quantum per valetudinem poterat , frequens erat & attentus , & quantum a superstitione , tantum a profano illorum studio , qui de DEO rebusque Divinis contemtim sentiunt aut loquuntur , æque remotus. Possem in hanc rem plura commemorare , quæ defuncti memoriam commendabilem possent red-

reddere. Sed nolo, quod est multorum institutum, vel ea, quæ mediocria in illo fuerunt, verbis extollere, vel etiam falsas laudes ei astruere. Hoc illi faciant, qui in sterili argumento occupati, nihil admodum in eo, cujus vitam in literas mittere instituerunt, laude dignum inveniunt. Mihi satis fuerit, procul amore & odio, ea de defuncto dixisse, quæ bono jure in eum potuisse conferri, cum vos ipsos, *Auditores*, tum universum literatum Orbem testes allegare possum. Tantum certe & ab ingenuitate defuncti & ab instituto meo abest, ut vel in virtutibus ejus exaggerandis, vel vitiis, quibus cum omnis hominum vitam summa quoque ingenia infestantur, dissimulandis atque oratorio furo obliniendis multum mihi existimem laborandum, ut imo, secutus auctoritatem defuncti, qui peccatorum se, & gravissimorum quidem peccatorum reum ultro agnoscebat & profitebatur, ego hanc ipsam ejus tam infucatam confessionem in præcipuis illius laudibus collocem. Si qui vero sunt, qui morbo quodam animi magis quam judicio impulsæ memoriæ defuncti obtrectare, & illius nævos exagitare pertendunt, eorum nos procacitatem tum demum patienter ferre incipiemus, postquam & eruditionem & ceteras illius virtutes suis ipsi studiis moribusque expresserint. Tantisper vero dum ab iis quam longissime sunt remoti, retracta in pectus ea manticiæ parte, quæ a tergo est, in suis ipsos vitiis, quibus longe gravioribus urgentur, meditandis atque e vita eluendis potius, quam in alienis exagitandis, curiosos esse jubemus.

Sed vocat me narrationis ordo, ut novissima vitæ illius momenta describam. Corpus obtigerat nostro a natura firmum & compactum, sed quod cum peregrinationibus, quas in juventute molestissimas instituit, tum præcipue lucubrationibus suis & pertinaci meditandæ assuetudine debilitatum, jam inde ab aliquot annis labem facere cœpit. Primum hostem expertus est podagram, quæ initio tolerabilis, temporis progressu vehementior extitit, & non doloris tantum exquisitissimi sensu, sed duratione etiam, nec uno tantum, sed sæpius per annum repetito incursu, tanta in eum atrocitate desævilt, ut ex ea contracta in-

firmitas, pedum illi usum difficilem & impeditum reddiderit. Eadem vero postea ad superiora penetrans manuum quoque ligamenta penitissime infedit, & durabili vexatione fere patientiam ejus expugnavit. Sed erat hæc non nisi velitaris pugna, & per hæc rudimenta DEUS illum gravioribus tanto majore cum patientia subeundis, & per hanc viam æternitati denique preparabat. Etenim ex hoc tam frequenti morborum insultu, qui fere sine cessatione modo hanc, modo illam corporis partem lancinabant, languor quidam & cachexia totius corporis illum invasit, quæ cum nullo medicamentorum aut fomentorum genere, quibus assidue sollicita uxor cum recreare moliebatur, expugnari posset, hæctica febris non obscuris signis, tussi præcipue & conspicua corporis emaciatione, coepit se prodere; qua cum penitus prostratæ essent illius vires, & jam sibi ipsi, nedum aliis functionibus, quas hucusque non segniter obierat, sustinendis, non esset, tandem lecto est affixus. Hic vero ille demum vere se Philosophum, & quod rei caput est, Christianum exhibuit, ut profecto tanti fuerit tam graviter ægrotasse. ZENONEM memorant, quum nuntium accepisset de navi, quam ille mercibus onustam expectabat, mari submersa, exclamasse: Quam bene, o Fortuna, mecum decidis, quæ me ad pallium atque Philosophiam compellis. Existimate, *Auditores*, BERNOULLIUM vos loquentem audire, non illa quidem ZENONIS, sed DAVIDIS verba: Quam utile mihi est, o DEUS, quod me deprimis, ut discam decreta tua. Habuit profecto postremus illius morbus amplissimum campum, in quo constantiam, fidem, & patientiam suam exerceret. Et constantiam quidem cum dico, non eam intelligo obstinatam animi duritiem atque temeritatem, qua multi, quorum animis callum obduxit peccandi assuetudo, nullo peccatorum sensu, nulla æternitatis cogitatione perculsi, mortem instantem vel contemnunt vel contemnere volunt existimari: a qua tantum absuit noster, ut, quamprimum lecto affixus decretorium illum diem, & in eo vitæ a se actæ reddendam esse DEO rationem cogitaret, in se ipsum continuo descenderet, & ut illud Divinum examen suo ipse anteverteret, seque & facta



facta sua diligenter excuteret. Quæ cogitatio adeo animum ejus dejecit & prostravit, ut hinc præteritorum conscientia, inde futurorum metu, in angustias compulsus, & indignum se profiteretur DEI misericordia, & eandem tamen, ut peccatorum suorum memoriam oblimaret, enixissimis precibus imploraret. Neque tamen de statu passus se dejici, in memoriam sibi revocavit CHRISTI meritum, in eoque uno posita fiducia certissimum in ærumnis suis solatium reperit, id unum subinde professus se metuere, ne forte sinceritas ac certitudo suæ fidei DEO suo minus satisfaceret. Hac spe & interna Spiritus Sancti testificatione, quæ illum Divinæ gratiæ reddebat securum, erectus, de doloribus suis non admodum conquerebatur, sed quicquid in iis erat durum patientia sibi lene & tolerabile efficiebat. Quoties ergo de imminente morte differebat, ea id faciebat animi constantia, non ut de vita ad sepulchrum, sed de domo in domum migraturus videretur. Jamdudum enim omnem recuperandæ salutis spem abjecerat, & id unum agebat, ut & familiæ suæ post mortem prospiceret, & animum capeffendæ æternitati præpararet. Hoc sine post tutores uxori & filio designatos, quibus etiam, quid de libris & manuscriptis suis fieri vellet, aperuit, totus in precibus & piis meditationibus erat, nec admittebat officiosa quorundam amicorum solatia, qui nonnunquam vitæ ipsi spem facere nitebantur. Hunc ejus animum certamque mortis expectationem illud inter alia declarat, quod a Cl. FAYO nostro, quo ille familiariter est usus, mihi narratum hoc loco commemorare non pigebit. Is jam olim librum aliquem Theologici argumenti a NAUDÆO conscriptum a BERNOULLIO acceperat utendum: quem cum illi post aliquod intervallum, addita scriptoris commendatione, restitueret, affirmavit BERNOULLIUS, certo se ante mortem librum FAYO esse donaturum. Id cum ille per jocum ab eo dictum esse existimaret, quod BERNOULLIUS satis firma tum valetudine utebatur, factum, ut ille triduo ante mortem eum inviseret. Ibi ægrotus, repetita promissionis commemoratione, FAYO nil tale cogitanti: Jam, inquit, instat illud tempus, quod, ut promisso meo



meo exsolvam, monet: & cum dicto librum ei tradidit. Eodem tempore de sepulchro sibi procurando cogitabat, quod cum ab amico ultro oblatum gratanter accepisset, saxo lineam Spiralem Logarithmicam circulo inclusam insculpi iussit, cum hac epigraphæ, *EADEM MUTATA RESURGO*: ARCHIMEDIS<sup>1</sup> exemplum imitatus, qui, ut est apud PLUTARCHUM, sepulchro suo cylindrum sphaera comprehensum ab amicis imponi voluit, tanquam id geometricarum vigiliarum & inventionum suarum palmarium esset. Sic & nostrum probabile est ea inscriptione ad insignes ejus curvæ proprietates voluisse alludere, quas in illa comprehendendi ipse primus invenerat. Eam namque lineam, ut ipsiusmet defuncti verbis \* utar, non modo sui evolutione se ipsam describere, sed & infinitis aliis modis ex se ipsa generari eam posse, primus deprehenderat, & ita quidem, ut perpetuo non tantum similes, vel ejusdem speciei curvæ prodeant, sed prorsus eadem, & positione tantum diversæ, talesque quæ sibi superimpositæ plane congruant. Ob quas causas etiam Spiram illam mirabilem appellare solebat. Præcipue autem ille hoc symbolo certam futuræ resurrectionis fiduciam pari pietate & elegantia expressit. Tandem curis omnibus defunctus, exhaustis corporis viribus, cum dolores alimentum jam nullum reperirent, in una æternitatis cogitatione defixus, die xvi Augusti, paulo post quintam matutinam, animam DEO Creatori reddidit, annum quinquagesimum, mensibus septem & quod excurrit, vivendo prætergressus. Mortem dicerem præmaturam; sed illa quantumvis diu dilata semper ejusmodi apparitura fuerat illis, qui studia literarum earumque antesignanos optarent perennare. Funus tertio ab hoc die elatum est, deducente Academia, & in æde Franciscanorum, in qua sibi sepulchrum delegerat, depositum, funebrem concionem habente Rev. & Clarissimo Viro, Domino JOH. RODOLFO WETSTENIO, Ecclesiæ Leonhardinæ Diacono fidelissimo.

Et hæc quidem mors corporis nobis usuram abstulit. Ne  
vero

\* In *Actis Erud. Lips.* m. Maii 1692.

vero totus nobis nostrisque usibus periret, ipse sibi ætatis spatium ampliavit, atque præclaris ingenii monumentis eam sibi vitam comparavit, quam nulla unquam temporum diuturnitas poterit abolere. Etenim, præter tabulas Gnomonicas *Burdegala* olim ab eo concinnatas, nec nisi typographi operam desiderantes, edidit in Batavica peregrinatione *Conamen novi systematis Cometarum*, & *Dissertationem de gravitate ætheris*: publicis vero Dissertationibus, quas in Academia nostra proposuit, præter alia argumenta justum quoque *De Seriebus infinitis* tractatum edidit. His accesserunt eruditissimæ illæ observationes, quibus *Diarium Parisense* & *Acta Eruditorum Lipsiensia* illustravit, ex quibus sunt, præter alias complures, Examen modi ponderandi aeris per vesicam, in qua commissum ante se a viris doctis paralogismum ingeniose ostendit, aliam vero aeris ponderandi rationem longe accuratorem ipse substituit, Societati Anglicanæ summopere probatam: Modus, quo Matheſeos scientia cæcis propinari possit: Examen machinæ urinariæ Borellianæ, nec non perpetui mobilis Parisiis publicati: Nova ratio metiendi nubium altitudines: Solutio algebraica problematis illustris de quadrifsectione trianguli scaleni per duas normales rectas: Animadversio in Geometriam *Cartesianam*, & constructio quorundam problematum hypersolidorum: Ratio inveniendi cujusque plani declinationem ex unica observatione projectæ a stylo umbræ; quod est præcipuum in Gnomonicis inventum: Vera constructio geometricorum problematum solidorum & hypersolidorum per lineas rectas & circulum, quam ante illum tentarunt plures, sed nemo præstare potuit: Analysis problematis de inventione lineæ descensus æquabilis; quod primum inventi a se Calculi differentialis specimen fuisse diximus: Demonstratio oscillationis ex doctrina vectis: De curvatura veli, quam ille primus eruit, & regulas ad nauticam perficiendam utilissimas construxit: Observationes circa lineas cycloïdales, evolutas, ant-evolutas, causticas, anti-causticas, pericausticas, deque earum usu & simplice relatione ad se invicem, deque Spira mirabili: Solutio problematis de minimo crepusculo: Explicatio naturæ osculorum, & defini-

definitio celeritatis navium, cui subjungit regulas pro supputandis corporum in fluido motorum resistentiis : De curvatura laminæ elasticæ, ejusque identitate cum curvatura lintei a pondere inclusi fluidi expansi : De curva accessus & recessus æquabilis ad punctum datum, mediante rectificatione curvæ elasticæ; quam lineam magno LEIBNITIO tantopere desideratam solus reperit : De methodo tangentium inversa : Constructio generalis omnium curvarum transcendendum ope simplicioris tractoriæ & logarithmicæ : Complanatio superficierum conoidalium & sphæroidicarum; & quis omnes fecundissimi ingenii lucubrationes enumeret? Eidem debemus editionem Geometriæ *Cartesiane* magna accurate ab illo procuratam, quam & notis quibusdam tumultuariis in ipsa operis recensione ei subnatis subinde locupletavit. Cœpit etiam aliquot ante obitum annis commentari; quem commentarium etiam ad umbilicum fere perduxit, *De Arte conjectandi*, in qua ratiocinia, ab aleæ ludo translata, ad moralia, civilia, & œconomica negotia applicare docet, soluto eum in finem singulari quodam problemate, quod & utilitatis amplitudine & inventionis difficultate ipsi circuli tetragonisino, ut qui, si vel maxime tandem inveniretur, exigui usus futurus esset, longe anteposit.

Habetis, *Auditores*, brevem, sed fidelem, Cl. BERNOULLII, heu! quondam vestri, vitæ mortisque historiam; Viri, cujus memoriæ universus quacunque patet eruditus Orbis affurgit, & assurgit tamdiu, quandiu literis apud condignos rerum æstimatores suus honos constabit, cuique nostra cumprimis Academia veras lacrymas debet. Ea enim sunt merita BERNOULLII nostri, ut, quemadmodum de se prædicabat AUGUSTUS, *Romam* se auream relinquere, quam lateritiam accepisset: sic illi ea laus omni jure sit tribuenda, Geometriam, quam pauperculam invenerat, multis ab ipso inventis atque observationibus locupletatam relictam fuisse. Nos imprimis amissimus ejus morte Virum non e multis unum, sed cui inde a condita hac Universitate in re mathematica nominis celebritate & inventorum gloria parem non habuimus, quique ab Academica, quam apud nos sustinuit, digni-

dignitate tantum decoris neutiquam accepit, quantum ipse in eam contulit. Amisimus, inquam, Mathematicum, non *Helvetia* nostræ tantum, sed universæ Europæ, unum e præcipuis: in cuius laudibus illa fuit una de minimis, quæ vel sola in alijs aut unica est aut summa, quod disputator fuit subtilis idemque perspicuus, præceptor fidus & industrius, Poeta suavis & ingeniosus, Orator copiosus & eloquens. Hanc tamen tam excellentis ingenii jacturam ut moderatius feramus, id efficit, quod in demortui locum eum jam surrogatum videmus, qui ingenii acumine, eruditionis fama, inventorum gloria, non minus quam natalium communione, genuinus ejus frater esse a cunctis agnoscitur, Virum nempe Celeberrimum, Dominum JOHANNEM BERNOULLIUM, *Groningana* Universitatis per decennium in docenda Mathesi Professore: quem exornandæ nostræ Universitati peculiari Numinis providentia fuisse destinatum quo minus possemus dubitare, illud accidit memorabile, ut ille, cum graviolem Fratris ægritudinem ignoraret, visendorum Parentum studio iter in patriam instituturus, forte sic ferente, eodem illo die *Groningæ* emigraret, quo nos hic *Basilea* ipsius Fratri exequias celebravimus: plane ut ab ipso DEO Fratri in administrando munere Professorio succenturiatum fuisse appareat. Ad quod etiam, ut primum in civitate nostra appulit, quam fieri potuit honorificentissime vocatus, & ab Amplissimis Urbis nostræ Proceribus luculento salarii auctario cohonestatus, neglectis amplissimis conditionibus, quibus in *Lugduno-Batavam* & *Ultrajectinam* Universitates ad docendam Mathesin invitabatur, Patriæ suæ servire maluit. Maçte hac virtute, Vir Clarissime, & ut in locum Fratris, sic & in affectum ejus, quo ad promovendam hujus Universitatis gloriam ferebatur, succede.

TU vero, benignissime DEUS, qui tam luculentis tuis beneficiis usque res nostras tibi curæ esse quotidie demonstras, serva proporro hanc Civitatem tanquam pupillam oculi Tui, eamque Proceribus nostris tutam foris, tranquillam domi, & ex omni parte florentem præsta. Ecclesiam præcipue ejusque seminarium Academiam, ut adhuc fecisti, sic tuere, ut ab omni labe intactæ,

pro-

promovendæ nominis Tui gloriæ, & cum suæ tum, aliorum salutis procurandæ sedulo & cum successu laborent. Eoque fine prospera illorum industriam, quos Tibi in utraque delegisti perficiendæ voluntatis Tuæ ministros, iisque, ut tanto utilius Tibi laborarent, fac hanc gratiam, ut juvenus non magis ex illorum informatione, quam vita, tanquam ex optimo exemplari, suos ipsa mores desumat omni probro defæcatis, hancque illi educent non monitis tantum, sed, quod multo est efficacius, vita. Idque ut diu faciant, vitam, quam aliis docendis tam strenue impendunt, longævam & felicem omnibusque ingenii dotibus ei muneri sufficientibus instructam benigne illis largire. Fac ut nos omnes, veram non simulatam Philosophiam affectantes, intimis cogitationibus votisque nostris Te unum sectemur, & ad hunc finem omnia studia nostra unice colliment: ut studeamus non ostentationi & famæ apud homines captandæ, sed vitæ ad leges Tuas emendandæ: non ut oblectemus nos studiis, sed ut illorum ope verum a falso, bonum a malo secernamus: non ut serviant curiositati nostræ, sed ut extirpent errores, minuant cupiditates, defæcent mores. Inprimis id nobis præsta, o DEUS, ut ne quid unquam sapiamus præter Te, atque identidem cogitemus, in illo decretorio die de nobis ita Te laturum sententiam, non ut quam docti sed quam probi fuerimus dispiciatur. Donec in cœlestem illam lucem translati, & omnibus ignorantie peccatique tenebris, quibus adhuc in hac mortalitate circumfundimur, exsoluti Doctores & discipuli, hauriamus lumen de Tuo lumine, & potiamur vero studiorum fructu, beata æternitate. DIXI.

# INDEX

## Numerorum.

N°. <b>L</b>	Conamen adornandi novi Systematis Cometarum , pro motu eorum sub calculum revocando & apparitioni- bus prædicendis.	Pag. <b>L</b>
	Occasio scripti,	<i>ibid.</i>
<b>1.</b>	De Cometarum ortu.	<b>2</b>
	Sententia <i>Aristotelis</i> & <i>Cartesii</i> .	<b>3</b>
<b>2.</b>	De Motu : Est circularis.	<b>5</b>
<b>3.</b>	De Loco : Non est sub Luna.	<b>6</b>
	Nec intra Planetarum Systema , sed supra Saturnum , inter quem & Fixas immensum est spatium.	<b>7</b>
	Spatium hoc partem constituit Vorticis Solaris.	<b>8</b>
	In domicilium cessit Cometis.	<b>9</b>
	Nec ulla obstat Parallaxis.	<i>ibid.</i>
<b>4.</b>	De Cauda.	<b>12</b>
	Systema Authoris.	<b>14</b>
	Mens Authoris de Cometarum caudis.	<b>17</b>
	Cur vergat in Solis oppositum?	<b>18</b>
	Cometæ nuperi consideratio , Perigæum , Statio , Motus apparens.	<b>19</b>
	Cometæ Motus compositus , ex motu Terræ annuo,	<b>20</b>
	E motu deferentis Vorticem cometicum ,	<b>21</b>
	E motu proprio.	<b>22</b>
	Futura apparitio Cometæ nostri An. 1719.	<b>23</b>
	Systematis cum apparentiis convenientia.	<b>24</b>
	Observationes Cometæ annorum <b>1680</b> , & 1681.	<b>26</b>
	Tabella motus Perigæi Cometarum.	<b>27</b>
	Solutio objectionum.	<b>28</b>
	De Astrologia judiciaria.	<b>31</b>
	Examen Systematis <i>Heveliani</i> .	<b>32</b>
	Appendix.	<b>41</b>



## N°. II. Dissertatio de Gravitate Ætheris.

Pag. 53

Gravitas aeris.

ibid.

Fluidum levius ponderat super graviorem.

54

Gravia quandoque ascendant.

55

Occasio Scripti.

56

Duo motus genera, Pulsio &amp; Attractio.

ibid.

Non datur attractio distincta a pulsione.

57

Natura Pulsionis.

58

In omni Pulsione, linea moventis &amp; linea mobilis obtusum angulum constituunt.

59

An ventus adversus attrahat navem?

ibid.

Clavus non tantum agit per modum vectis.

60

Attractiones Magneticæ &amp; Electricæ fiunt per pulsionem.

62

Attractio effluviarum a Sole fit per pulsionem.

63

Attractio olei in lampade, item Suctio, &amp; Respiratio fiunt per pulsionem.

ibid.

Attractio catenæ, &amp; Tractio currus fiunt per pulsionem.

64

Attractio baculi fit per pulsionem.

65

An partes baculi cohæreant cæmento?

ibid.

An funiculo, An solis hamulis sibi densissime implexis?

66

An quies sit causa cohæsionis partium duri corporis?

67

An per quietem sufficienter explicetur, cur clavus manu frangi nequeat?

69

Firmitas corporum tribuenda compressioni corporis alicujus externi,

73

Et quidem Gravitati atmosphæræ.

74

Parallelismus inter cohæsionem Marmorum politorum &amp; particularum insensibilium duri corporis.

75

Gravitas aeris sub examen revocatur: Experimentum Toricellianum

77

Explicatur per aeris pressionem.

78

De adsuctione liquoris o tubo clauso vel lagena.

79

De Elatere aeris, ejusque effectui.

81

De duabus fistulis sibi agglutinat.

82

De suspensione liquorum in loco clauso aut obstructo vasculo.

ibid.

De aere relicto in summitate rubi.

ibid.

De natura &amp; causis Gravitatis.

83

Quid sit elaterium aeris?

85

Ejus causa obscura.

86

Quid sit aeris resistentia passiva, illustratur exemplo duorum Luctatorum.

87

Regulæ elaterii &amp; resistentiæ passivæ.

89

Densitatum &amp; ponderum ab aere sustentabilium proportio.

93

Quan-



- Quanto plus contineatur materiae subtilis quam terrestris in portione a-  
liqua aeris atmosphærici ? Pag.94
- Cur tubo clauso vel lagena difficulter adsugi possit liquor ? 95
- Respondetur ad exemplum duarum fistularum. *ibid.*
- Respondetur ad suspensionem liquoris in loco clauso , vel vasculo  
obstructo. 96
- Fluxus liquoris per syphonem in loco clauso explicatur per Resisten-  
tiam aeris passivam. 97
- Cur , relicto in summo tubi aere , mercurius solito humiliter descendat ,  
nec tamen omnis effluat ? 100
- Quousque descendere debeat ? 101
- Aer efficit firmitatem corporum, uti suspensionem liquorum in *tubis.* 104
- An vero solus aer , disquiritur per comparisonem ejus quod accidit  
mercurio in tubo longiori ? 105
- Concluditur ipsum quoque Ætherem gravitare : idque probatur e na-  
tura & causis gravitatis , 106
- Item e descensu liquorum in vasis oclusis. 107
- Ætherem gravitare in Philosophia *Cartesiana* nullum mysterium. 108
- Per gravitatem ætheris explicatur cohæsiō partium baculi. 109
- An possit dari baculus , cujus pondus superet pondus similis cylindri æ-  
therei ? 110
- Baculus attractus vel suspensus proprie nullum possidet pondus , adeo-  
que a minima ætheris vi propelli poterit. 111
- Cur, supposita ætheris gravitate, liquores tamen non debeant ad infini-  
tam altitudinem in tubis suspensi hære ? 112
- Cur embolus evacuatae antliae non nisi centum plus minus libras susti-  
neat ? 113
- Disparitas inter suspensionem baculi , & liquorum in tubis. 115
- Cur mercurius repurgatus in sex pedum altitudine hæreat ? 116
- Cur pressione ætheris non connectantur, uti durorum, ita liquidorum  
particulæ ? 117
- Quæ sit natura liquidi & duri ? 119
- Pori liquorum non sola materia subtili repleti. 120
- Cur liquori effuso sese confestim insinuet aer ? *ibid.*
- Cur pressione ætheris connectantur corporum durorum particulæ ? 121
- In quo consistat mollities & lentor. *ibid.*
- Cur liquidorum particulæ sint rotundiores , durorum oblongiores , &  
cur illæ moveantur , hæc quiescant ? 122
- Durorum particulas absolute quiescere non est necesse. 123
- Cur liquida facile cedant tactui , dura difficulter , & an quies ejus rei  
causa sit ? *ibid.*
- Quare manus lignum frangere possit , non ferrum ? 125
- e 3
- Cur

Cur manus facile clavum attrahat, ægre frangat?	Pag. 126
Cur lignum uno sensu facile, alio difficillime rumpatur?	127
Nova quædam Mechanicæ principia. Quid fiat ubi corpus elevatur perpendiculariter?	128
Cur majus corpus majorem pariat elevanti difficultatem?	ibid.
Cur corpus facilius ad latus impellatur quam elevetur sursum?	129
Quid fiat, ubi corpora complanata sunt revellenda?	ibid.
Quare corpus angulosum difficiliter moveatur sphaerico?	130
Cur corpora æquilibrata moveantur facillime, minus tamen facilius majori?	131 (137)
Examen aliquot Experimentorum, juxta doctrinam de gravitate ætheris.	132 (138)
De tubo inverso digito adhærente.	ibid.
1. Exp. de duobus marmoribus in aere cohærentibus.	133 (139)
2. Exp. de duobus marmoribus in evacuato recipiente cohærentibus.	134 (140)
3. Exp. de anomalia descensus & ascensus Barometri.	137 (143)
An eadem anomalia locum etiam habeat in Thermometro.	140
4. Exp. de duobus hemisphæris evacuatis firmissime sibi cohærentibus.	142
Aliorum explicatio insufficiens.	143
Genuina phænomeni causa evolvitur.	146
Quare in fistulis gracilioribus liquor internus semper sit nonnihil altior externo?	149
Vana spes motus perpetui.	152
Cur vicissim in fistulis gracilioribus superficies mercurii semper depressior sit superficie ejus extra fistulam?	154
Cur superficies aquæ in fistulis sit concava, mercurii convexa.	ibid.
Artificium mensurandi particulas aeris.	ibid.
Magnitudo particulæ aeris.	156
Recapitulatio.	157
Appendix.	158
N°. 3. <i>Nouvelle Machine pour respirer sous l'eau, tirée du Livre De Motu animalium, de J. A. BORELLI.</i>	165
IV. Examen de la Machine pour respirer sous l'eau.	168
5. <i>Machine pour élever les eaux, de l'invention de Mr. L. C. D. O.</i>	171
VI. Doutes du Sr. B E R N O U L L I, sur cette Machine hydraulique.	172
VII. Centum Positionum Philosophicarum Cento.	175
8. <i>Relatio de Controversia qua hætenus inter Dn. HUGENIUM &amp;</i>	

- & Dn. CATELANUM agitur, de Centro Oscillationis. Pag. [192](#)
- N°. IX. Extrait d'une Lettre du Sr. BERNOULLI, sur le démêlé de Mr. l'Abbé CATELAN avec Mr. HUYGENS, touchant le Centre d'Oscillation. [195](#)
- [10.](#) Réponse de Mr. l'Abbé CATELAN à la lettre précédente. [197](#)
- XI. Nouvelle Machine pour peser l'air, inventée par le Sr. BERNOULLI. [199](#)
- XII. Problème proposé par Mr. BERNOULLI. [203](#)
- XIII. Examen de la manière de peser l'air dans une Vessie. [204](#)
- XIV. Problème proposé par Mr. BERNOULLI. [207](#)
- XV. Extrait d'une Lettre de Mr. BERNOULLI sur une flamme sortie d'un tuyau de fontaine. *ibid.*
- XVI. Extrait d'une Lettre de Mr. BERNOULLI, sur la manière d'apprendre les Mathématiques aux Aveugles. [209](#)
- XVII. Parallelismus ratiocinii Logici & Algebraici. [211](#)
- XVIII. Theses Logicæ de Conversione & Oppositione Propositionum, cum Adnexis miscellaneis. [225](#)
- XIX. Dubitatio circa causam Gravitatis a rotatione Vorticis Terreni petitam. [239](#)
- [20.](#) Specimen Libri De Momentis gravium &c. De momento gravis super plano declivi. [245](#)
- XXI. Solutio difficultatis contra propositionem quandam mechanicam. [248](#)
- XXII. Methodus ratiocinandi, sive usus Logicæ in præclaro aliquo phænomeno physico enodando. [251](#)
- XXIII. Narratio controversiæ inter Dn. HUGENIUM & Abbatem CATELANUM agitatæ de Centro Oscillationis, quæ loco animadversionis esse poterit in Responsum Dni. CATELANI, N°. [10.](#) contentam. [277](#)
- XXIV. Demonstratio rationum, quas habent series numerorum naturali progressionem sese insequentium, vel quadratorum, cubicorum, &c. item trigonalium, pyramidalium &c. ad series numerorum totidem maximo æqualium. [282](#)
- [25.](#) Examen perpetui mobilis Parisiis publicati, institutum a D. PAPINO. [284](#)
- N°. XXVI.



N°. XXVI. Examen <i>Bernoullianum</i> .	Pag. <a href="#">286</a>
XXVII. Solutio tergemini Problematis Arithmetici, Geometrici, & Astronomici.	<a href="#">291</a>
XXVIII. Gemina appendix ad Examen perpetui mobilis.	<a href="#">314</a>
XXIX. Solutio algebraica Problematis de Quadrisectione Trianguli Scaleni per duas normales rectas.	<a href="#">328</a>
XXX. Nova ratio metiendi altitudines nubium.	<a href="#">336</a>
XXXI. Animadversio in Geometriam <i>Cartesianam</i> , & Constructio quorundam Problematum hypersolidorum.	<a href="#">343</a>
<a href="#">32.</a> Dion. <i>PAPINI Meletemata ad Geminam appendicem de perpetuo mobili.</i>	<a href="#">351</a>
XXXIII. Appendix tertia ad Examen perpetui mobilis, qua ad Meletemata D. <i>PAPINI</i> respondetur.	<a href="#">355</a>
XXXIV. Positiones Mathematicæ, De Rationibus & Proportionibus.	<a href="#">361</a>
XXXV. Positiones Arithmeticæ de Seriebus infinitis, earumque Summa finita.	<a href="#">375</a>
XXXVI. De invenienda cujusque plani declinatione ex unica observatione projectæ a stylo umbræ.	<a href="#">403</a>
XXXVII. Vera constructio geometrica Problematum Solidorum & Hypersolidorum per lineas rectas & circulos.	<a href="#">411</a>
XXXVIII. Novum Theorema pro doctrina Sectionum Conicarum.	<a href="#">418</a>
XXXIX. Analysis Problematis, De inventione Lineæ descensus uniformis, & Propositio Problematis, De inventione Lineæ Funiculariæ vel Catenariæ.	<a href="#">421</a>
XL. Quæstiones nonnullæ de usuris, cum solutione Problematis de sorte Aleatorum propositi N°. XIV.	<a href="#">427</a>
XLI. Specimen Calculi differentialis in dimensione Parabolæ Helicoidis, Ubi de flexuris curvarum in genere, earundem evolutionibus, aliisque.	<a href="#">431</a>
XLII. Specimen alterum Calculi differentialis, in dimetienda Spirali Logarithmica, Loxodromiis Nautarum & Arcis Triangulorum Sphæricorum, una cum additamento quodam ad Problema Funicularium, aliisque.	<a href="#">442</a>
	<a href="#">N°. 43.</a>

- N°. 43. *Lettre de Mr. le Marquis de L'HOPITAL à Mr. HUYGENS, dans laquelle il prétend démontrer la Règle de cet Auteur touchant le Centre d'Oscillation du Pendule composé, par sa cause physique. & répondre en même tems à Mr. BERNOULLI.* p. 454
44. *Remarques de Mr. HUYGENS sur la Lettre précédente & sur le récit de Mr. BERNOULLI dont on y fait mention.* 458
- XLV. *Demonstratio Centri Oscillationis ex natura Vectis, reperta occasione eorum quæ super hac materia in duobus Num. præced. recensentur.* 460
46. *Solutio Curvæ Causticæ per vulgarem Geometriam Cartesianam, aliaque, Authore Joh. BERNOULLI.* 466
- XLVII. *Additamentum ad Solutionem Curvæ Causticæ Fratris Joh. BERNOULLI, una cum Meditatione de natura Evolutarum, & variis osculationum generibus.* 473
- XLVIII. *Curvatura Veli.* 481
- XLIX. *Linæ Cycloïdales, Evolutæ, Ant-Evolutæ, Causticæ, Anti-Causticæ, Peri-Causticæ: earum usus, & simplex relatio ad se invicem: Spira mirabilis, aliaque.* 491
- L. *Additio ad Schedam de Lineis Cycloïdalibus.* 503
51. *Ænigma geometricum de miro opificio Testudinis quadrabilis hemisphærica a D. PIO LISCI POSILLO [Vincentio VIVIANI] Geometra propositum.* 511
- LII. *Ænigmatis Florentini Solutiones varie infinitæ.* 512
- LIII. *Solutio Problematis de minimo Crepusculo.* 515
- LIV. *Positionum de Seriebus Infinitis, earumque summa finita, Pars altera.* 517
55. *G. G. LEIBNITII Generalia de natura Linearum, anguloque contactus & osculi, provolutionibus, aliisque cognatis, & eorum usibus nonnullis.* 543
- LVI. *Curvæ Dia-Causticæ, earum relatio ad Evolutas, aliaque his affinia. Item natura osculorum uberius explicata. Celebritates Navium definitæ. Regulæ pro resistentiis, quas Figuræ in fluido motæ patiuntur, &c.* 549
57. *Problema ab Eruditis solvendum, propositum a Joh. BERNOULLI.* 573
- Jac. Bernoulli Opera. f N°. LVII.

- N<sup>o</sup>. LVII. Solutio Problematis Fraternali. P. 174
- LVIII. Curvatura Laminæ Elasticæ : Ejus identitas cum curvatura lintei a pondere inclusi fluidi expansi : Radii circulorum osculantium in terminis simplicissimis exhibiti ; una cum novis quibusdam Theorematis huic pertinentibus , &c. 176
- LIX. Solutio Problematis *Leibnitiani* , De Curva accessus & recessus æquabilis , a puncto dato , mediante rectificatione Curvæ Elasticæ. 601
- LX. Constructio Curvæ accessus & recessus æquabilis , ope rectificationis Curvæ cujusdam algebraicæ. 608
61. G. G. *Leibnitii Nova Calculi differentialis applicatio & usus ad multiplicem linearum constructionem ex data tangentium conditione.* 613
- LXII. De Methodo tangentium inversa , quousque tum in communis , tum in reconditoris Geometriæ potestate sit , & non sit. 618
- LXIII. Solutiones Problematis *Hospitaliani* , de Curva æquilibrationis. 624
64. G. G. *LEIBNITII Constructio propria Problematis de Curva Isochrone paracentrica , &c.* 627
65. *Excerptum ex Epistola CHR. HUGENII DE ZUYLICHEM ad G. G. LEIBNITIUM.* 637
- LXVI. Explicationes , Annotationes , & Additiones ad ea quæ in *Actis* superiorum annorum de Curva Elastica , Isochrone paracentrica , & Velaria , hinc inde memorata & partim controversa leguntur : ubi de Linea mediarum directionum , aliisque novis. 639
- LXVII. Notæ & animadversiones tumultuariæ in Geometriam CARTESII. 667
- In Lib. I. *Nota 1.* Quomodo ad æquationes perveniendum sit , quæ resolvendis Problematis inserviant : de incognitarum delectu , & de ordine in Analyfi tenendo. ibid.
- Nota 2.* Non semper necesse est , ad constructionem , omnes Problematis æquationes indeterminatas ad unam determinatam reducere : sed præstat quandoque Problema conficere per Loca quæ suppeditant indeterminatæ æquationes. 670
- Nota 3.*



- Nota 3.** De Ordinibus Curvarum æstimandis. p. 675
- Nota 4.** De infimi ordinis Curvis, per quas æquatio data potest construi. 677
- In Lib. II. **Nota 5.** Curvæ transcendentes a Geometria non sunt excludendæ. 679
- Nota 6.** Error CARTESII arbitrantis curvarum & rectarum linearum rationem nullo modo posse cognosci. 680
- Nota 7.** Methodus Tangentium CARTESII promota. *ibid.*
- Nota 8.** De Circulo curvam osculante, simulque tangente & secante. 684
- Nota 9.** Quando secunda Ovalis CARTESII transeat in circulum & qualem? 685
- Nota 10.** Ovalis primi & tertii generis in rectam, secundi in hyperbolam, quarti in ellipsin abire potest. 686
- Nota 11.** Lens hyperboliformis radios lucis [*homogeneos*] accurate colligens in unum punctum. 687
- Nota 12.** De focus linearibus, seu lineis causticis & dia-causticis. 688
- In Lib. III. **Nota 13.** De simplicissima Problematis construendi ratione. 689
- Nota 14.** De æquationum superiorum generatione per multiplicationes inferiorum. 691
- Nota 15.** Cautio adhibenda in æquationum præparatione ad constructionem. 692
- Nota 16.** Transformatio æquationis datæ in aliam, cujus terminus quilibet coefficientem habeat datæ magnitudinis. 693
- Nota 17.** Dividendo æquationem datam per binomium, quod illius radicem esse suspicamur, cur juvet divisionem incipere a termino ultimo. *ibid.*
- Nota 18.** Problemata solida, quomodo per exiguum aliquam Sectionis Conicæ particulam construantur. 694
- In Comment. SCHOOTENII, **Nota 19.** Constructio æquationis  $z = (cd + ef) : g$ . 696
- Nota 20.** Constructio æquationis  $z = (acdd - aacc) : (d^3 + acd)$ . *ibid.*
- Nota 21.** Constructio æquationum  $z = \sqrt{(aa + bb)}$  &  $z = \sqrt{(aadd - aaff - a^4) : (dd + 2df + ff)}$ . 697
- Nota 22.** In puncto flexus contrarii recta nulla curvam tangere potest. *ibid.*
- Nota 23.** Promotio regulæ pro inveniendis commode divisoribus æquationis propositæ. 698
- Nota 24.** Analysis & Constructio Problematis *Hugeniani*: E puncto dato rectam educere quæ datæ Parabolæ ad rectos angulos occurrat. 700



- Nota [25](#). De Osculo circuli & Parabolæ. p. 702  
 In Additamentum. Nota [26](#). Corrigitur lapsus calculi Schooteniani, qui BARTHOLINUM in errorem induxerat. *ibid.*  
 Nota [27](#). Alter BARTHOELINI lapsus corrigitur. 704  
 In Epist. [L](#). HUDDENII De reductione æquationum. Nota [28](#). De Methodo Huddeniana inveniendi maximum communem divisorem duarum quantitatum. *ibid.*  
 Nota [29](#). De valore fractionis, cujus numerator & denominator per determinationem quandam nihilo æquales fiunt. [706](#)  
 Nota [30](#). Retegitur ars, qua HUDDENIUS Regulam suam XI invenire potuerit. 709  
 Nota [31](#). Analysis Regulæ XVII Huddenianæ. 712  
 Nota [32](#). Ratio Regulæ Huddenianæ ad transformandam æquationem propositam in aliam cujus ultimus terminus pauciores habeat divisores. [713](#)  
 In Geometriæ Part. II. Nota [33](#). Cautio observanda iis Divisionibus instituendis. 714  
 Nota [34](#). Dignoscere num propositæ quantitates surdæ communicantes sint, necne. 715  
 Nota [35](#). Demonstratio Regulæ extrahendi radicem quadratam ex binomiis. 717  
 N°. [68](#). Nova & singularis Geometria promotio circa dimensionem quantitatum curvarum, per D. TSCHIRNHAUSEN. 718  
 LXXIX. Observatiuncula ad ea quæ de dimensionibus curvarum publicata sunt a D. T. 722  
 LXX. Constructio generalis omnium Curvarum transcendensium, ope simplicioris Tractoriæ & Logarithmicæ. 725  
[71](#). G. G. LEIBNITII Notatiuncula ad Num. LXVI. 728  
 LXXII. Problema Beaunianum universalius conceptum, sive Solutio æquationis nuper propositæ  $ady = y^p dx + by^q dx$ , cum aliis quibusdam annotatis. 731  
 LXXIII. Complanatio superficierum Conoidicarum & Sphaeroidicarum. [732](#)  
 LXXIV. Positionum de Seriebus infinitis Pars tertia. 745  
 LXXV. Solutio Problematum Fraternalium, una cum Propositione reciproca aliorum. 768  
 LXXVI. Solutio difficultatis cujusdam circa naturam flexus contrarii. [772](#)  
 N°. LXXVII.

- N°. LXXVII. Addenda ad constructionem Problematis *Beauniani*. p. 782
- LXXVIII. Demonstratio Synthetica Problematis de infinitis Cycloidibus, absque adminiculo infinite parvorum. Item Constructio aliorum huic affinium, a se propositorum. 785
79. *Problèmes à résoudre, par Mr. Jean BERNOULLI.* 795
- LXXX. Solutio sex Problematum Fraternalium. 796
- LXXXI. Solutio Problematis Fraternalis de Curva infinitas Logarithmicas ad angulos rectos secante. 806
82. *Lettre de Mr. BERNOULLI, Professeur de Groningue à Mr. VARIGNON, sur le Problème des Isopérimètres.* 814
- LXXXIII. Avis sur les Problèmes dont il est parlé dans la Lettre précédente. 821
84. *Réponse de Mr. BERNOULLI Professeur de Groningue à cet Avis.* 822
- LXXXV. Avis de Mr. BERNOULLI Prof. de Math. à Basse sur la réponse de son Frère. 827
86. *Réponse de Mr. BERNOULLI Prof. de Groningue à cet Avis.* 828
- LXXXVII. Extrait d'une Lettre de Mr. BERNOULLI de Basse, contenant l'examen de la solution de les Problèmes. 829
- LXXXVIII. Avis sur la Réponse du N°. 86. 839
89. *Extrait d'une Lettre de Mr. BERNOULLI Professeur de Groningue, pour servir de réponse à celle de son Frère, Professeur à Basse.* 841
- XC. Positionum de Seriebus infinitis earumque usu &c. Pars quarta. 849
- XCI. Circinus proportionum nauticus Scala Loxodromica instructus, hujusque Fabrica mire facilis. 868
- XCII. Quadratura Zonarum cycloidalium demonstrata. 871
- XCIII. Solutio propria Problematis Isoperimetrici. 874
- XCIV. Nova Methodus expedite determinandi radios osculi seu curvaturæ, in curvis quibuscumque algebraicis. 888
- XCV. Quadratura Zonarum cycloidalium promota. Problema item centri gravitatis Sectoris solidi cycloidici solutum. 892
- XCVI. Analysis magni Problematis Isoperimetrici. 895

- N°. XCVII. Section indéfinie des Arcs circulaires en telle raison qu'on voudra, avec la manière d'en déduire les Sinus, &c. [p. 921](#)
- XCVIII. Démonstration générale du Centre de Balancement ou d'Oscillation, tirée de la nature du Levier. 930
- XCIX. Extrait d'une Lettre, contenant l'application de la Règle du Centre de Balancement à toutes sortes de figures. [237](#)
- C. Démonstration du Principe de Mr. HUYGENS touchant le Centre de Balancement. Et de l'identité de ce Centre avec celui de Percussion. 947
- CI. Positionum de Seriebus infinitis, earumque usu &c. Pars quinta. 953
- CII. Véritable hypothèse de la résistance des Solides, avec la démonstration de la courbure des corps qui font ressort. 976
- CIII. VARIA POSTHUMA. 991
- Art. I. Attollere Infinitinomialium ad potestatem indefinitam. 993
- II. Regulæ pro constructionibus curvarum quarundam transcendentalium per rectificationes algebraicarum. 999
- III. Regulæ quædam de summatione differentialium. 1007
- IV. Demonstratio Anagrammatis N°. [87](#) inserti, de curva inter infinitas genere eadem, quæ gravi concedit celerrimum descensum ad datum perpendiculum. 1017
- V. Demonstratio posterioris anagrammatis ibidem inserti, de natura linearum ex infinitis curvis genere iisdem æquales arcus abscindentis. 1021
- VI. In superficie Conoidis ducere lineam omnium inter eodem terminos brevissimam. 1023
- VII. In superficie Conoidum, quæ nascuntur ex circumductu linearum rectarum, altero extremo in puncto sublimi quiescentis, super data curva, ducere lineam brevissimam inter data duo puncta. 1025
- VIII. Analysis ejusdem Problematis alia instituta methodo, non supponendo superficiem gibbam continue complanari posse. [1028](#)
- IX. Quæstio, Num Elastrum tensum, sublata subito vi tendente, eodem tempore in omnibus suis partibus in rectitudinem



dinem se restituat; an vero in aliis partibus citius, in aliis tardius? resoluta. p. 1030

Art. X. Demonstratio Theorematis de radiorum osculi usu in reducendis secundis differentiis ad primas. 1033

XI. De Curvatura fili extremitatibus suis suspensi, & ab infinitis potentiis juxta directiones quasvis agentibus extensi; ejus directione media & vi qua secundum illam impellitur. 1036

XII. Aequationem  $dy = ay^m dx + by^n x^r dx$  construere, saltem per quadraturas, hoc est, separare in illa literas indeterminatas cum suis differentialibus a se invicem. 1049

XIII. De Celeritate & Declinatione [*Dérive*] Navis. 1057  
Additio. 1060

XIV. Invenire Curvam, quam format radius lucis per aerem, qui inæqualis densitatis est, ad oculum nostrum delatus. 1063

XV. Invenire veram legem, secundum quam aeris densitas decrescit in altioribus Atmosphæræ locis, & simul determinare verum aeris atmosphærici pondus. 1067

XVI. Solutio Problematis de minimo Crepusculo. 1075

XVII. Invenire relationem inter Evolutas & Diacausticas. 1077

XVIII. Celeritates navis a quiete inchoatas usque ad maximam invenire. 1080

XIX. Inventio curvæ, cujus tangens abscindit ex axe segmentum, quod ad tangentem habeat constantem rationem. 1082

XX. Invenire curvam, cujus curvædo in singulis punctis est proportionalis longitudini arcus; id est, quæ ab appenso pondere flectitur in rectam. 1084

XXI. Demonstratio analytica constructionis mechanicarum curvarum omnium, ope Logarithmicæ & alterius curvæ algebraicæ per tractionem describendæ, quæ tradita est N°. LXX. 1086

XXII. Observatio singularis ad praxin Calculi differentialis, ejusque usus in radiis osculi inveniendis. 1088

XXIII. Inventio subtangentis & subnormalis per præcedentem methodum. 1098

XXIV. Extensio methodi præcedentis pro radiis osculi inveniendis.

- niendis ad illas quoque æquationes algebraicas in quibus occurrunt quantitates surdæ plurimembres, ut non opus sit surditatem ex æquatione tollere. pag. 1099
- Art. XXV. Invenire radios osculi in curvis per Focos descriptis. 1101
- XXVI. Inventio Centri Tensionis. 1105
- XXVII. Artificium impellendi Navem a principio motus intra ipsam Navem concluso. 1109
- XXVIII. Curvatura Conoidis in Automato, cui circumplicata catenula, rotis horologii motum æquabilem conciliat. 1115
- XXIX. Problema de curvatura fornicis, cujus partes se mutuo proprio pondere suffulciunt, sine ope cæmenti. 1119
- XXX. Lineæ datæ rigidæ, ab infinitis potentiis secundum quasvis directiones impulsæ tractæve, determinare directionem mediam, axem æquilibrii & vim impulsus. 1124
- XXXI. De inventione Sectoris cycloidici solidi, qui centrum gravitatis habeat algebraice determinabile. 1129
- XXXII. Quædam formulæ æquationum differentio-differentialium reductæ ad æquationes differentiales primi gradus, 1134

*Finis Indicis.*

No. I.

CONAMEN  
NOVI SYSTEMATIS  
COMETARUM,

Pro

Motu eorum sub calculum revocando  
& apparitionibus prædicendis,

*ADORNATUM*

*A*

JACOBO BERNOULLI, Basil.

---

*Difficulter eruntur qua tam alte jacent.*

---

Editum Primo

AMSTELÆDAMI;

Apud HENRICUM WETSTENIUM.

1682.





# V I R I S

*Magnificis , Nobilissimis , Amplissimis ,  
Consultissimis ,*

D. JOHANNI HUDDENIO,

Præpotentis Reip. Amstelædamensis Consuli &  
Senatori gravissimo , nec non Societatis Indiæ  
Orientalis Præfecto dignissimo :

D. BERNHARDO FULLENIO ,

J. U. D. & Inclytæ Reip. Franekeranæ  
Ex - Consuli meritissimo.

VIRI MAGNIFICI, AMPLISSIMI ,



EREGRINANTES non infimum  
felicitatis suæ momentum in eo  
ponunt , ut Viros ubique in  
eminentia constitutos, & quos  
singularis virtus ac eruditio ul-  
tra communem mortalium for-  
tem evexit, de facie nosse , vel limina eorum

## DEDICATIO.

etiam salutasse se olim gloriari possint. Sufficit esse in Belgio, AMPLISSIMI VIRI, ut quis immortalis Vestri nominis fama allectus, ad hunc felicitatis aspiret apicem, & ad sacra Vestra Capita, non uno nomine in pretio & veneratione habenda, humilimum sibi accessum parare, quoquo modo annitatur. Quis enim divinæ majestatis characterem, e sacratissimis Vestris muniis relucens, devoto non adorare gestiat pectore? Quis vigilantiam ac prudentiam, cujus pro salute populi tot specimina edidistis, non summe admirari cupiat? Sed quis ornamentum splendidissimum, quod divino Vestro characteri rarissimo exemplo addidistis, profundissimam rerum Mathematicarum scientiam non prorsus stupeat? Loquuntur Tuæ, AMPLISSIME HUDDENI, Literæ binæ ad *Schootenium* τῷ μαθαεῖν exaratae, & ceu pretiosissimi uniones, Geometriæ Cartesianæ insertæ: quam absolutissimam divinæ artis Analyticæ, qua sine Mathesis, & sine Mathefi omnis jejuna est Philosophia, spirant cognitionem! quot abstru-

## DEDICATIO.

abstrusissimæ veritates in parum adulta ætate ab Amplitudine Tua erutæ , in profundissimo claustro sine Huddeniana clave æternum latituræ ! Parum etiam visum fuit Amplitudini Tuæ , **MAGNIFICE FULLENI** , summum in his terris majestatis conscendisse apicem , nisi summa juxta summis adderet , & sublimi dignitatis fastigio sublime Uranoscopiæ studium jungeret ; idque tanto prosequeretur ardore , ut Gedanum quondam iter suscipere , & cum Celeberrimo **HEVELIO** de Scientiarum nobilissima conferre Amplitudinem Tuam non piguerit. Tot vero venerationis argumenta , **AMPLISSIMI VIRI** , propius adoraturus , & ad aras Vestras humillimum mihi paraturus aditum , quamvis nec densis fascibus , nec spissi voluminis hecatombe altaria mihi fument , perinde ut aliis , qui grandiorum uberum pascunt pecora , & ampliorum fœcundioris ingenii & eruditionis messem facere consueverunt ; liceat tamen e curta supellectile & sterili messe par turturum & paucas Vobis spicas adolere. Ac-

DEDICATIO:

quiescite igitur, VIRI AMPLISSIMI, le-  
vidensi hoc paucarum pagellarum sacrificio,  
quod ad pedes vestros submitse oblatum  
venio, illudque patrocínio Vestro, favore  
Authorem amplecti dignamini,

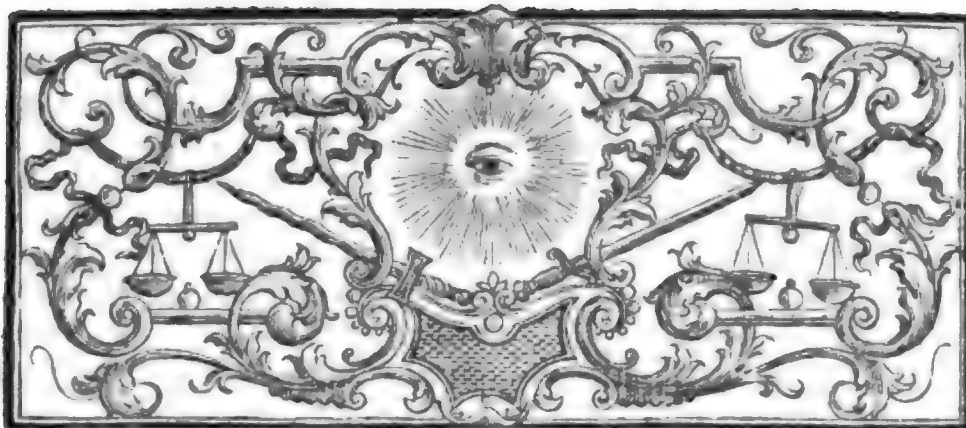
VESTRARUM AMPLI-  
TUDINUM

*Humillimum & Devotissimum  
Cultorem*

Amstelædami  
11. Augusti  
1681.

JAC. BERNOULLI.

JA-



JACOBI BERNOULLI  
 CONAMEN ADORNANDI  
 NOVI SYSTEMATIS  
 COMETARUM,

*Pro motu eorum sub calculum revocando  
 & apparitionibus prædicendis.*



UM Cometa novissimus, adhuc Orbi nostro illucens, ad sui contemplationem syderalis scientiæ Cultores invitaret, incidebam forte in Scriptum quoddam Gallicum \*, in quo Author Ephemeridem Cometæ pandere. ejusque motum pro singulis diebus sequentibus ad finem usque apparitionis prædicere tentabat, stationem quidem illius ad 6 Martii St. Nov. in base Trianguli Borealis figens. Cum vero Cometa jam  $\frac{1}{2}$  Fe-  
 Occasio scripti.

\* Explication de la Comète qui a paru sur la fin de l'année dernière & au com-

No. I. Februar. novem pene gradibus terminum illum prætergressus, tandem inter Apem & Caput Medusæ expirasset, & sic eventus calculum simul & operam Prophetæ lusisset; in causam hujus erroris inquirere cœpi, & nunquid fieri posset, ut vago Cometarum motui certæ tandem leges & cancelli præscriberentur, integraque adornaretur Theoria, cujus beneficio eorum apparitiones quodammodo calculo subjici, & non secus ac Luminarium Eclipses prædici possent. Hinc pagellas nonnullas vernacula lingua conscripsi; quæ vix sub prælo prodierant, cum ecce fata mea me in Belgium vocarent; ubi cum appulissem, monuerunt Amici, qui Tractatum perlegerant, ut eundem in gratiam eorum, quos titulus ad sectionem invitare posset, Latine redderem; simulque responsiones ad objectiones, quas contra hypothesein meam movebant, interspergerem; etiamque difficultates, quas in Celeberrimi Domini HEVELII, quem longe diversam circa hanc materiam fovere opinionem sciebam, hypothesei deprehensus essem, indicarem. Equidem Vir iste incomparabilis & quasi alter e TYCHONIS cineribus Phoenix, tam exactissimis observationibus & prolixissimo calculo, quam Opere Cometographico longe absolutissimo, tam immensum exantlavit laborem, ut post tot lucubrationes jure dubitari queat, an circa hanc materiam dici quid possit, quod non sit ab ipso dictum: facilem tamen sperabo veniam, si post tantam messem exiguum adhuc colligam spicilegium, & hypothesein meam, quamvis non in omnibus ei arrisuram, explicem.

Antequam vero Lectori Astrophilo mentem meam ea de re adaperiam, nonnulla in antecessum præmittenda de Cometarum *Ortu, Motu, Loco & Cauda.*

1. de Cometæ ortu.

I. Circa Cometarum *Ortum* vel *Originem*, somniant Peripatetici, eos conflare ex siccis & sulphureis exhalationibus, e Terra in

*commencement de celle-ci, 1681; avec une Table qui marque le jour qu'elle a commencé à paroître, & le jour qu'elle finira, la somme de ses mouvemens, sa longitude, & sa latitude, &c. par D. Anthelme, Chartreux. A Dijon 1681.*

in supremam aeris regionem a Sole attractis, ibidemque accen- No. 1.  
 sis. Brevitas, cui studemus, non permittit, ut omnes absurdi- Sententia  
 tates, quibus hæc sententia implicatur, tangamus; Id tantum no- Aristote-  
 tet benignus Lector: Si Cometæ propria gaudent potius luce, lis.  
 quam illam a Sole acceptam reflectunt, ut juxta hypothesin suam  
 fateri coguntur isti Philosophi; tum non potest dari ratio physica,  
 quare hoc lumen non se in omnia promiscue latera diffundat,  
 sed perpetuo in plagam Soli directe oppositam vergat, nisi  
 ridicule inter utrumque arcana quædam collusio & Sympathia fingatur.  
 Quemadmodum autem Systema Ptolemaicum, inter alia, etiam  
 propterea suspectum est, quod in illo non possit dari ratio  
 physica, cur Sol & centrum epicyclorum Mercurii & Veneris  
 cum Terra in eadem perpetuo linea recta inveniantur; ita meo  
 judicio ex hoc solo sufficiens argumentum petitur, mittendi  
 nuncium sententiæ Aristotelicorum, quod in assignanda causa  
 directionis caudæ Cometæ aqua ipsis hæreat. Nolo jam  
 investigare, an Terrarum orbis, etiamsi totus in fumum abiret  
 ex mente adversariorum, suffecturus esset tam immani caudæ  
 producendæ.

Sagacissimus alias naturæ scrutator, \* Dn. CARTESIUS *Cartesii.*  
 satis monstrosam etiam hic opinionem fovet. Juxta illum, maculæ  
 plurimæ densiores sidus aliquod, instar crustæ vel corticis,  
 undiquaque involventes impediunt, ne sidus globulos secundi  
 elementi circa se existentes, amplius tanta vi a se repellere,  
 aut Vorticem suum tanta rapiditate circumagere possit, quanta  
 opus est ad resistendum violento motui & gyrationi vicinorum  
 Vorticum; hinc fit ut sensim ab illis absorbeatur & qua-

B

fi

\* Nobiliss. CARTESIUS, judicio præstantissimorum Virorum, cum primis  
 autem judicio Reuer. & Clariss. Dn. Joh. Jac. HORMANNI, Prof. Græc. Ling.  
 in Academia patria celeberrimi, in Lexico ejus universali, sub tit. REAVERUS  
 fuit Philosophus hujus seculi celeberrimus, qui in Philosophia & Mathematicis  
 stupendos facit progressus, objectionibus omnibus contra meditationes suas  
 allatis erudite & solide satisfecit, & per epistolas undique lacessitus velut Oraculum  
 quoddam responsa dedit: uno verbo Vir fuit incomparabilis. Post tot  
 luculenta testimonia, eant nunc agonisantis Stagiritæ mancipia, quos vel  
 Domini titulus Viro incomparabili præfixus male habet.



No. I. si depascatur, donec tandem destructo toto Vortice ipsum fides in peregrinum talem Vorticem abripiatur, ibique nunc in Planetam, nunc in Cometam abeat. Vid. *Princ. Philos. part. 3. §. 115.* Equidem quod in unoquoque horum Vorticum plurimæ mutationes & alterationes contingant, facile damus CARTESIO, ipsum vero Vorticem tam immensum, Omnipotentis Dei opus, posse funditus destrui & dissipari, est quod omnem fidem superat. Sapientissimus mundi Opifex incolas in pulverem redigere, non ipsum domicilium subvertere in more positum habet, teste Terra, quæ *firmiter fundata est super bases suas, ut maneat in seculum seculi. Psal. 104. 5.* quamvis ejus incolæ, Plantæ & Animantia quævis quotidie intereant & nova reproducantur. Quod si exigua hæc Terræ, quasi pilula, tam solido & inconcussio nixa fundamento est, quanto firmiori talo stabit tam vastum, & Terram hanc nostram infinitis pene parasangis exuperans ædificium. Imo si insolens illa sententia locum haberet, metuendum ne & Vortex noster, quo Sol, Luna, Terra ipsa, totumque Planetarum systema clauditur, idem suo tempore subiret fatum; inprimis quia Astronomi, telescopiorum ope, multas sæpe densissimas in Sole detexerunt maculas, quæ nonnunquam totum Solis discum per integros annos obscurasse leguntur. Sed de inaudita hac & periculosa metamorphosi, qua Sol noster in Cometam transformaretur, nobisque Fixa alia Solis vicem obiret, satius est ut taceam, ne multis ad vertiginem prorsus terror forte panicus incutiat.

Id vero cumprimis totam Cometarum doctrinam Cartesianam mihi suspectam reddit, quod qua ratione ea cum rei veritate & cum mente ipsius Philosophi conciliari possit, perspicere omnino nequeo. Agnoscit enim ille, Solem, Terram, Lunam, cæterasque Stellaras non eo modo, quem explicat, successive generata, sed initio cum omni sua perfectione creata fuisse, ac in Terra, ex gr. non tantum fuisse semina Plantarum, sed ipsas Plantas; &c. ad naturam tamen eorum omnium melius explicandam sibi principia quadam fuisse excogitanda scribit, ex quibus, tanquam

ex

ex seminibus quibusdam, & Sydera, & Terra, & omnia quæ No. I.  
in hoc mundo aspeſtabili continentur, ſecundum ordinarium naturæ curſum oriri potuiſſe demonſtraret, quamvis ipſa nunquam ſic orta eſſe probe ſciat. Vid. *Princ. Phil. part. 3. §. 45*. Unde reſponſum; ſi nunquam ſic orta ſint, quare ſoli Cometæ excipiendi, qui revera naſcantur, quoties in conſpectum nobis veniunt? quare non ab initio omnes perfecti creati fuerint, ut Planetæ, quibus tamen & Cometis eundem generationis modum, qui fit per deſtructionem Vorticum, aſſingit? aut ſi adhuc hodie generentur Cometæ; quæro, cur tot Vorticibus a noſtro Vortice jam conſumptis, & tot ſyderibus ab illo abreptis, omnia hæc ſydera perpetuo in Cometæ abierint, & nullum omnino in Planetam? quare item Planetæ perpetuo in noſtro Vortice rotentur, nec Cometarum inſtar ex uno Vortice in alium migrent, ſiquidem utrique eadem incunabula habeant?

Probabiliſſimum itaque eſt, & forſan ab ipſius CARTESII mente non alienum, Deum jam in initio creationis, juxta alia & ſæpius opera, etiam Cometæ produxiſſe, iſſque non ſecus ac reliquis Stellis & Planetis motum perpetuum indidiſſe, certosque aſſignaſſe limites, quos non tranſgrederentur ad finem uſque ſæculi. Ut omnis vero vitetur æquivocatio, qua ludi in hac materia frequentiſſimum eſt; probe notandum, me, dum Cometæ inter creationis opera refero, intelligere ſolum Cometæ corpus aut caput, nequaquam vero caudam; utpote quam diverſiſſimæ exiſtimo eſſe eſſentiæ, & capiti Cometæ ex accidenti ſolum advenire, ut ex infra dicendis patebit; id quod in editione germanica monitum quoque oportuiſſet, ne multis mentem meam ſiniſtre explicandi & cavillandi anſa data fuiſſet.

II. *Motum* porro Cometarum quod ſpectat, ſiquidem perpetuus ſupponitur, rectus eſſe nequit; quia alias ex uno mundi Vortice in alium ſe ſubducere, tandemque limites totius mundi ſuperare, & in ſpatia imaginaria exſpatiari neceſſum haberent; quod quam a ſana ratione abſonum ſit, quivis judicat. Neceſſarium itaque eſt, ut motu ſuo Cometæ deſcribant lineam in ſe redeuntem, Ellipticam puta, vel Circularem; utpote corporibus

1. De Motu.

Eſt circuli.

No. I. bus æternis quam maxime convenientem.

3. De III. *Locus & Sedes* Cometarum, quod sublunaris esse ne-  
Loco. queat, infallibilibus & demonstrativis argumentis evincitur; 1°.

Non est ex Parallaxibus, quæ omnium Astronomorum unanimi con-  
sub Luna. sensu, ex quo TYCHO in illas primus inquisivit, longe exi-  
liores deprehenduntur in Cometis, quam in Luna; unde illo-  
rum multo major, quam hujus distantia concluditur. 2°. sub-  
lunares si forent; tum in oppositione Solis, cono umbræ Ter-  
ræ satis profunde immergerentur, & sic notabilem paterentur  
eclipsin, privati nimirum tum mutuatitio, quo solo gaudent,  
lumine: Testatur vero experientia, Cometas in oppositione  
Solis non eclipsari, sed undiquaque crispum in speciem rosæ  
de se lumen spargere. 3°. Circa conjunctionem cum Sole,  
cauda Cometæ nobis appareret brevissima; quoniam enim  
perpetuo in partem a Sole averfam tendit, hinc in dicto ca-  
su propemodum directe in oculum nostrum collimatura esset,  
& sic pene nullum aut acutissimum effectura visionis angulum;  
quod novissimæ etiam experientiæ refragatur, ubi cauda post  
conjunctionem Solis & Cometæ apparuit longissima. 4°. Cæte-  
rum, si Cometæ sub Luna hæreant, non immerito quærimus,  
quid iis motum tam constantem, tam diuturnum, tam regula-  
rem, & in ipsa inæqualitate regularissimum imprimat atque  
conservet; cum probabile sit, vago potius motu ferri, quæ-  
cunque sub Luna metecora generantur; motum vero regularem  
& æquabilem, qualis Cometarum est, non nisi corporibus cæ-  
lestibus & æternis deberi. Quamvis vero etiam porro causa  
regularitatis motus in sublunaribus Cometis assignaretur; ille ta-  
men motus in se regularissimus, ex tam propinqua distantia  
nobis non posset non apparere inæqualissimus; sic ut intra pau-  
cas horas Cometæ nobis fierent directi, stationarii, retrogra-  
di, aliasque enormes aspectus diversitates causarentur, quas fu-  
se persequitur Cl. Dn. HEVELIUS, *Lib. 3. Cometogr. p. 140.* Si  
quis forte vero Cometa aliquando Lunam eclipsare conspectus est,  
quam apparuisse An. 1450. testatur GEORG. PHRANZA, *lib. V.  
sue Histor. cap. 21.* (cujus tamen phænomeni fides sit penes au-  
thor.

thorem) respondemus, hos Pseudo-cometas non magis esse No. I.  
Cometas, quam Stella cadens sit vera Stella; de talibus spurii  
Cometis potest iterum consuli Cl. HEVELIUS, *Lib. 7. p. 387.*  
ubi perperam inquit Cometas vocari, cum sint tantum chas-  
mata & meteora ex impurioribus & crassioribus solum exhala-  
tionibus compacta, qualia in singulorum Planetarum Atmosphæ-  
ris quotidie gignantur.

Sed nec intra Planetarum Systema sedes Cometarum stabiliri Nec in-  
tra Pla-  
netarum  
Systema.  
potest; portio enim circuli, quam describunt, dum nobis  
sunt conspicui, tam exiguae convexitatis est, ipseque proin cir-  
culus tam vastæ capacitatis, ut totum illud spatium Terram,  
vel potius Solem inter & Saturnum, nimis angustum sit ad re-  
cipiendam intra se Cometarum orbitam; quo fieret, ut Cometæ  
omnes successive Planetarum orbes secarent & trajicerent, imo  
ipsis nonnunquam Planetarum corporibus illiderentur: quorum  
vero prius cum Vorticis rotatione, posterius cum sana ratione  
difficiliter conciliabitur.

Unde concludimus, nullibi Cometas, quam supra Saturnum Sed su-  
pra Sa-  
turnum.  
aptius locari posse, qua in re etiam Dn. CARTESIO calculum  
lubens addo. Quod vero sufficiens, imo immensum, interce-  
dat spatium Saturnum inter & Fixas, sic facile demonstro: Cla-  
rissimus Dominus HOOKIUS, celebris ille Astronomus Anglus,  
Parallaxin orbis magni in Fixa tertii honoris ad summum 30 se-  
cundorum deprehendit; unde sequitur ejus a Terra distantiam Immen-  
sum spa-  
rium Sa-  
turnum  
inter &  
Fixas.  
minimum continere 13751 semidiametris orbis magni. Quod si  
jam Fixa primæ magnitudinis (quam nobis omnium proximam,  
tantoque propiorem, quanto major e Terra conspicitur, suppo-  
nimus) ad Fixam tertii honoris in apparente diametro se habeat,  
ut 8 ad 3; in se vero utraque sit æqualis circiter magnitudinis;  
tunc sequitur, illius a Sole distantiam ad distantiam hujus fore in  
ratione reciproca, ut 3 ad 8, adeoque & proximam Fixarum a  
nobis adhuc distare 5156 semid. orbis magni. Et siquidem Sa-  
turnus vix decem talium semidiametrorum spatio a nobis absit,  
relinquitur, ut Saturnum inter & proximam Fixam spatium com-  
prehendatur plusquam 5146 semid. orbis magni.

B 3

Cum

No. I.  
Spatium  
hoc par-  
tem con-  
stituit Vor-  
ticis sola-  
ris.

Cum vero dubitari possit, an immensum hoc spatium partem constituat Vorticis nostri Solaris, an vero Vorticis alterius alicujus Fixæ; idcirco id porro calculo investigandum est. Equidem cum Sol probabiliter Fixa non sit minor, oportet, ut juxta placita *CARTESII*, Vortex Solaris quoque non sit angustior Vortice alicujus Fixæ; atqui vero si Vortex Solaris mutilatur illo spatio, tum 39304 vicibus angustior erit Vortice Fixæ; quod sic probatum damus. Parallaxis Fixæ primi honoris, juxta ipsius *HOOKII* observationem, 1 min. 20 secund. excedere nequit; quod si ergo Orbis magnus, qui hanc gignit parallaxin, in locum hujus Fixæ attolleretur, ejus visibilis diameter quoque angulum 1 min. 20 sec. sive 80 sec. & proin diameter orbis Saturni, non nisi angulum 13 min. 20 sec. sive 800 sec. in oculo nostro subtenderet; utpote vix decies major diametro orbis magni. Sumamus porro binas Stellas primi honoris, quas inter nullæ deprehenduntur aliæ, quarumque adeo Vortices immediate sese contingere subsumuntur, cujusmodi sunt Capella & Lucida in humero dextro Aurigæ. Earum distantia in circulo maximo est  $7\frac{1}{2}$  graduum, quo spatio æqualiter in utramque Fixam distributo, Vortex utriusque radium acquirit 3 gr. 45 min. diametrum vero etiam 7 gr. 30 min. id est, 450 min. aut 27000 sec. Hinc diameter Vorticis Fixæ propemodum excessura esset diametrum Vorticis Solaris tricies quater, cujus numerus est 39304; Unde soliditas illius Vorticis superaret soliditatem hujus 39304 vicibus, quia globi sunt in triplicata ratione suorum dimetientium. Cum ergo immanis hic excessus nullatenus rationi consonus sit, bene tandem concludimus, spatium illud Saturnum inter & Fixas non nisi Vorticis Solaris partem componere posse.

Videtur quidem, spatium hoc ad minimum æqualiter distribuendum esse inter Vorticem Solis & Vorticem Fixæ, nec totum Fixæ adimendum, ut totum Soli tribuatur: sed velim consideres, illud propter geminam rationem in calculo haud dubie longe provenisse angustius, quam reapse est, 1°. Quia cum *Dn. HOOKIO* parallaxin orbis magui in Fixis nimis forte magnam

gnam assumimus; cum tamen, valde incertum, an tanta quoque reperiatur; imo nullus Astronomorum hactenus ullamprehenderit. 2°. Quoniam Fixam primæ magnitudinis æqualem supposuimus Fixæ tertiæ magnitudinis, causam majoris diametri apparentis unice rejicientes in propiorem distantiam; cum incertissimum sit, an hæc unica diversitatis aspectus causa sit, & nunquid potius etiam realis inæqualitas in Fixis reperiatur, qua fieri possit, ut Fixæ primi honoris quantumvis remotiores, tanta magnitudine conspiciantur.

Unde probabiliter colligimus, longe majus spatium Saturnum inter & Fixas intercedere, quam assignavimus; sic ut non omne demamus Vortici Fixæ primæ magnitudinis, etsi id omne, quod assignavimus, Vortici Solis tribuamus. Sed quicquid tandem sit, totum illud, quod Soli forte nimium tribuimus, nullum omnino sensibilem in calculum errorem postea inducere capax est.

Ratum igitur esto, Vorticis Solaris longe maximam adhuc partem restare supra Saturnum. Cum autem valde absonum sit, sapientissimum Numen omnes Planetas in Vortice Solari prope centrum adeo arcte constipare voluisse, & tam immensum ultra Saturnum in eodem Vortice spatium incolis vacuum reliquisse; hinc omnino colligo, probabilissimum esse, spatium hoc Cometis cecisse in domicilium.

Nec me moratur, quæ forte in Cometis observari posset, Parallaxis; per eam quidem demonstrative evincitur, eos non esse sub Luna; quanto vero adhuc intervallo ab illa sursum versus distent, determinari prorsus nequit, Parallaxi jam in Sole propemodum evanescente: In Parallaxi enim tam exili, negotium adeo lubricum est, ut nihil omnino certi inde hauriri possit; nec proinde quicquam obstat, quo minus Cometarum distantiam in infinitum augere nobis integrum sit. Hanc parallaxici negotii incertitudinem facile agnovit TYCHO, hinc *Lib. 1. Progymn. de nova stella 1572. p. 518.* Non omnia, inquit, qua speculative circa hæc rite se habent, propterea in praxim citra aberrationis suspicionem applicantur; præsertim si ex minimis

No. I.

In domicilium  
cessit Cometis.Nec obstat ulla  
Parallaxis.



No. I. *mis magna struas ; operam ut plurimum ludunt.*

Cæterum circa observationes Cl. HEVELII, qui Parallaxes Cometarum plerumque minores quam in Luna, & majores quam in Saturno ponit, animadverto; Viro Celeberrimo non tam propositum fuisse, ut contra CARTESIUM demonstraret, Cometas non esse supra Saturnum, quam contra ARISTOTELEM, eos non esse sublunares; id quod frequentes contra hunc invektivæ testantur, *Quo sandem Peripatetici respiscant, Ut iis larva detrahasur, &c. Lib. 3. p. 138, 148. &c.* Idem quoque animadvertit CARTESIUS in assignatis a TYCHONE, aliisque, parallaxibus; existimat enim, cum disputarent contra Veteres, qui Cometas inter meteora sublunaria numerabant, illos contentos fuisse ostendere Cometas esse in cœlo; nec ausos fuisse omnem, quam calculo deprehendebant, altitudinem iis tribuere, ne minus facile crederetur. Vid. *Princ. Philos. p. 3. §. 41.*

Ne tamen frigidiusculo hoc subterfugio eludere velle videar vere herculeam, quam Clarissimus HEVELIUS navavit in Parallaxium observationibus & calculo, operam; oportet illa accuratius examinare.

Existimat Cl. HOOKIUS in *Conamine suo motum Telluris probandi*, aciem nudi oculi quantumvis acutissimi non posse quantitatem minuto primo minorem discernere, unde concludit, etiamsi Heveliana instrumenta multoties majora fuissent, ita ut singula minuta secunda, imo tertia, distincte receperint; quia tamen non nisi nudo oculo observationes institutæ, hinc non potuisse præcisius quam in minutis primis haberi: quod tamen in tam subtili Parallaxium negotio nequaquam sufficit. Quemadmodum igitur alibi Dn. HEVELIUS observationum Tychoniarum, quod ligneis duntaxat instrumentis peractæ, certitudinem extenuat; pari ratione & Tychonicas & Hevelianas, hac unica assertionem, quod nudo oculo institutæ fuerint, cum Dn. HOOKIO explodere liceret.

Sed demus, etiam accuratissime ad quina vel terna minuta secunda observationes institui potuisse; per tot tamen ambages & anfractus in calculo incedendum, antequam deveniatur ad unicam



eam Parallaxin, ut quamvis error in singulis observationibus sit No. I.  
 insensibilis, in connexionem tamen & combinationem tot causarum  
 supra modum fecundus evadat. Ut memorem saltem, quam  
 difficile sit, Gedani, sub sphaera satis obliqua, vel solum tem-  
 pus observationis genuinum ex reperta altitudine & azimutho Fi-  
 xae alicujus venari. Norunt enim, qui vel a primo limine As-  
 tronomiam salutarunt, quod quo obliquior sphaera est, eo quo-  
 que obliquius paralleli æquatoris & circuli almucantarath sese se-  
 cant, & punctum intersectionis, a quo solo temporis exacta de-  
 terminatio pender, eo minus quoque præcise haberi potest. Sed  
 si porro ad Refractionem attendamus, jam totum negotium pa-  
 rallacticum de novo desperatum corrumpit; eo quod refractiones,  
 cum a physicis & mutabilibus dependeant causis, sub calculum  
 & certas regulas revocari omnino nequeant. Exhibet quidem  
 Vir Cl. *Lib. 4. p. 357.* Tabellam Refractionum Cometarum;  
 sed quam ipse non ex certo fundamento, verum pro arbitrio  
 suo adornavit, tribuendo Cometis refractiones paulo minores  
 quam Lunæ, & paulo majores quam Fixis; cujus rei hanc al-  
 legat causam, quod Cometæ plerique in Planetarum regione,  
 id est, supra Lunam & infra Fixas ferantur; ubi manifestum  
 committit circulum, dum supponit tanquam indubitatum, Co-  
 metas versari in Planetarum regione; quod demum, subducta  
 refractione, & cognita Parallaxi, determinandum fuisset.

Negotium parallacticum in praxi incertissimum esse, certis-  
 simo nobis porro argumento est, quod etiam accuratissimi Ob-  
 servatores, TYCHO nempe & ipse HEVELIUS, in assignan-  
 dis distantis Planetarum, quos tamen non rarissime, uti Come-  
 tas, sed quotidie fere, observare contingit, immane quantum  
 adhuc a seipsis dissident; dum TYCHO Solis ex. gr. paralla-  
 xin 2 min. 53 sec. Cl. HEVELIUS autem non nisi 39 sec.  
 17 tert. reperiit, & sic in cæteris; unde HEVELIUS plerum-  
 que quinquies majorem distantiam cuique Planetæ tribuere cogi-  
 tur, quam fecit TYCHO. Quare ubi Astronomi aliquot minu-  
 torum in Cometis Parallaxin observasse sibi nonnunquam viden-  
 tur; eam omnem differentiam existimo potius inevitabili errori,

*Jac. Bernouilli Opera.*

C

in

No. I. in calculo ex insensibilibus minutiis insuper habitis semper obori-  
 rienti, adscribendam esse.

<sup>4</sup> De  
 Cauda. IV. Restat, ut de Cometarum *Cauda* aliquid adjiciamus. Eam  
 perpetuo in plagam Soli oppositam vergere, *Petrus APPIANUS*  
 primus deprehendit in Cometa anni 1531, uti liquet ex ejus  
*Mathematico Casareo*; post quem idem observarunt *Hieron. FRAGASTORIUS*,  
*GEMMA & Cornelius FRISIUS*, Astronomi-  
 que ad unum omnes in singulis ab illo tempore Cometis; quo  
 ipso, ceu individua proprietate, Cometæ nullo proprio se lu-  
 cere lumine, sed omne Solis radiis acceptum ferre, manifesto  
 utique argumento produnt. Quam caudæ dependentiam & affi-  
 nitatem cum Sole etiam prædicti Authores agnoverunt. Quam-  
 vis enim cauda non subinde adeo accurate diametralem opposi-  
 tionem observet, quin ab illa nonnunquam tres & amplius gra-  
 dus boream versus deflectat; ea tamen declinatio ex sententia  
 Authoris Gallici initio nominati, per refractionem in Atmo-  
 sphaera nostra versus utrumque polum densiore quam sub æqua-  
 tore, commode satis excusari potest.

Difficultas tantum in eo restat, ut explicetur, quare cauda  
 perpetuo in Solis opposito conspiciatur, & qua ratione lumen  
 solare illi communicetur? cujus rei causam redditurus Author  
 modo dictus, corpus aut caput Cometæ sibi fingit diaphanum,  
 globi vitrei instar, subscribens in hoc sententiæ *APPIANI*,  
*CARDANI*, ipsiusque *TYCHONIS*; alii vero simili ratione  
 illud hiatus & foraminibus patere sunt persuasi, per quæ tran-  
 seuntes radii solares in æthere post Cometam in formam caudæ  
 sese pingant. Sed absurde & ridicule. Nam 1<sup>o</sup>. si per globum  
 vitreum negotium expediendum sit; tum crines cometici, diop-  
 trica id demonstrante, semper in conum acuminatum coibunt,  
 atque exinde non nisi caudis cuspidatis lucerent; quod tamen  
 experientiæ Cometæ nuperi repugnat, qui coma calathœide ful-  
 sit. 2<sup>o</sup>. In purissima & pellucidissima aura ætherca, radii sola-  
 res liberum inveniunt transitum, nec proinde in illa conspici  
 possunt, quemadmodum in corpore opaco, a quo sustuntur,  
 inque oculum nostrum reperiuntur, Id quotidie testatur lu-  
 men

men per foramen vel lentem vitream in conclave incidens, id No. I.  
enim non pingitur in pellucido aëre, quem permeat, sed in  
adverso duntaxat pariete vel pavimento. Verum quidem est,  
pulvisculos per aerem volitantes, & radiis solaribus percussos,  
debile quoddam lumen in oculos nostros reflectere; an vero in  
purissimo & defæcatissimo æthere tales dentur, quales in aere  
nostro, pulvisculi; & si darentur, an hæ minutissimæ atomi e  
tanta distantia tam insignem in terram splendorem vibrare que-  
ant, valde dubito; & si possent, quæ quæso ratio foret, cur  
coma præcise tantum a parte Cometæ averſa, nec ab omni ejus  
latere continenter spargeretur; imo quare non singulis noctibus  
totus aer Cometæ in modum colluceret, siquidem perpetuo to-  
tus, excepto solo, qui cono umbræ Planetarum involutus est,  
a Sole illuminetur. Si vero sæpe dictus Author Gallicus rege-  
rat, spissiores esse materiam, quæ radios solares excipiat; ejus  
sane est explicare, quid illa sit; necdum soluta foret quæstio,  
quare hæc materia subinde averſam a Sole plagam peteret.

Quibus argumentis sequens omni exceptione majus adjungo:  
Posito, Cometas Sole (imo forte Saturno) altiores, uti supra  
laudatus Author mecum concedit; tum si cauda generatur ex ra-  
diis Solis per foramina vel pellucidam nuclei materiam transcun-  
tibus, necessario sequitur illam fore brevissimam circa tempus  
conjunctionis cum Sole, longissimam autem in quadraturis; cui  
tamen hodierna experientia e diametro repugnat. Id sibi quis-  
que facile persuadebit, considerans, caudam, in conjunctione,  
radio visivo parallelam excurrere debere: quod ex schemate,  
Terra existente in *b*, Sole in *a*, & Cometa in *c*, liquido patet. *Tab. I.*  
In quadraturis autem, cauda quidem situm parumper acquireret *Fig. I.*  
transversum, nec tamen angulum 5 gradibus 42 min. majorem  
in oculo subtendere posset, etiamsi reapse in infinitam excur-  
reret longitudinem; quod ut calculo experiamur, Sole existen-  
te in *a*, Terra in *d*, & Cometa prope Saturnum in *c*, ita col-  
ligendum est: ut Radius orbis magni *a d*, ad distantiam Sa-  
turni a Sole *a c*, (i. e. ut 1 ad 10) sic sinus totus *a d* (100000)  
ad rectam *a c* (1000000), Tangentem anguli *c d a*, 84 gr.  
C 2 18 min.

No. I. 18 min. cujus complementum ad quadrantem est ang.  $c d e$ ,  $\frac{1}{2}$  gr. 43 min. atque ita cauda Cometæ infinitæ longitudinis vix angulum  $\frac{1}{2}$  gr. 43 min. in oculo efficeret.

Quæ sit CARTESII de cauda Cometarum mens, & quo pacto rem per pressionem inæqualium globulorum explicet, hauriri potest ex ejus *Principiis*, Part. 3. §. 133. &c.

Caterum, quia Barba vel Cauda Cometarum physicæ duntaxat considerationis, & ad motum Cometarum, quem solum nobis enucleandum proposuimus, parum facit; hinc non mihi vitio verti posset, si ea de re omnino tacerem. Ne tamen & hac in parte Lectori benevolo decesse videar, infra mentem meam de illa explicabo.

Systema  
Authoris.

Itaque ut tandem aliquando ad rem ipsam descendam; juxta allatas hypotheses, tale mihi mundi systema formo. Ante omnia cum Excell. CARTESIO suppono, sapientissimum mundi Opificem materiam totius universi in plurimos divisisse Vortices, inque centro cujusque Vorticis Fixam posuisse, quam circa totus Vortex, non secus ac circa axem rota, ab occasu in ortum gyretur. Fixam Vorticis nostri appellamus Solem; Ipse vero Vortex, quem inde *Vorticem primarium* vel *Solarem* nuncupare lubet, in plures orbes ceu totidem concamerationes subdivisus, Planetis in domicilium cessit: Infima quidem & Soli proxima concameratio Mercurium excepit, altera Venerem, tertia Tellurem, Martem quarta, Jovem quinta, sexta Saturnum, extima denique & suprema Cometas. Isti vero Planetæ omnes in eo conveniunt, quod non sint corpora diaphana vel pellucida, sed solida, opaca & radiis solaribus impervia; dein, quod non propria luce fulgeant, sed illam omnem a Sole ceu Fixa sua mutuentur: In schemate adjecto littera  $a$  Solem exhibet:  $b d$ , Orbem magnum seu annuam orbitam Terræ:  $m n$ , orbitam Saturni:  $f g$ , partem orbitæ cometæ.

Tab. I.  
Fig. I.

In hac ultima orbita punctum assumo  $f$ , super quo plures describo peripherias concentricas, ut  $h r$ ,  $x l$ ,  $o p$ , &c. & unicuique illarum peculiarem Cometam infero, quapropter totam periphe-

ripheriarum compagem *Cometarum Vorticem* nuncupabimus. Unde No. I. liquet, duplici Cometæ moveri motu, partimque rotari in proprio Vortice circa punctum  $f$ , partim, una cum  $f$ , a Vortice solari abripi circa Solem  $a$ , plane ut Jovis Satellites, non modo in epicyclo circa Jovem, sed & totus epicyclus, una cum Jove & Satellitibus, a Vortice solari, tanquam a deferente suo, circa Solem ipsum abripiuntur. Itaque Cometæ nil aliud sunt, quam Planetæ secundarii puncti  $f$ , quod punctum haud dubie ab alio Planeta primario occupatur, qui vero tum ob corporis exiguitatem, tum ob immensam distantiam, conspectum nostrum perpetuo fugit; quæ causa quoque est, quare Cometæ tum demum videri incipiant, cum ad perigæum se demittunt, nobisque proximi evadunt.

Quod vero punctum  $f$ , seu centrum Vorticis Cometici; mobile quoque sit circa Solem  $a$ , in dubium amplius revocari nequit, postquam probatum fuit, spatium quod occupat, constituere partem Vorticis solaris, & consequenter cum toto reliquo Vortice ab occasu in ortum abripi: quod si enim immotum persisteret, Fixa potius esset quam Planeta, nec pars foret Vorticis solaris, sed peculiarem constitueret Vorticem. Porro si punctum  $f$  quiesceret immotum, sequeretur necessario, nullum Cometam motu suo sex integra signa absoluturum: Concipe enim portionem circuli  $r h$ , quam Cometa ab una statione ad alteram describit, tam parum habere convexitatis, ut lineæ rectæ quam simillima sit: imo ipsam rectam concipe utrinque infinite extensam; tum quidem angulus  $r b h$  vel  $r i h$  (qui ab utroque ejus termino in oculum nostrum incurrit) duobus rectis seu 180 gradibus magis magisque appropinquat, nunquam vero eos omnino attingit, eo quod tangentes anguli recti oportet utrinque in infinitum excurrant.

Et hæc ratio est, quare sæpe laudatus Author Gallicus sibi persuadeat, Cometam nunquam sex integra signa emetiri posse; quoniam haud dubie centrum Vorticis Cometici immobile concepit; unde quoque factum, ut stationem Cometæ nuperi perigæo suo nimis propinquam, nempe in basi Trianguli bo-

No. I. realis fixerit, quem tamen terminum novem gradibus ortum versus fuit prætergressus. Verum enim vero si punctum  $f$  mobile faciam, causam erroris ei pulcre monstrabo: Pone enim, dum Cometa in orbita sua arcum  $ch$  percurrit, punctum  $f$  interea in  $g$  usque prorepere, manifestum erit, motum Cometæ proprium in orbita  $ch$ , per motum puncti  $f$ , additamentum nancisci, quo fit, ut prior motus quoad visum nostrum tantumdem acceleretur, quantum prorepserit punctum  $f$ , oculusque noster in  $i$  constitutus stationem Cometæ non amplius in  $h$  (uti alias fieret, si punctum  $f$  omni motu foret destitutum) sed ulterius & in  $g$  deprehendat.

Enimvero, si porro consideremus, orbitarum cometicarum  $hr$ ,  $xl$ ,  $op$ , &c. nonnullas, centro  $f$  propiores & minores, nonnullas ab illo remotiores & majores esse; nonnullas velocius, alias tardius incedere debere; hinc rationem perspiciemus, cur nonnulli Cometæ majorem cœli arcum, alii minorem describant, & cur alii aliis in motu suo plus insumant temporis. Si perpendamus quoque, non necesse esse, ut diversæ hæ orbitæ Cometicæ in eodem cum Ecliptica plano existant; sed fieri posse, ut illam ad angulos nunc minores, nunc majores, imo nonnullæ ad angulos omnino rectos decussent, non secus ac duo orbés orthogonaliter sibi impacti, quales in sphaera armillari sunt ambo coluri; jam patebit ratio, cur Cometæ alii aliis plus minusve ab Ecliptica declinent, imo nonnulli ab uno polo ad alterum recta tendere necessum habeant. Insuper quia nulla necessitas cogit, ut planum orbitæ Cometæ alicujus oculum quoque nostrum implicet; hinc manifesta deducitur ratio, cur Cometa non semper in circulo maximo incedere, aut rectam subinde lineam, sed aliquando curvam describere videatur. Denique quia non impossibile est, ut orbita unius Cometæ ab occasu in ortum, alia ab ortu in occasum rapiatur; quid mirum est, quod Cometa novissimus secundum signorum seriem, Cometa vero anni 1664 contra eandem incesserit. Quia tandem centrum Vorticis cometici probabiliter aut in plano eclipticæ aut æquatoris existit, aut certe non longe ab utroque distat; hinc ratio reddi



reddi potest, cur nullus unquam visus fuerit Cometa, qui No. I.  
non aut eclipticam, aut æquatorem, aut utrumque trajecerit.

His præmissis, antequam ulterius pergam, de formatione cau- Mens Au-  
thoris de  
Cometa-  
rum Cau-  
da.  
Tab. I.  
Fig. 2.  
dæ Cometarum, quæ mentem meam subierunt, hic intersper-  
gam: Solem *a* in medio Vorticis sui, tanquam ignem in foco  
accensum, concipio, cujus calore circumfusi Planetæ omnes af-  
sidue quasi coquuntur; unde perpetuo magna subtilissimarum  
exhalationum copia 1. 2. 3. 4. &c. undiquaque ex Planetis, ut  
& ex ipso Sole egreditur, & a motu rapidissimo Vorticis solaris  
sursum versus circumferentiam propellitur; quo cum pervene-  
runt hæc effluvia, a renitentia vicinorum Vorticum *ac*, *de*,  
*etc.* repelluntur & impediuntur, quo minus ulterius ire queant;  
hinc quia subinde nova materia affluit, paulatim condensantur,  
& Planetis supra-Saturninis *m*, *n*, (tum vero nondum existen-  
tibus Cometis) dum per summam apsidem vel aphelium *g* ro-  
tantur, & circumferentiæ Vorticis solaris proximi sunt, adhæ-  
rent; non secus ac cum super igne focario suspensa est olla  
carnibus repleta, fumus, e ligno carnibusque ascendens,  
camino, trabibus, &c. & quicquid solidi & compacti offen-  
dit, agglutinatur, unde fuligo gignitur; sic, inquam, in  
modum fuliginis exhalationes viscosæ Planetis accrescunt,  
illosque undique satis densiuscule ambiunt ac cingunt; unde  
fit, ut nuclei Cometæ extremitas seu limbus plerunque ma-  
le terminatus, & quasi diffluens aut crispus videatur, fuliginis  
instar. Tum vero in progressu, dum Planeta in suo epicyclo  
vel orbita circa centrum *f* volvitur, subinde novæ exhalatio-  
nes (verum longe tenuiores, quam quæ ipsum immediate am-  
biunt, quod ob defectum solidi fundamenti nequeant tam arcte  
constipari) ei adhærescunt, longe lateque, omni ex parte, circa  
illum sese extendentes; non quidem in modum globi, sed lati  
disci, ea lege, ut dum in circumferentia orbitæ suæ circa *f* mo-  
vetur, nihilominus perpetuo alterutra disci planities Soli obversa  
maneant, radiique solares in nucleum incidentes cum disco per-  
pendicularares angulos efforment; plane ut nubes circa Terram  
normaliter expansæ feruntur: cujus ratio peti potest ab æquali  
prese-

No. I. pressione globulorum materiæ cœlestis, qua materia hæc disciformis, ceu ad bilancem appensa, in perpetuo conservatur æquilibrium, ut neutra ex parte Solem versus magis inclinare possit, quam ex altera. Qua quidem directione ad Solem fit, ut planities disci, non nisi in perihelio  $P$ , parallela sit circumferentiæ orbitæ suæ  $RH$ ; in cæteris autem locis angulo subinde variabili, nunc minori, nunc majori eam secet, &c. Quo motu libratorio non male adumbrat motum inclinationis Telluris, quo perpetuum servat cum axe mundi parallelismum.

Cur vergat in Solis oppositum?

Posita hac disci directione ad Solem, manifesta redditur ratio, cur cauda perpetuo in plagam Soli oppositam vergat; nam quamvis totus simul a Sole illuminetur discus, non tamen nisi pars illa disci, quæ nostri, respectu, cis nucleum, & quidem in eodem nobiscum & cum Sole plano existit, radios ad oculum nostrum reflectit; reliquis ex adverso & a latere Cometæ alio percussis; ita si Sol existat in  $S$ , Terra in  $T$ , discus Cometæ autem sit  $lo$ , nucleus  $c$ ; recta  $Sc$  radius Solis nucleum normaliter feriens; manifestum est, non nisi radios in partem disci  $cl$  incidentes in partem Solis citeriorem, adeoque in Terram  $T$ , reflecti posse; dum illi, quos excipit pars disci  $co$ , alio, ultra Solem, in  $p$  reperiuntur.

Tab. I.  
Fig. 3.

Notandum interim, cum exhalationes omni ex parte nucleo adhærescere diximus; id non adeo præcise intelligendum, quasi nucleus undiquaque æquali semper exhalationum cingi copia, centrumque disci occupare debeat: potest enim fieri, ut ab altera parte, plus aut minus materiæ illi accrescat, prout ex hac vel illa plaga plus aut minus materiæ affluit: Ita quamvis cauda novissimi Cometæ 70 plus minus gr. subtenderat, non tamen sequitur, eam circum circa tot graduum spatium occupasse; fieri potuit, ut a parte opposita, vel a latere, modicum saltem materiæ, vel plane nulla adhæserit. Et hinc petitur ratio, cur non necesse sit, ut idem Cometa, visus mane ante Solis ortum, & vesperi post ejus occasum, eadem semper comæ longitudine sit conspicuus.

Tandem vero, ut ad specialem novissimi Cometæ enucleatio.

tionem descendamus, oportet duo puncta cardinalia ante omnia data sint, nimirum ejus *Perigæum*, & *Statio*.

*Perigæum* Cometæ ita reperio: Quoniam universi Cometæ a perigæo (vel potius perihelio suo) ante & retro æquali tempore æquales arcus describant necesse est; tria nobis consideranda Cometæ nostri loca, æquali ab invicem spatio remota, ea conditione, ut tantum præcise temporis a primo ad medium, quantum a medio ad ultimum, transeundo impenderit. Eorum locorum invenio unum in 10 gr. m. long. & 2 gr. lat. austral. quem locum Cometa occupavit 24 Novemb. 1680. Alterum in 0 gr. 20 min.  $\approx$  long. & 21 gr. lat. bor. in quem Cometa incidit 20 Decembr. Tertium in 28 gr. 20 min. v. long. & 20 gr. 30 min. lat. bor. quem Sol pertransiit 15 Januar. 1681. Absolvit enim Cometa utrobique spatio 16 dierum, 81½ gr. Quocirca Perigæum ejus extitisse æstimandum est loco medio, nempe 20 Decemb. in 0 gr. 20 min.  $\approx$ . Isto quidem die Cometa, non tam procera cauda ac splendida luce fulsit, quam biduo ante, 18 Decemb. cujus vero apparentiæ ratio est haud dubie, quod tum partim a Sole longius distaret, partim lumen ejus splendore crescentis Lunæ jam hebetari & infringi inciperet. Quod vero Perigæum ab Authore Gallico in locum adhuc novenis gradibus orientaliorem, nempe in 8 gr. 45 min.  $\approx$  long. rejiciatur, quo Cometa non nisi 27<sup>Dec.</sup> 1<sup>Jan.</sup> & sic biduo tardius appulit, excusari omnino nequit; quare autem id facere coactus fuerit, facile divinare licet; quippe si Perigæum mecum fixisset in 20 Dec. tum ei concedendum foret, Cometam a Perigæo ad stationem plus quam quadrantem emensum fuisse; id quod Galli hypothefibus adversatur.

Ad *Stationem* porro Cometæ quod attinet, eam deprehendi 7 Februar. S. V. medio loco inter Apem & Algol; sic ut a Perigæo ad stationem suam, spatio vid. 49 dierum, 99 gr. 51 min. in circulo maximo percurrerit.

Motus vero iste (uti ex supra dictis proclive est colligere) ex duobus vel tribus potius motibus conflatus est; scil. primo e

*Jac. Bernoulli Opera.*

D

motu

No. I.  
Cometæ  
nuperi  
confide-  
ratio.  
Perigæum  
Cometæ.

*Statio:*

Motus  
apparent  
Cometæ  
Composi-  
tus.

No. I. motu Cometæ proprio in orbe suo  $rh$ , a  $c$  in  $h$ ; dein e  
 Tab. I. motu Vorticis solaris deferentis Vorticem Cometicum ab  $f$  ver-  
 Fig. I. sus  $g$ ; tandemque e motu Telluris ab  $f$  in  $i$ . Quando igitur  
 motus proprius Cometæ in orbe  $rh$  separatim explorandus ve-  
 nit, tum additamentum, quod illi a reliquis binis motibus  
 spatio 49 dierum superaccedere potest, subducendum est a 99  
 gr. 51 min.

Ex motu Augmentum quidem, quod motui huic accedit a translatione  
 Terræ an- Telluris in orbe magno  $fb i$ , oppido exiguum est, propter  
 nuo. immensam distantiam puncti  $f$ , quod sic accipe: Terra exis-  
 tens in  $f$  Perigæum Cometæ habet in  $t$ , ipsumque Cometam in  
 Ecliptica observat tanquam in  $y$ . Interim dum Cometa arcum  
 $th$  percurrit, transfertur Terra ab  $f$  in  $i$ , emetiens spatio 49  
 dierum, arcum totidem circiter graduum, atque ita stationem  
 Cometæ animadvertit in  $h$ ; ipsum vero perigæum hoc in situ  
 haberet quidem citius quam in  $t$ , nempe in  $u$ ; in hoc tamen  
 perigæo Cometa illi appareret orientior tanquam in  $z$ . Quare  
 angulus  $zfy$  a 99 gr. 51 min. subducendus est ad habendum  
 verum Cometæ motum, quatenus e quiescente alias in  $i$  Terra  
 observaretur.

Assumpto ergo spatio, quod Saturnum inter & Fixas interjacet, 5146 semid. orbis magni, pro diametro Vorticis Cometicum; ejus semidiameter, sive distantia centri Vorticis  $f$  ab orbita Saturni, erit 2573 semid. orbis magni, ejusque proinde a Sole  $a$  remotio, 2583 & a Terra  $f$ ,  $b$ , aut  $i$ , 2584 semid. orbis magni. Quocirca in Triangulo  $ffi$ , ita colligo:

Ut distantia  $fs$ , aut  $fi$ , 2584 sem. orbis magni, ad rectam  $fi$ , subtensam anguli  $fai$ , 49 circiter graduum, nempe 82938: ita  $as$ , aut  $ai$ , 1 semid. orbis magni, ad 32, subtensam anguli  $fsi$ , aut  $zfy$ , unius tantum scil. circiter minuti. Quare Perigæum e statione Terræ  $i$  conspectum, unico duntaxat minuto orientius appareret, quam conspectum e statione  $s$ .

Calculo hoc Trigonometrico reperitur porro angulus  $tsu$ ; trium circiter graduum, ad quos absolvendos Cometa non plane integrum insumsit diem; quapropter Cometa Terræ existens

tis

tis in *i* unico die citius, quam existentis in *s*, perigæum subit. No. I.

Ut ergo inæqualitas, quæ e motu Terræ annuo propullulat, reducatur; addendus dies unus diebus 49; contra subducendum 1 minutum prim. a 99 gr. 51 min. sic restabunt 99 gr. 50 min. quem arcum Cometa 50 dierum spatio descripsisse censendus est.

Hinc vero porro subtrahendus motus puncti *f*, quod ita intelligendum: E schemate manifestum est, omnium orbitalium cometicarum perigæa, vel potius perihelia, existere debere necessario in linea recta a Sole ad commune centrum orbitalium *f* ducta: Unde concludere proclive est; si Cometæ omnes eodem tempore perigæa vel perihelia sua subirent, eodem Zodiaci loco omnes reperti, mutuam ibi inter se conjunctionem efficerent. Cum itaque ex. gr. Cometæ anni 1664 Perigæum contigerit 20 Decemb. in 20 gr. II. nuperi vero Cometæ Perigæum anno 1680, etiam 20 Decemb. in 0 gr. 20 min.  $\approx$ , perinde est ac si dicerem. Lineam Perigæi *f*, adeoque & ipsum punctum *f*, interea temporis, nimirum, sedecim annorum Julianorum, aut dierum 5844 spatio, a 20 gr. II ad 0 gr. 20 min.  $\approx$ , id est, per arcum 220 gr. 20 min. prorepisse.

E motu  
deferentis  
Vorti-  
cem Co-  
meticum.

Notandum vero, fieri bene potuisse, ut punctum *f*, intra dictum tempus, Zodiacum semel vel aliquoties integrum censemum fuerit; an vero & quoties id factum, sic indagabo: Siquidem certum sit, a 99 gr. 50 min. motu nimirum composito e motu proprio Cometæ & motu puncti *f*, tantum adhuc arcum subducendum esse, ut residuum, quod motum Cometæ proprium exhibebit, quadrantem non excedat; hoc posito, animadverto, puncto *f*, intra dictos 16 annos, non pauciores quam tres revolutiones integras tribuendas; si enim duas tantum ei largiaris, & præterea arcum supra dictum 220 gr. 20 min., id est, in universum 940 gr. 20 min., tam 50 dierum spatio, quos impendit Cometa a Perigæo ad stationem suam, punctum *f* non nisi 8 gr. 3 min. proreptasset, quibus a 99 gr. 50 min. subductis, plus quam quadrantem habebis in residuo. Si vicissim ponamus, punctum *f*, interea temporis, quater aut pluribus vicibus integrum Zo-

No. I. diacum permeasse.; tum arcus subducendus, qui 50 diebus respondet, nimis evaderet magnus, quo fieret, ut Cometarum apparitiones non tam raræ, ut sunt, verum longe frequentiores essent, ut ex infra dicendis patebit.

Ratum itaque maneat, punctum  $f$ , 16 annorum spatio, 220 gr. 20 min. & insuper integrum Zodiacum ter peragrarè; atque adeo annis 4, diebus 157, unam absolvere revolutionem; 50 vero dierum spatio, arcum 11 gr. 7 min. describere. His ergo subductis a 99 gr. 50 min., in residuo manebunt 88. gr. 43 min. pro motu Cometæ proprio in orbita sua  $ab$ , id est, pro angulo  $fih$ .

Et hoc cum principiis subtilissimi CARTESII apprime convenit; is enim demonstrat in *Princ. Phil. part. 3. §. 82.* velocitatem gyrationis Vorticis a Sole subinde languescere ad certum usque terminum, nempe orbitam usque Saturni; ultra quam iterum incrementum sumat, ut antea decreverat; sic ut nil absurdi sit, centrum Vorticis Cometarum  $f$ , intra annos 4 & dies 157, unam circa Solem revolutionem absolvere; etiamsi Saturnus nobis ducenties quinquagies octies propior, id non nisi 30 annorum spatio præstet.

Tabella  
motusPe-  
rigæi.

Quocirca super hanc hypothesin construxi, quam pag. 27. adjectam conspicias, *Tabellam motus Perigæi*; e qua motus ejus diurni quantitas pro singulis diebus patefcit. Ejus usus in eo consistit, ut dato tempore apparitionis Cometæ, prædici possit, quo loco Zodiaci tempore Perigæi sui appariturus sit; quod sic investigabitur: Sume numerum dierum ab Epocha Tabellæ, nempe a 10 Decemb. 1680, ad datum tempus elapsum; iisque in articulos dissectis, pro millenariis, centenariis, denariis & monadicis, gradus & minutias competentes e Tabula deprome, eosque in unam summam collige, indeque integrum circulum, quoties fieri poterit, abjice; residuum tibi patefaciet, quantum arcum Zodiaci linea Perigæi emensa sit, incipiendo a 0 gr. 20 min.  $\approx$  & secundum signorum seriem progrediendo.

E motu  
proprio.

Postquam itaque subducto arcu 11 gr. 7 min. (quem cen-  
trum



trum Vorticis Cometici intra 50 dies, indice Tabella, descripsit) comperio, pro Cometæ motu proprio relinqui angulum  $f i h$ , 88 gr. 43 min. inde porro ratio iniri poterit, quantum arcum dicto tempore Cometa super centro  $f$ , & in proprio suo orbe  $u h$ , descripsit. Eum in finem considero triangulum  $f h i$ , ejusque angulum datum  $f i h$ , 88 gr. 43 min. Triangulum hoc, cum sit orthogonium ad  $h$ , oportet ut angulus obliquus  $h f i$  sit dati obliqui  $h i f$  complementum, nimirum 1 gr. 17 min. Quare Cometa a Perigæo ad stationem suam super proprio centro arcum 1 gr. 17 min. descripsit; unde sic colligo: Si 1 gr. 17 min. Cometa spatio 50 dierum absolvit; quantum insumet temporis ad absolvendam integram periodum? Facit, annos 38, dies 147. *Cometam igitur hunc ipsum in Perigæo suo denuo videbimus* (Deo volente, nobisque viventibus) *anno Christi 1719, die 27 Maii, S. V. & quidem in 1 gr. 12. min.  $\pm$ . \**

No. I.  
Tab. I.  
Fig. I.

Futura  
apparitio  
Cometæ  
nostri An.  
1719.

Præterea, quia admodum probabile, imo necessarium est, ut Cometæ in propria sua orbita perpetuo æqualiter incedant (cur enim motui corporum cœlestium & æternorum, qualia supponimus esse Cometæ, sine sortica causa inæqualitatem & irregularitatem affingeremus?) ideo motus Cometæ diurnus nobis innotescet, dummodo arcum  $u h$ , 1. gr. 17 min. in 50 æquales partes dividamus (NB. in schemate arcus  $u h$ , ob spatii angustiam, in quinas duntaxat partes distributus) sic provenient pro singulis diebus 1 min. 32 sec. Unde porro in Triangulis  $\alpha i u$ ,  $\beta i u$ ,  $\gamma i u$ ,  $\delta i u$ , &c. arcus vel anguli, quos Cometa quotidie, penes  $i$ , in oculo nostro format, calculo trigonometrico eliciendi; quos quidem aliis supputandos relinquo, id solum advertens, ut pro quolibet die additamentum, e motu puncti  $f$  resultans (quod e Tabella motus perigæi depromi poterit) adjiciatur.

Non quidem mihi adeo sum Suffenus, quin circa has meas

D 3

allatas

\* Authoris prædictionem eventu confirmatam non fuisse nemo nescit. Videatur tamen Responsio ad Objecti. I. pag. 28. [Nota Editor.]

No. I. allatas hypotheses, multas adhuc & magnas difficultates ab Astronomis detectum iri persuasissimus sim; sed confido tamen, eos facilem Authori daturus veniam, si perpendant, omne, ut vulgo aiunt, principium grave esse; nec omnibus numeris absolutum Cometarum systema ita ex abrupto, & manibus, quod aiunt, illotis, sed post accuratissimas demum observationes & post longam earum seriem expectandum: Sufficiat mihi, hoc qualicunque conamine aliis majori instrumentorum apparatu instructis, & in hac arena versatioribus ansam dedisse, ut in rem ipsi inquirerent, & systema mancum adhuc & mutilum, si fieri posset, ad perfectionem deducerent. Quod si eventus prædictioni meæ suo tempore respondere deprehendatur, tum meæ hypothese tuto insisti poterit; sin minus, unicuique integrum erit addere, demere, mutare, corrigere pro lubitu. Quoniam vero magnum adhuc eousque restat temporis intervallum; optandum esset, ut aliorum Cometarum (quorum apparitiones jam dudum elapsæ, veluti Cometarum an. 1652 & 1664) motus periodici calculo subicerentur; quod fecissem ipse, si sufficientes eorum observationes ad manus habuissem.

Systema-  
tis cum  
apparen-  
tiis con-  
venientia.

Sed quicquid tandem sit de hypothese mea, certum est, plerasque inæqualitatum & irregularitatum apparentias, in Cometis deprehensas, exinde sic satis commode deduci posse. Hinc enim evidens ratio redditur;

1. Cur Cometæ nonnunquam plus 6 signis, vel semicirculo perlustrent?
2. Cur nullus detur Cometa, qui non trajiciat aut Eclipticam, aut Æquatorem, aut utrumque.
3. Cur Æquatorem aut Eclipticam tam diversis secant angulis, aliqui obliquius, alii rectius, nonnulli etiam ad angulos omnino rectos.
4. Cur nodus Eclipticæ & Orbitæ Cometicæ sit mutabilis?
5. Cur oculorum nostrorum judicio non semper lineam rectam vel arcum circuli maximi describant?
6. Quare nonnulli seriem 12 signorum observent, alii contra illam incedant,
7. Cur

7. Cur Perigæa non eodem omnes Zodiaci loco fixa habeant? No. I.

8. Quare aliqui plures, aliqui pauciores gradus motu diurno emetiantur?

9. Cur nonnulli, a primo apparitionis tempore ad stationem usque suam vel disparitionem, arcum majorem, alii minorem describant?

10. Cur cauda perpetuo in partem a Sole averfam tendat?

11. Posse fieri, quamvis rarissime fiat, ut duo, tres, pluresve Cometæ simul appareant.

12. Posse prædici, quando quisque Cometa denuo sit appariturus.

13. Et quo in loco Perigæum suum habiturus sit? &c.

Exhibentur nunc in Tabula diurnæ observationes Cometæ novissimi, quas cœlo quidem sereno mihi depromere licuit; & quamvis ob instrumentorum necessariorum defectum nudis tantum oculis & per filares extensiones factæ, satis tamen accurate observationibus sæpe laudati Authoris Gallici respondent: Non necessarium visum fuit, eas schemate depictas hic exhibere, quia tales iconismos vulgus, non secus ac lyram asinus, intueri solet; astronomiæ vero vel leviter periti, ex solis longitudinibus & latitudinibus hic annotatis, lineæ a Cometa descriptæ vestigia globo suo cœlesti ipsimet imprimere facillimo negotio possunt.

## Observationes Cometæ annorum 1680. &amp; 1681.

1680. Menf. & Dies.		Long.		Latit.		Motus diurnus.		Motus à Perigæo in fumam collectus.		
St. N.	St. V	S: o.	l.	o.	l.	o.	l.	o.	l.	
Dec. 4	Nov. 24	11. 10.	0.	2.	0.	A. 76.	40.	81.	30.	Observatio est Cl. D. D. Petri Me- gerlini.
29	Dec. 19	25. 30.	18. 40.	B.	4.	50.	4.	50.		Sub pectore Ganymedis.
30	20	0. 20.	21.	0.	B.	0.	0.	0.	0.	Cometa in perigæo, & æquato- rem transilit.
31	21	5. 20.	22. 30.	B.	4.	50.	4.	50.		
1681.										
Jan. 2	23	15. 0.	24. 30.	B.	9.	5.	13.	55.		
8	29	12. 30.	28. 0.	B.	25.	25.	39.	20.		
9	30	17. 0.	28. 5.	B.	3.	30.	42.	50.		In pectorali Pegasi.
11	Jan. 1	25. 30.	27. 50.	B.	7.	25.	50.	15.		
15	5	8. 50.	26. 0.	B.	12.	0.	62.	15.		Prope caput Andromedæ.
17	7	14. 0.	25. 30.	B.	4.	30.	66.	45.		
18	8	16. 40.	25. 0.	B.	2.	40.	69.	25.		Prope humerum ejus australem.
24	14	26. 50.	20. 25.	B.	10.	30.	79.	55.		Ex orbita sua in meridiem paululum deviat; sed binis diebus sequenti- bus boream subito repetit.
25	15	28. 20.	20. 30.	B.	1.	35.	81.	30.		
26	16	29. 40.	20. 50.	B.	1.	25.	82.	55.		
Febr. 4	25	9. 40.	17. 25.	B.	10.	0.	92.	55.		In basi trianguli borealis.
5	26	10. 20.	17. 5.	B.	1.	0.	93.	55.		
6	27	11. 0.	17. 0.	B.	0.	55.	94.	50.		
7	28	11. 35.	17. 0.	B.	0.	52.	95.	42.		
16	Febr. 6	16. 40.	15. 30.	B.	5.	15.	100.	57.		Inter apem & algol.
17	7	16. 40.	15. 30.	B.	0.	0.	100.	57.		Statio & disparitio.

Sic motus Cometæ a Perigæo ad stationem usque, in unam summam collectus, est graduum 100, min. 57. Quoniam vero Cometa ex orbita sua nonnihil deviaverat, toto suo illo motu in circulo maximo non nisi 99 gr. 51 min. absolvisse censendus est.

Maxima ejus ab Æquatore declinatio est 32 gr. Ascensio rec-  
ta

ta sectionis eorum, non saltem est 292 gr. ut habet Authoris No. I. Gallici Ephemeris, sphalmate haud dubie typographico; sed 208 gr. quanta quoque est ascensio sectionis obliqua in omni sphaera, Gallo ridicule hic distinguente ascensionem, quoniam recta & obliqua in puncto sectionis necessario quantitate coincidunt.

Angulus Orbitæ Cometicæ & Eclipticæ est 28 gr. 5 min. Coma cum maxima & splendidissima erat, spatium 70 circiter graduum in cœlo occupavit.

*Idem Cometa perigæum suum & aspectum nostrum denuo subibit anno 1719. d. 27 Marti, in 1 gr. 12 min.  $\pm$ . Sequitur*

*Tabella Motus Perigæi Cometarum, incedentis secundum signorum seriem. Epochæ seu Radix ejus fixa est  $\frac{30}{10}$  Decemb. 1680, in 0 gr. 20 min.  $\pm$ .*

Dies. I	gr. m.	Dies. I	gr. m.	Dies. I	gr. m.
1	0..13.	20	4..27.	200	44..30.
2	0..27.	30	6..40.	300	66..45.
3	0..40.	40	8..54.	400	89.. 0.
4	0..53.	50	11.. 7.	500	111..15.
5	1.. 7.	60	13..21.	600	133..30.
6	1..20.	70	15..34.	700	155..45.
7	1..33.	80	17..48.	800	178.. 0.
8	1..46.	90	20.. 1.	900	200..15.
9	2.. 0.	100	22..15.	1000	222..30.
10	2..13.				

Dies. I	gr. m.	Dies. I	gr. m.
2000	445.. 0.	20000	4450.. 8.
3000	667..31.	30000	6675..13.
4000	890.. 1.	40000	8900..17.
5000	1112..32.	50000	11125..22.
6000	1335.. 2.	60000	13350..26.
7000	1557..32.	70000	15575..30.
8000	1780.. 2.	80000	17800..35.
9000	2002..33.	90000	20025..39.
10000	2225.. 4.	100000	22250..44.

No. I.  
Solutio  
objectio-  
num.

Dux hic, contra hypothesein meam, formari solent objectiones, quibus, antequam ulterius progrediar, satisfaciendum est.

*Obiectio I.* Si Cometa nuperus, singulis 38 annis, revolutionem absolvit & mortalibus de novo conspicuus redditur; tum sequitur eum ante 38 annos quoque apparuisse, quod tamen factum fuisse nemo meminerit. Ad hoc duo respondeo: 1°. non omnes, quoties Perigæum pertranseunt Cometæ, semper in Terra conspiciuntur; imo quam plurimos pertransire, qui ob cælum diutissime nubibus obsitum & ob alias rationes, nunquam sub aspectum nostrum veniant, ipse Cl. HEVELIUS firmiter sibi persuasum habet. Exemplum habemus, ut reliqua silentio præteream, in Cometa 1672, a Celeb. Dn. CASSINIO Astronomo Regio Parisiensi observato. Is enim initio diutissime sub Solis radiis hypaugus latuit, dein crescentis Lunæ splendore quoque imminutus, & postremo ob cælum continue nubibus tectum, ultra mensẽ in conspectus latuit, ita ut non nisi paucis diebus, qui restabant ad omnimodam ejus disparitionem, observari potuerit, referente *Diario eruditorum* (Journal des Savans) anni 1672, ad d. 11 Aprilis. Quod si triduum vel quadriduum adhuc Cometa hic latitasset inconspicuus, ejus certe perpetuo oblitterata mansisset inter nos memoria. 2°. Præcipue vero respondeo, distinguendo inter nucleum Cometæ ejusque caudam; nucleus potest regulariter & statis temporibus redire; cauda vero, cum probabiliter ad essentiam Cometæ non pertineat, & tantum ex accidenti nucleo accedat, potest, ut antea circa apogæum nucleo adhæserat, circa perigæum calore Solis & continua gyratione Vorticis Cometici sensim iterum dissipari & dissolvi; sic ut idem nucleus quandoque redire possit cum longiore, nonnunquam cum breviorẽ, aliquando cum nulla vel saltem tenuissima cauda (astipulante HEVELIO *Lib. 7. Cometogr. p. 405.*) & ubi sic redit, facile fit, ut inter agmen Fixarum Cometo-Planetæ hujus nulla habeatur ratio, & ut sic inobservatus transeat. Imo, si nucleus ab omni etiam materia fuliginosa, qua antea dense erat involutus, liberetur; potest esse tam exilis, ut vigilantissimi quoque observatoris visum perpetuo fugiat.

ob-



*Obiectio* II. Si Cometæ corpora sunt perpetua & mundo con-  
 creata, motumque possident regularem, & statas suas habent  
 apocatastases; tum nequeunt esse signa & omina imminentium  
 malorum. *Resp.* An Cometæ irati Numinis signa & malorum  
 præfagia sint, magna adhuc inter omnis generis Doctos contro-  
 versia est; negotium si quod est, id totum ad Theologos perti-  
 net, quorum est determinare, quid ea de re Scriptura nobis  
 revelaverit: Astronomus cam quæstionem, nisi extra oleas va-  
 gari velit, omnino intactam relinquere tenetur. Quocirca, in  
 foro cum sim astronomico, nec assero Cometas esse malorum  
 præfagia, nec illud manifeste nego; verum nec me negare ex  
 hypothese mea jure colligitur; nam 1°. qui sic objiciunt, non  
 animadvertunt, Caput & Caudam posse esse res toto cœlo di-  
 versas; meque scopum meum, qui fuit, ut motum Cometarum  
 sub perpetuas leges reducerem, obtinere posse, dummodo id  
 circa Cometæ caput præstitero, (nec enim, ut crasso simili utar,  
 in cursu equi, bovis aut alterius animantis caudam respicimus,  
 sed solum caput, quod cauda sponte insequi solet.) Accedat er-  
 go capiti cauda, undecunque velit; generetur & corrumpatur  
 toties quoties conspicitur; sit opus naturæ, vel irati Dei indi-  
 cium; per me licet; dummodo nucleus sit originis perpetuæ,  
 ingenerabilis & incorruptibilis, statasque suas habeat revolution-  
 nes. Dicamus igitur, caput Cometæ ordinarie omni cauda de-  
 stitutum ad perigæum appellere, & non nisi tum, cum Deus  
 generi humano iram suam annunciare vult, cauda instructum  
 apparere; cum non nisi cauda sit, quæ terrorem mortalibus in-  
 cutere solet. 2°. Sed nec eo me responsionis devenire necessitas  
 cogit: Quamvis enim Caudam Capiti essentialem & coævam esse  
 existimarem, nondum, quæ mihi impropertur, irreligiositatis  
 convinceretur: nunquid enim fieri potuit, ut sapientissimus Crea-  
 tor, qui omnia prævidit ab æterno, imo per cujus decretum &  
 ordinationem est quicquid est, Cometarum motum ita ordina-  
 verit, ut tum demum conspicui fieri debeant, cum pœnas mun-  
 do annunciare constituit; & vicissim ut pœnas suas per hæc  
 fatalia sidera non nisi tum annunciare velit, cum Cometa se-

No. I. cundum regularem suum & sibi a creatione inditum motum incedens, ad perigæum descendere & mundo conspicuus fieri, etiam citra rationem intentionis hujus divinæ, tenetur. Multi egregii Viri trium superiorum Planetarum conjunctiones pro prælagiis habuerunt universalis alicujus catastrophes; quin & eclipses credidere mundo fatales; quamvis hæc omnia juxta ordinarium naturæ cursum eveniant, statasque suas habeant vicissitudines. Quis unquam inficias ivit, Irides esse gratiæ, & Terræ-motus iræ Divinæ signa? num vero credamus, Deo semper miracula patranda esse ad istiusmodi res producendas; & necessum esse, ex. gr. ut Deus nubem roscidam, contra naturalem ordinem & impulsu aliarum nubium, super limbo horizontis circumrotet, usque dum in oppositionem Solis perveniat, Iridem ibi pictura? aut vero ut ventos (halitus sulphureos) e longinquo, modo plane supernaturali, & instar Judæorum גלגל המות, per terræ cavernas violenter huc adducat, ut terram sub pedibus nostris contremiscere faciat? Nunquid credibilis est, Deum suo naturæ cursu relicto, ad talia producenda effecta adhibere proximas quasque nubes & vapores, eorumque naturalem & constantem motum; adeo ut & hæc effecta prædicere possemus, si Physica ad eum jam perfectionis gradum exulta esset, ut causæ horum effectuum mutabiles & variabiles in certas leges reduci possent. Sed, instas, si præsciri potest a nobis, Cometam novissimum rediturum elapsis 38 annis, sequitur, mundum tum temporis, inevitabili fato, in perverso jacere debere, & non posse non Deum per crimina sua invitare ad iræ suæ faciem accendendam. *Resp.* Nisi ergo nos quid præsciamus infallibiliter, illud nec credis esse ratum & fixum ratione decreti & præscientiæ divinæ? absit! Si itaque Deus mundi peccata præscit infallibiliter, sic tamen ut ejus præscientia non necessiter aut vim inferat voluntatibus mortalium; multo minus nostra, si qua detur, præscientia malorum necessitabit; eo quod non a nobis, perinde atque a Deo, voluntates hominum peccatorum dependeant. Aut si præscientia futurorum malorum prophætica, hausta ex immediata revelatione divina, non

non necessitavit; quare, quæso, necessitaret præscientia nostra No. I.  
naturali lumine acquisita?

Ut verbo tantum adhuc addam, quid tenendum de particu- De Af-  
laribus Astrologorum, ex Astris, & cumprimis ex Cometis, trologia-  
prædictionibus; eas non tantum a Theologis, sed quibusvis Chri- judicia-  
stianis recte sentientibus merito rejici existimo. Præstantissimi mo-  
dernorum Astronomorum ipsi vanitatem Astrologiæ judiciariæ a-  
bunde satis agnoscunt; GASSENDUS cam ludibrio excipit, HEVELIUS nauci facit, CARTESIUS omnino tacet; &c.  
Imo vix adduci possum ut credam, quemquam Astrologorum  
eo usque rationem exuisse, ut suis ipse prædictionibus fidem  
adhibeat; quamvis, vel spe turpis lucelli, vel gloriolæ apud  
superstitiosam plebeculam consequendæ, vel Principum, quibus  
bona præfagiunt, favorem aucupandi gratia, eas ut plurimum  
pro delphicis oraculis obtrudere soleant. Et sane quis a cachin-  
no sibi temperare valeat, cum arenosum vanissimæ Pseudo-  
scientiæ fundamentum, prædictiones vere e Delphica tripode  
petitas & manifestis æquivocationibus laborantes, ut & in ter-  
minis generalissimis conceptas, ac variis conditionibus, limita-  
tionibus, vanisque subterfugiis circumvallatas Astrologorum lo-  
cutiones, tandemque absurdissimas eorum consequentias, a ba-  
culo ad angulum concludentes, æqua trutina perpendit.

Post tam ingenuam confessionem, satis mirari nequeo, quos-  
dam adhuc reperiri, qui Astrologiæ me addictum absurde sus-  
picantur, propter ludicrum prognosticon in calce editionis ger-  
manicæ adjectum; quod propterea, ne infirmo eorum judicio  
porro offendiculo sim, studio hic omitto. Quilibet, nisi ad-  
modum obesæ naris homo, facile subolfacere potuit, progno-  
stici scopum alium nullum fuisse, quam ut ineptissimas Astrolo-  
gorum ratiocinationes, eorumque ex quolibet quidlibet elicien-  
di artificium facete traducerem, & ostenderem me, ex iisdem  
fundamentis, Principibus male ominari posse, e quibus paratitæ  
bona iis præfagire solent.

*Sequitur Examen sententiæ Hevelianæ  
de Cometis.*

No. 1.  
Systema  
Hevelia-  
num.

**F**Inem tandem ut imponam Tractatui huic, videndum restat, an incomparabilis Viri Dn. HEVELII opinio, quam in pretioso suo Opere Cometographico, ex profundissimis Mathematicos penetralibus erutam nobis pandit, omni difficultate careat. Ejus enim si sententia obtineat, jam totum meum Conamen de Cometarum prædictionibus irritum corrueat. Ut vero ordine eam, ante omnia ejus mentem de Cometarum ortu, seu generatione, ac motu, explicabo.

Clarissimi Viri mens est, Planetas omnes habere suas circa se Atmosphæras, quod de singulis prolixè probat, *Lib. 7. p. 352--374*: in qualibet atmosphæra, a corporibus ipsis Planetarum indefinenter multas exhalationes expirari & emitti, quarum crassiores in atmosphæra permaneant, subtiliores autem ultra illam ascendant, & in universum ætherem se diffundant; dum autem sic vagantur, facile fieri posse, ut & aliarum atmosphærarum effluvia sese iis jungant, pinguiore & tenacior crassescant & coagulentur; hinc varios generari nucleos, intercedente tamen subinde materia rariore, ut suo tempore iterum dissipari & in tenuissimos halitus dissolvi queant, *p. 383*. Hanc autem variorum nucleorum congeriem, non globosam, sed disciformem esse, planitiemque alterutram perpetuo ad Solem convertere; hinc fieri, ut radii solares per discum Cometæ transeuntes, partim refracti, partim reflexi, in plaga Soli opposita caudam efforment; quoniam vero, in purissima & subtilissima aura ætherea, radii hi terminari nequiquam possent, nisi materia aliqua reliquo æthere densior post Cometam lateret; hinc existimat, materiam cometicam non omnem in nucleum coagulatam fuisse, sed pleramque mansisse dilutiorem, quæ totum Cometæ corpus undiquaque quasi sepiat, & atmosphæram etiam quandam circa illum gignat; hanc vero materiam tenuio-

nuiorem vi caloris Solis rarefieri, extenuari, & a parte anti- No. I.  
ca, ac ab utroque latere propelli in partem a Sole averſam,  
*p.* 476-478.

De Cometarum Motu ſic ſtatuit Author: Cum primum Co- *Tab. II.*  
meta *mn*, in atmofphæra Planetæ alicujus, v. gr. Saturni pri- *Fig. 4.*  
mordia cœpit, coagulatis ſcilicet, quantum ſatis eſt ad mo-  
tum concipiendum, exhalationibus; moveri incipit recta ver-  
ſus ſyſtematis vel vorticis ſui extremitatem; qui motus cum  
motu atmofphæræ gyratorio concurrens, lineam ſpiralem  
*a b c d* efficit, quam dum deſcribit Cometa, continuo al-  
teram faciem diſci ſui corpori Planetæ, cui ortum debet,  
obvertit. Tandem vero, cum ad extremos orbis vaporofi  
terminos pervenit, a concitatiffima circumrotatione Vorti-  
cis in vaſtiſſimum ætherem expellitur, & retento hoc priſtino  
impetu, motum ſuum continuat per lineam rectam *e f*, quæ  
tangit Vorticem in puncto ſeparationis *e*, ut ſolent omnia cor-  
pora in gyrum acta, exemplo lapidis e funda projecti, *p.* 648:  
ubi notandum, quamprimum Cometa a Vortice ſuo avulſus æ-  
therem ſubintravit, ſubito planitiem diſci ſui a Planeta ad So-  
lem convertit, & eodem poſtea ſitu Solem perpetuo aſpicit;  
quo fit, ut Cometæ diſcus *mn* lineam directionis *e f* ſubinde  
ſub alio & alio inclinationis angulo ſecet. Unde porro proba-  
re nititur Cl. Vir, ejus Trajectoriam, quam vocat, debere eſſe  
non omnino rectam, ſed parabolicam, quæ a recto tramite *e f* in  
eam ſemper partem deſleat, quæ Soli vicinior eſt, qualis eſt *ny*;  
id quod per motum Velificationis ingenioſiſſime illuſtrat. Poſt-  
quam enim, a *pag.* 576. &c. egregie & prolixè diſſeruiſſet de  
gubernaculi natura, illud veſti comparans, & aſtruens, contra  
Ariſtotelem alioſque Mechanicos recentiores, potentiam moven-  
tem navigii non eſſe in nauclero ad clavum ſedente, ſed in aqua  
ad temonem alluente; tandem aſſerit, *pag.* 585. omne corpus  
oblongum & planiforme habere ſuum quaſi temonem naturalem.

Sciendum autem, ita comparatum eſſe cum Nave, ut quam-  
diu temo ſecundum flaminis, aut fluminis, tum etiam longitu-  
dinis navigii ductum parallelum directus & conſtitutus eſt, haud  
poſſit

No. I. possit aliter quam perpetuo in directum propelli; quamprimum vero temo in alterutram partem flectitur, sic ut aqua illum oblique alluat, navis pedetentim a recto tramite declinabit, & quidem in illud latus proram obvertet, in quod temo collimat: quod porro variis schematibus, ut pag. 572. 670, inprimis autem p. 680, illustrat.

Tab. II.  
Fig. 2. Sit enim Cymba vel Scapha  $mn$ , oblongorum laterum & absque gubernaculo, cum ipsa sibi temo sit naturalis; ejus latera primo exponantur, ut in  $o$ , parallela cursui fluminis descendens ab  $a$  versus  $b$ ; sit in ripa Director  $c$ , qui ita dirigat navigium  $mn$ , duobus funiculis  $cm$  &  $cn$ , in prora  $m$  & puppi  $n$  appensis, nullam tamen motui ejus vim inferendo, ut navigium semper sub angulo normali aspiciat. Igitur quando sic navigium ab  $a$ , secundum fluminis ductum, versus  $b$  moveri incipit; statim se cuspis navigii, a ductu parallelo alvei  $ab$ , versus directorem inflectit, ut in  $u$ ; & quo longius descendit, eo rectius se cursui fluminis  $ab$  obvertit, ut in  $x, t, y$ . Hac autem deviatione a directionis linea  $ab$ , existimat Vir Cl. fore, ut navigium tum, non solum ad cursum aquarum  $ab$  deferatur, sed simul aliquanto propius ad ripam, cui director insistit, accedat; siquidem prora navigii  $m$  illuc vergit; ita ut, loco rectæ  $ao b$ , describat lineam paulisper inflexam  $ou x t y$ .

Eodem porro schemate retento, si  $c$  sit Sol,  $mn$  discus Cometæ Soli perpetuo orthogonaliter expositus;  $ab$  linea, secundum quam Cometa impulsus est: Rationem putat reddere Vir Cl. quare Trajectoria Cometæ non omnino sit recta juxta impulsum  $ao b$ , sed parumper inflexa & parabolica, qualis est linea  $ou x t y$ .

Difficul-  
tates Sy-  
stematis  
Hevelia-  
ni. Talia felicissime inventa & subtilissime applicata fusius deducta invenies, *Lib. 9. Cometogr.* Clariss. Viri. Difficultates, quas librum hunc raptim perlustrando, in hypothese ejus deprehendisse mihi videor, paucis exponam. Earum quædam sunt Astronomicæ, vel Opticæ, & apparentias concernunt; aliæ Physicæ, & rei ipsius veritatem spectant.

Quod ad Apparentias attinet, an calculus Clariss. Viri omni



ex parte iis satisfaciat; ob tædiosam prolixitatem examinare non No. I.  
vacavit; credo tamen facile, perspicacissimi Authoris tantam  
fuisse vigilantiam, ut in negotio licet prolixissimo, falli haudqua-  
quam potuerit. Sequentes interim scrupuli mihi negotium fa-  
cessunt.

1. Si Trajectoria Cometæ est linea propemodum recta, Vor-  
ticem e quo egressus est, in puncto separationis tangens; tum  
possibile est, hanc Trajectoriam nonnunquam Terræ alicubi  
adeo propinquam esse, ut cum Cometa illac transit, Terram  
radat, quin ab illa omnino perforetur; quod quamvis Viro  
Clar. non absurdum videatur, ideo tamen, meo iudicio, ad-  
mitti non potest, quod alias Cometa in perigæo existens, ubi  
majori plerumque lumine ob vicinitatem oculos nostros ferire so-  
let, contra subito dispariturus, atque eclipsin passurus esset, ob  
umbram Terræ, cui involveretur; quod tamen nunquam ani-  
madversum.

2. Præterea Cometa, eadem ratione, reliquorum Planeta-  
rum, qua Terræ, atmosphæras ingredi, trajicere, & ipsorum  
corporibus allidi posset. Sed hoc casu rogarem Virum Clariss.  
an dum Cometa ingreditur Planetæ atmosphæram, recta illam  
trajiciat, quod tamen, supposita & concessa a Cl. Viro atmos-  
phæaræ in orbem gyratione, concipi nequit; an vero ab illa  
abripiatur, & sic participans de utroque motu, recto nimirum  
sibi proprio & circulari Vorticis, spiras describat a circumferen-  
tia ad centrum Vorticis; contrarias illis, quas descripserat a  
centro Vorticis Planetæ (in quo incunabula sumsit) ad ejus peri-  
pheriam: Et si sic abripiatur; num planities nuclei cometici  
semper maneat Soli obversa; num vero ad illum Planetam con-  
vertatur, a quo abripitur. Si prius dicat, rogarem, cur spiræ  
illæ nobis e Terra aspicientibus non observarentur? Si posterius,  
qui fieri possit, ut Sol, per planitiem nuclei, ad quam obli-  
quus esset, radios suos transmittere & caudam illuminare queat?

3. Si Cometa ejicitur ex atmosphæra, vi rapidissimæ ejus gy-  
rationis, modo quo vult Cl. HEVELIUS; tum, aut ex æqua-  
tore Vorticis, aut ex aliquo ejus parallelo necessario ejiceretur:

*Jac. Bernoulli Opera.*

E

Utrum-

No. I. Utrumvis dicatur, Trajectoria oportet sit in plano, vel ipsius æquatoris Planetæ, vel ad minimum in plano aliquo ei parallelo: atqui omnium Planetarum æquator propemodum coincidit cum æquatore aut ecliptica nostra; quocirca Trajectoria Cometæ nunquam posset ab æquatore vel ecliptica nostra enormiter declinare, tantum abest, ut alterutram unquam normaliter secaret, & Cometa recta ab austro in boream trajiceret; contra manifestam experientiam Cometæ 1652.

4. Si Cauda Soli est diametraliter opposita; tum si Cometa vel minimum altior aut depressior Sole existeret, non posset non ejus coma circa conjunctionem cum Sole apparere brevior, quam in quadraturis: Apparere vero major in illa quam in his nequiret, nisi hoc solo casu, cum in eadem præcise cum Sole est distantia, fatente Cl. HEVELIO *Lib. 8. p. 526.* Sit *Tab. II.* enim *a*, Terra; *b*, Sol; *cd*, Cometa altior Sole, sed in & *Fig. 3.* prope conjunctionem; *ef*, idem in quadratura; *gh*, Cometa Sole humilior in conjunctione, vel prope; *il*, idem in quadratura; *mn*, Cometa prope conjunctionem in eadem cum Sole distantia; *op*, idem in quadratura. Ex hoc schemate manifestum est, angulos visionis *cad*, & *gab*, esse acutiores angulis *caf*, & *ial*: contra angulum *man* esse majorem angulo *oap*, quamvis vera caudæ longitudo in omnibus sex locis eadem sit. Cum itaque nuperus Cometa caudam possederit longissimam circa conjunctionem Solis; hoc ipso demonstrative colligeretur, cum nec altiozem nec depressiorem Sole extitisse; & sic radiosissimo parallaxium calculo bene supersederi posset, si tam facile eorum distantia hoc medio posset investigari.

Sed demus porro, omnia Cometarum phenomena hypothesei Heveliana accurate salvari posse; certum tamen est, id nondum sufficere ad veritatem ipsius hypotheseos astruendam, nisi simul probetur, eam amice conspirare cum natura totius universi, & cum legibus motus a summo ejus Opifice ab initio ei præscriptis; quemadmodum Copernicanos parum juvaret, si dentaxat laborarent in demonstrandis per suum systema apparentis ecclestibus, nec simul solliciti essent de ostendenda ejus congruitate cum

cum natura totius universi. Quocirca, ut transeam ad physicam No. I.  
considerationem hypothesis Hevelianæ; examinandum mihi est,  
an satis conveniat cum vero mundi systemate.

I. Vir Clar. ad mentem quidem CARTESII (ut videre est  
ex ejus *Princ. Phil. part. 2. §. 37.*) pro principio assumit,  
quod adeo incertum est, ac quod incertissimum; nempe unum-  
quodque corpus motum, habere naturaliter vim ad perseveran-  
dum in suo motu, eo quod quælibet res tendat quantum in se  
est, ad permanendum in eo statu, in quo est; *Lib. 9. Come-  
togr. p. 644.* Certe plerique nunc Philosophi, & inter alios Au-  
thor, quisquis ille sit, libri, cui titulus, Inquisitio Veritatis  
(*Recherche de la Vérité*) profundissimarum reflexionum & spe-  
culationum refertissimi; qui cæteroquin in omnibus, etiam cir-  
ca materiam Cometicam, satis alias monstrosam & absonam,  
CARTESII insistant vestigiis; in hoc solo & paucis aliis gene-  
ralibus motus legibus, ab eo dissentiant. Et sane, si verum  
fateri licet, contrarium longe videtur probabilius, nimirum u-  
numquodque a motu cessaturum, quamprimum movens mo-  
vere cessat; nisi aliquid sit, quod motum in mobili conservet  
& continuo quasi reproducat. Ad axioma illud, *Unumquodque  
tendit ad permanendum in eo statu, in quo est*, respondeo,  
longe aliam hic esse rationem motus, quam quietis. Hæc me-  
ra illius privatio est, non vero ille hujus; nam, ad quietem in-  
ducendam corpori moto, non opus est, ut Deus velit, volun-  
tate positiva, corpus quiescere, ad hoc ut quiescat; sed sufficit,  
ut cesset velle ejus motum. Sed ponamus vicissim, Deum ces-  
sare velle quietem corporis quiescentis; nondum video corpus  
moveri; aut si qui motum iri corpus existiment, dicant quam  
in plagam movebitur, aut quo gradu celeritatis feretur: cum  
enim motus sit infinitæ varietatis, & magis ac minus recipiat,  
secus ac quies; non poterit assignari causa, quare corpus sibi re-  
lictum in hanc potius partem quam illam, aut tali potius ce-  
leritatis gradu quam alio moveri incipiat; nisi Deus insuper,  
voluntate positiva, velit & determinet corporis motum: sicuti

No. 1. elegantissime hæc deduxit præfatus Author *Tom. II. Lib. 6. cap. 9.*

Nisi ergo Cl. Dn. HEVELIUS possit assignare, quid sit id, quod corpus Cometæ, a Planetæ atmosphæra semel avulsum, in motu suo conservet, tota ejus hypothesis de Trajectoria corruet: nam si virtutem nominat a gyratione atmosphære Cometæ impressam, chimæram nobis fingit, cujus clarus & distinctus conceptus haberi nequit.

2. Concedamus autem Cometæ virtutem hanc continuandi motum suum secundum lineam rectam, postquam ab atmosphæra sua avulsus & spatiosissimum illum campum vel Oceanum, quem vocat, æthereum ingressus est; & quæramus porro ex Viro Clar. an hic cœlestis Oceanus omni motu destitutus sit, an vero ipse quoque circa Solem una cum toto Planetarum systemate rotetur: si prius supponit, quod supponere probabiliter videtur Celeberr. Vir, dum vastum illum Ætherem ceu mare quoddam pacificum concipit, in quo libere velificetur Cometa, tum totum Philosophiæ Cartesianæ ædificium, tam artificiose ab Authore constructum, unica hac suppositione subversum it; quod an consultum sit, ipse videat; cum præsertim, hoc supposito, non videatur posse concipi, qua ratione Terra per se duos pene contrarios motus exerceat; juxta Cartesio-Copernicam autem hypothese illud facillime possit; utpote, juxta quam, non nisi diurnus Terræ per se & immediate competit, annuus vero materiæ cœlesti Terræ circumfusæ, quæ in Vorticem circa Solem acta, Terram secum & omnes reliquos Planetas abripit.

3. Si vero Vir Cl. Ætheri concedit motum illum vorticosum circa Solem, qui secum rapiat totum Planetarum systema ipsosque Cometæ; tum utique Cometarum motus non amplius erit simplex, sed compositus ex recto in Trajectoria & circulari Vorticis; unde fieret, ut quamvis motus Cometæ proprius in Trajectoria reapse esset æqualissimus & regularissimus, tamen, propter alterum supervenientem motum, spiralis & irregularissimus appa-

appareret; eoque irregularior, quod materia Vorticis Cometam No. I. non ubique æquali velocitate, sed existentem prope Solem velocius, alibi lentius circumduceret. Cum autem hic motus Vorticis in calculo a Viro Cl. neglectus fuerit, non videtur ejus hypothesis, de Trajectoria Cometæ posse cum rei veritate conciliari.

Tandem examinandum est, an Vir Clar. motum parabolicum Cometæ ab inclinatione disci in Trajectoria proficiscentem bene probet exemplo scaphæ vel lintris. Ubi probe considerandum, Ætherem iterum considerari posse ut motum, vel ut immotum: Si illum ut immotum & tranquillum spectemus; rursus animadvertendum, an impulsus Cometæ ab atmosphæra impressum ad instar cursus torrentis alicujus, ut facit Author, considerare velimus; an vero ut impetum venti vela instantis; quod quidem longe convenientius est, eo quod Æther, cui Cometa innatat, rationem aquarum habere possit. Magna autem inter effectum fluminis & venti hac in parte differentia est: Quod fluminis cursum spectat, cui scapha oblique est exposita; fallitur Vir Cl. dum credit, scapham non solum ad fluminis cursum deorsum ferri, sed & pedetentim ad illam ripam accedere debere, cui obvertit proram: imo haud dubie recta descenderet, nec ad unam ripam magis accederet, quam ad alteram; tum quod fluctus  $dm$ ,  $ft$ ,  $en$ , æquali angulo & impetu alluant proram, medium, & puppim navigii  $mn$ ; tum quod fluctus retro navigium  $ml$ ,  $tr$ , &  $ni$ , in spatio Rhomboïde A, eodem quoque tempore & æquali celeritate recedant; sic ut nihil impediat, quo minus prora  $m$  directe eat in  $l$ , medium  $t$  in  $r$ , & puppis  $n$  in  $i$ ; atque sic navigium, intra eisdem fluctus parallelos  $dl$ , &  $ei$ , perpetuo contineatur.

Tab. II.  
Fig. 1.

Longe vero alia ratio esset motus navigii tranquillo mari expositi & a solo vento agitati: Esto enim in eodem schemate scapha  $mn$ , cujus lintea oblique impellat ventus  $ab$ , manifesta est ratio, cur  $mn$  non possit secundum venti ductum ire in  $li$ , nimirum ob renitentiam aquæ post scapham, in spatio

F 3

Rhom-

No. I. Rhomboide *A* contentæ. Hinc in illam solum partem tendere cogitur linter, quam respicit prora ejus *m*, quæ cuspidē suā faciliorem sibi parat transitum. Cum vero prora *m* semper respicere debeat circulum, circa directorem *c* descriptum, propterea quia situm navigii ad directorem supposuimus esse perpetuo normalem; hinc navigium cursu suo, nec lineam rectam, nec etiam parabolicam, sed omnino perfectum circulum *o p* describeret. Nec est quod dicas, venti impulsu, lintrem *m n*, non tantum in partem, in quam prora tendit, sed & secundum ipsius venti ductum versus *li*, latum iri, & sic parabolam descripturum; quia non potest dari ratio, quare vel minimum ad *li* accedat, ubi semper multum resistentiæ invenit, cum totam ventus vim possit exercere pellendo lintrem in partem, quam prora *m* aspicit. Verum quidem est in praxi, navem ventum oblique excipientem, nunquam in tam perfectum circulum agi posse, quin simul a centro subinde longius recedat, eam in partem abrepta, qua venti impetus fert: Verum id inde esse existimo, quod nunquam ventus sit, qui non aquam simul multum agitet, fluctusque anteriores impellat in scapham, dum posteriores ab illa propellit; in quorum adeo locum scapham succedere nil mirum est; sic ut motus ille scaphæ, secundum ductum venti, non tam ipsi vento, utcunque validissimo, quam aquæ post illam recedenti ascribendus sit. Id quod ad materiam præsentem accommodari nequit, ubi virtus Cometæ impressa ætherem agitare, ut ventus aquam, concipi nequit. Sive igitur virtus hæc Cometæ ab atmosphæra impressa flumini, sive vento, comparetur; neutro modo elicies motum Cometæ parabolicum; cum, priori modo, Trajectoria futura esset omnino recta; posteriori, omnino circularis.

Et sic quidem Ætherem consideravimus, ceu immotum & tranquillum; sed si porro illum, ut rei natura poscit, concipiamus instar magni Vorticis, qui, in modum rapidissimi Torrentis aut Euripi, secum, non recta, sed in gyrum circa Solem, deferat Cometam, quem præterea virtus ab atmosphæra impressa,



sa, ceu ventus validissimus, in eam partem impellat, in quam  
 inclinatus est discus; omnino evincemus, ex hoc ipso simili, No. I.  
 quod nobis subministravit Cl. HEVELIUS, Cometam,  
 nec rectam, nec etiam parabolicam, sed omnino circularem li-  
 nearum descripturum; cum & gyratio Vorticis & propria inclina-  
 tio disci eo colliment.

## APPENDIX.

**E** Pimetri loco, propino Lectori solutionem duorum Proble-  
 matum, quorum unum Dn. COMIERS, Praefectus Ec-  
 clesiae Collegialis de Ternant, proposuit Authori Diarii Erudi-  
 torum (*Journal des Savans*) vid. Tom. Anni 1676. p. 222. \*

## PROBLEMA TALE EST:

*Dato puncto c, in circumferentia circuli, cujus diameter oc;  
 reperire, in radio ejus oi, punctum m, per quod ducta recta  
 cr segmentum mr sit aequale radio oi.*

## I. SOLUTIO ALGEBRAICA.

$$\text{Angulus } oic = mic = A.$$

$$rci = mci = Z.$$

$$rmi = mci + mic = A + Z,$$

exterior duobus interioribus, per I. 32.

*rim,*

\* pag. 215. Editionis Batavae.

No. I.

$$rim = rmi = A + Z. \text{ per I. 5.}$$

latera enim  $ri$ , &  $rm$ , supponuntur æqualia.

$$irm = mci = Z, \text{ per I. 5.}$$

Triang. enim  $ric$  est Isosceles.

$$\begin{aligned} \text{Hinc } rmi + rim + irm &= \Delta rmi = 2A + 3Z \\ &= 180 \text{ gr. per I. 32.} \end{aligned}$$

$$\text{Ergo } 3Z = 180 \text{ gr.} - 2A.$$

$$\text{Et } Z = 60 \text{ gr.} - \frac{2}{3}A.$$

Quocirca cognito arcu  $oc$ , vel angulo  $oic = A$ , ejus subtrahantur duæ tertiæ partes a 60 gr. residuum erit  $Z = rci$ , vel  $mci$ ; cui si addas  $mic$ , habebis  $rmi$ ; cui æqualis alter  $rim$ , vel  $rio$ ; adeoque & arcus  $ro$ . Hinc nata est sequens Tabella:

Posito A, five ang. $oic$ .		erit Z, five ang. $rci$ .		arcus $or$ , five ang. $rio$ .	
gr.	0 —	60.	0.	60.	0.
	10 —	53.	20.	63.	20.
	20 —	46.	40.	66.	40.
	30 —	40.	0.	70.	0.
	40 —	33.	20.	73.	20.
	50 —	26.	40.	76.	40.
	60 —	20.	0.	80.	0.
	70 —	13.	20.	83.	20.
	80 —	6.	40.	86.	40.
	90 —	0.	0.	90.	0.

## 2. SOLUTIO GEOMETRICA.

E puncto dato  $c$ , ducatur diameter  $cg$ .

Arcus  $ob$  fiat æqualis arcui dato  $oc$ .

Abscindatur ex  $b$  tertia pars arcus  $bg$ , quæ sit  $br$ .

Jua-

Jungantur  $c$  &  $r$ , recta  $cr$ :

No. I.

Dico lineam  $cr$  habere partem  $mr$  æqualem radio  $io$ .

DEMONSTR. Ang.  $rcg$  subduplus est angulo  $rig$ , per  
III. 20.

Ang.  $rih$ , eidem quoque subduplus est, per constructionem.

Igitur anguli  $rih$ , &  $rci$ , æquantur, per axiom. 6.

Iterum ang.  $hio$  æquatur angulo  $oic$ , per constructionem.

Totus igitur ang.  $rio$  æquatur duobus  $rci$ , &  $mic$ , simul sumptis.

Angulus autem  $rmi$  æquatur iisdem duobus  $rci$ , &  $mic$ , per I. 32.

Itaque anguli  $rmi$ , &  $rim$ , æquantur inter se, per ax. 1. adeoque recta  $rm$  æqualis radio  $ri$ , vel  $oi$ : sunt enim crura Isoscelis  $rmi$ , per I. 6. quod erat demonstrandum. \*

*Alterum PROBLEMA in plateis hujus Urbis affixum legitur & propositum est a quodam Nic. VOOGHT, Geometra Amstel. Est autem tale:*

**O**bservatur alicubi, post meridiem hora sexta, Solis altitudo 12 gr. elapsis autem, post momentum observationis, hora una & 12 minutis occidit Sol; quæritur, sub qua Latitudine, & quo anni tempore instituta fuerit observatio?

*Resp.* Observatio instituta fuit sub latitudine 45 gr. 16½ min. Sole existente in ♄. 17 gr. 15 min. aut ♃. 12 gr. 47 min. & declinationem habente 17 gr. 1 min.

*Fac. Bernoulli Opera.*

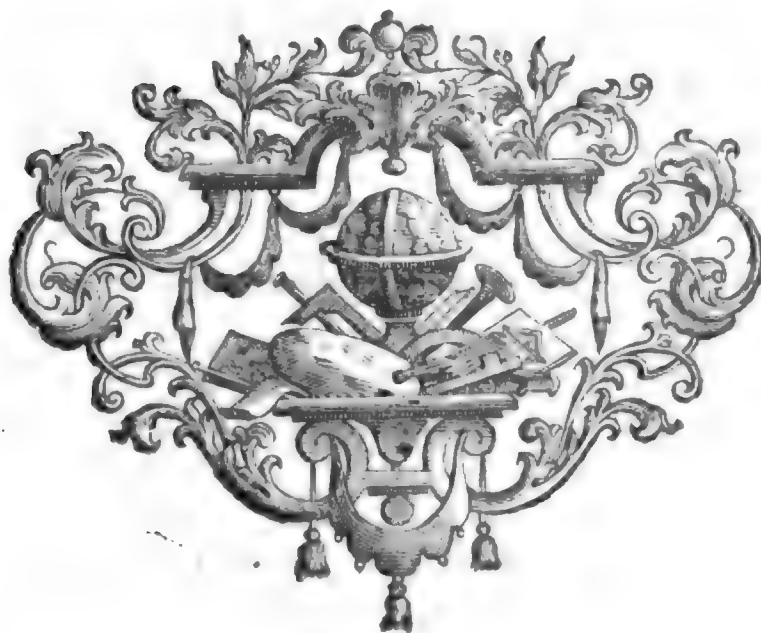
G

Calcu-

\* Videatur Num. II. sub finem.

No. I. Calculum vitandæ prolixitatis causa non addo. Attente in-  
Tab. II. spicias schema, & ex resolutione duorum triangulorum  $abc$ ,  
Fig. 5. &  $cde$ , veritas solutionis tibi innotescet. \*

\* Videatur Num. II. sub finem.



JACOBI

Nº. II.

JACOBI BERNOULLI  
DISSERTATIO  
DE  
GRAVITATE  
ÆTHERIS.

---

Edita primo

AMSTELÆDAMI;

Apud HENRICUM WETSTENIUM.

1683.





PERILLUSTRI  
VIRO RUM QUADRIGÆ,  
SCHOLARCHIS

Inclytæ Reip. Basil. Spectatissimis, -

D. JOH. BALTH. BURCKHARDO,

D. THEODORO BURCKHARDO,  
Seni duo-de-nonagenario,

D. ANDREÆ MITZIO,

SENATORIBUS & TREDECIM-VIRIS  
MERITISSIMIS:

D. JOH. CONRADO HARDERO,

IBIDEM ARCHIGRAMMATÆO, RERUM AGENDARUM  
PRUDENTIA MAXIME CONSPICUO.

VIRI AMPLISSIMI, GRAVISSIMI:



OGMA propono, non odiosæ,  
ut videri quidem posset, reum  
novitatis, sed quod antiquita-  
te cum vetustissimæ Philoso-  
phiæ certet placitis, coætaneum non *Aristoteli*, non *Pla-*  
*toni*, sed prisco *Atlanti*, ex quo

G 3

omne

Ovid. l. 4.  
Metam.  
Fab. 17.

\_\_\_\_\_ omne

*Cum tot syderibus cælum requievit in illo.*

Quorsum enim, nobis fingere Senem facie incurva, vultu cernuo, titubante genu, & tanquam sub magna fatiscentem mole, si quod portavit cælum, leve credidere Veteres? Ne tamen a fabulis Antiquitatis laudem fœnerer, illud hoc Veterum didicisse sufficiat exemplo, Ætherem, qualem præfenti molior opusculo, gravem & ponderosum Atlantum suffulciendum esse humeris, ne mole ruat sua.

Onus ut cœleste, sic nobile, **AMPLISSIMI VIRI**, cui ferendo quos digniores feligerem humeros, quam Vestros, qui non nisi magna, non nisi eximia ferre sunt assueti? Vestri sunt humeri, qui arduum regiminis in se susceperere onus, susceptum tanta cum laude & prudentia portavere hactenus. Vestri sunt humeri, quos cura Ecclesiæ, cœlique illius mystici premit pondus. Vos estis, quos Academiae Scholarum-

larumque nostrarum onerosa fatigat *ἰμπεριον*.  
Neve hoc reticeam, Vos estis, quorum  
curis, consiliis, & auspiciis, Clariss. Dnn.  
Professores Academiam nostram nunc de-  
mum heroico plane ausu, nec infelici cum  
successu, pristino restituere nitori allabo-  
rant. Ne itaque gravemini, **AMPLIS-**  
**SIMI VIRI**, post tot exantlatas curas,  
tantaque suscepta onera, etiam cœlestis is-  
tius, quod struxi, ponderis curam & pa-  
trocinium in Vos suscipere; patiaminique,  
ut *Ætheris Gravitas* illustrium Vestrorum  
nominum auctoritate præmuniatur? Istis  
enim suffulta stylobatis stabit salva & in-  
conculsa, nec erit, cur vel ab apertis ho-  
stium arietibus, vel clandestinis malevolo-  
rum cuniculis, vel tormentis invidiæ, vel  
canum latratibus, aut dentibus Momorum,  
aliisque insultibus ullam ruinam metuat.  
Firmet autem Deus O. M. humeros Ve-  
stros, **AMPLISSIMI VIRI**, ut  
gloriosa illa onera, quibus Ecclesiæ Pa-  
triæque bono obruimini quotidie, alacri-  
ter

ter & constanter feratis, donec præmia laborum, utinam fero tamen, reportetis in cœlis. Ita vovet

*AMPLITUDINUM VESTRARUM*

*Humillimus & Devotissimus  
Servus ac Cliens*

Dabam  
Lugd. Batav.  
11 Julii  
1682.

JAC. BERNOULLI.

MO-

# MONITUM

A D

LECTOREM.



UM bona pars hujus Dissertationis sub prae-  
prodisset, ferebat occasio, ut inter confabu-  
landum cum Amico, varii praecipue de prae-  
sentibus, ut sit, studiis miscerentur sermones;  
interque alia mentio incideret Causae Firmitu-  
dinis Corporum Durorum; ubi monuit Ami-  
cus, eam a MALEBRANCIO Compres-  
sioni Aetheris ambientis ascribi. Ego illum  
per jocum hac dixisse, postquam in Adversaria mea, vel impressa  
Dissertationis folia forte casu quodam incidisset, suspicatus; Ses-  
quiannus est, regressi, ex quo Auctoris istius Scrutinium veritatis  
(Recherche de la vérité) fugitivo quidem, fateor, oculo perlu-  
stravi; sed non observavi, saltem non memini, illum, circa Co-  
hesionem partium duri corporis, ultra CARTESII quietem penetras-  
se: Amicus vero asseverare dicta sua, & ne dubitem, commodare  
librum, ac monstrare locum, qui fidem dictis faceret. Quo sane  
perlecto mirabar, non tam quod dictus Auctor in Cohesione partium  
duri corporis jam ante me Pressionem Aetheris repererit, sed prae-  
cipue quod in cognitionem hujus veritatis eodem filo Ariadnae deduc-  
tus, eique comprobanda iisdem rationibus, iisdemque adeo exemplis  
mecum usus sit; uti e Scrutinii veritatis & Dissertationis nostra  
collatione patere poterit. Isthaec autem Lectorem moneo, non quod  
veritatis alicujus inventionem admodum mihi vendicare, aut de  
ea multum gloriari animus sit (sic enim dissimulasse opportuisset,  
qua modo propalavi); verum ut fortuitus noster consensus evidenti  
argumento sit (quod persuadere mea interest) nec contradicendi pru-  
rigine, nec novaturiendi studio, sed solo veritatis amore inductum  
me isthaec scripsisse. Ea enim vivimus tempora, quibus non satis de-

Recher-  
che de la  
vérité  
Lib. 6.  
cap. 9<sup>o</sup>

Jacobi Bernoulli Opera.

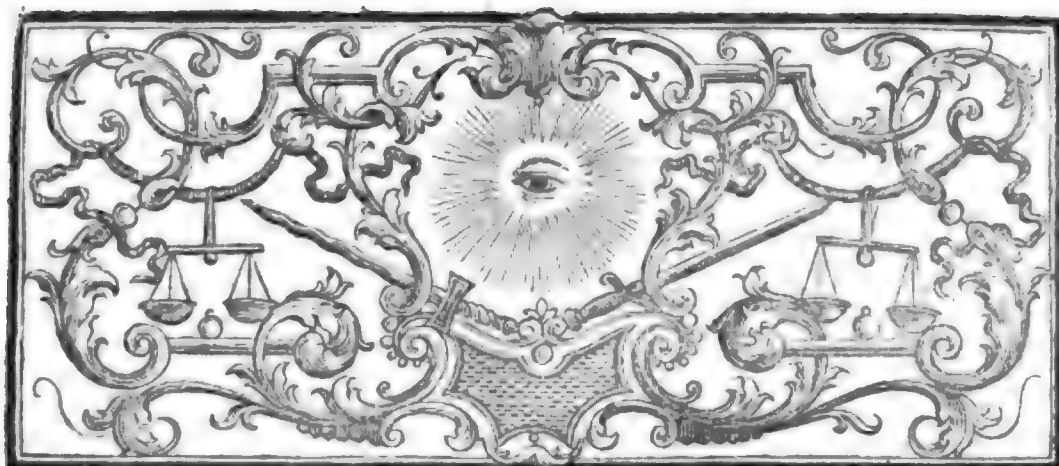
H

cli-

*clinare possumus sinistra multorum iudicia, qui de Scripto aliquo ex opinione, quam de persona Scribentis concepere, saepe quidem illa fallaci & iniqua, aliisque suis affectibus, quam ex rebus ipsis, judicare malunt. Tales ergo rogo, ut qua hic reperient de Causa Cohæſionis partium duri corporis, non ut mea tractent, sed ut opinionem MALEBRANCI, unius e sagacissimis nostri sæculi Philosophis.*

*Alterum est, quod Benignum Lectorem monitum velim, ut observet, me representare in tota fere Dissertatione hominem, qui suo usus ratiocinio gradatim in cognitionem rei, quam quarit, devenit, quique assumit quandoque talia, qua majore accedente luce talia non reperiuntur; Exempli causa, ad reddendam rationem, cur corpus motum non possit impellere quodlibet corpus quiescens, pag. 69. supposui initio, cum CARTESIO, in ipsa quiete quandam resistendi vim, porportionatam magnitudini corporis quiescentis, antequam exploratum haberem, omnem corporum resistantiam provenire ab ambientis materia pressione. Ita p. 107. (ex eo, quod pondus ferramenti quandoque majus est pondere similis cylindri atmospherici, conclusi ipsum quoque Ætherem sua gravitate debere esse instructum, qua adjuvet pondus Atmosphæra in connectendis ferramenti partibus; sed ista conclusio mox vacillare deprehenditur ex iis, qua sequuntur pag. 112. ubi demonstratur, ferramentum licet ponderosissimum in suspensione vel attractione omne suum amittere pondus; hinc enim quid aliud consequitur, quam ad sustentandum vel propellendum ferramentum minimam sufficere Atmosphæra vim, nec opus esse, ut Ætheri propterea pondus affingatur? Interim ne hoc Gravitati Ætheris fraudi sit, observabit Lector, quamvis id, quod prima mihi de illa cogitandi extitit occasio, non fundat pro ea argumentum valde necessarium, alia tamen postea adduci argumenta, quibus hanc Gravitationem omnino apodicticè & infallibiliter confirmari putem.*





Nº. II.

DISSERTATIO

DE

GRAVITATE

ÆTHERIS.



RECEPTA jam est ubique Aeris nostri at- <sup>Gravitas</sup>  
 mosphærici <sup>Aeris.</sup> Gravitas. Ea a primis Scriptori-  
 bus Hydrostatices indefessa solertia pervesti-  
 gata, non solum rationi consona, sed infi-  
 nitis quoque satisfacere deprehensa fuit expe-  
 rimentis; ut multis contradicentibus ad assen-  
 sum a se impetrandum satis etiam ponderis  
 habere visa fuerit. Et quamvis reliqui, in  
 quorum animis Aeris Levitas profundiores egit radices, manus  
 dare hætenus impediti fuerint; quod sibi persuaderent fore, ut  
 sentiremus supra nos ejus, si quod haberet, pondus; quodque  
 H 2 absur-

No. II. absurdum existimarent, fluidum levius posse ponderare super graviori, Aerem scil. super Aqua, cum potius deprehendatur, illum sub hac detentum omni nisu ascendere, & per bullas emergere; res tamen si curate inspiciatur, adeo evidens est, ut ad hos homines convincendos, confugiendum sit, non ad operosas machinas aut pretiosas antlias, sed vel e trivio petita, & mercatoribus bajulisque obvia experimenta.

Fluidum  
levius  
ponderat  
super gra-  
viori.

Imponere corpus aliquod gravius, puta Plumbum, uni lanci trutinæ; immissoque alteri tanto pondere, quantum requiritur ad bilancem in æquilibrio conservandam, perge plumbo superimponere aliud corpus *in specie* quidem levius, videlicet Lignum. Quid manifestius, quam lancem hanc quæ Plumbum cum Ligno continet, alteri præponderaturam; ita ut tantum ponderis isti addendum ad trutinam æquilibrio suo restituendam, quantum alias deprimeret lignum, si seorsim appenderetur? Nemo autem concipiet, istud lancis præpondium aliunde provenire, quam ex eo, quod lignum, licet plumbo *in specie* levius, tota sua mole super illo gravitet, ambo vero junctis viribus premant lancem. Et ne rationi, sed sensui quoque hæc probetur gravitatio, quotusquisque est, qui onus in capite gestans non experiatur, magno sæpe suo incommodo, oneris supra se gravitationem & tendentiam deorsum, quam, scalam postea ascendens, nihilo imminutam sentiet, quamvis inter ascendendum istud onus speciem levitatis præ se ferat. Unde manifestum est, ascensum alicujus corporis non statim arguere, id esse absolute leve, vel nullam habuisse, aut sublatam esse pressionem conatumve ejus tendendi deorsum; sed pressionem hanc irritam tantum reddi per aliam pressionem vehementiorem sursum, impediri que, ne in actualem descensum abeat. Quemadmodum si duo Luctatores manus inter se conferunt, & alter alterum impellit robore inæquali; solus fortioris impulsus fortitur effectum, dum debiliorem retroagit: propterea vero non concludimus, impulsionem debiliorem sublatam esse; pergit enim hic impendere omnes suos nervos, ut resistat alteri, & fortior revera resistentiam debiliorem sentit, & nisi debilior resisteret, tor-

fortior eodem temporis spatio, pro ratione roboris sui, duplo No. II.  
vel triplo longius eum propelleret, quam nunc resistentem &  
prementem se propellere potis est.

Verum, inquiunt, non sentitur pressio vel pondus Aeris supra nos: sed quid tum postea? Nec sentitur ab urinatoribus pondus aquæ incumbentis; ergone minus gravis est? Audio regerentes, Elementa in locis propriis non gravitare. Itane vero sibi ipsis respondent incauti? posito enim verum esse, quod non est; nunquid Aer est in loco suo nativo? cur solus ergo, si sit gravis, hoc in loco ponderaret?

Et ne ullum dubium relinquatur circa Aerem sub aqua contentum, quem per bullas sponte erumpere videmus; nonne idem contingit in ligno sub aquam vi depresso, quod sibi relin- Gravis  
quando-  
que af-  
cendant.  
ctum, in superficiem aquæ sponte (ut quidem videtur) emergere solet? an ovum ovo poterit esse similis? Quod si ergo Aer absolute levis dicendus, quod sub aqua contentus sursum erumpere nititur; cur veremur ligno, cui idem accidit, absolutam levitatem ascribere? Non nescio, quid errori ansam dederit: Ligno propterea gravitatem concessere Veteres, quod quamvis in aqua ascenderet, præsto tamen esse viderent aliud Fluidum, nempe Aerem, in quo descendit: Cum vero deprehenderent, Aerem in omni fluido ascendere, in nullo descendere; hinc factum, ut absolutam ei levitatem imprudenter ascripserint: cum tamen ipsis cogitandum fuisset, si sensibus nostris obviam forsitan esset aliquod fluidum Aere adhuc levius, fore ut Aer in illo non minus fundum petere conspiceretur, quam lignum in Aere; adeoque cum non tam absolute levem pronunciandum, quod in reliquis fluidis ascendit, quam vero magis minusque gravem respectu horum aut illorum fluidorum; uti lignum Aere gravius esse dicimus, quamvis interea aqua minus grave sit.

Sed piget, in re Sole meridiano clariore prolixiorem esse. Gravitas hujus nostri, quem haurimus, Aeris apud plerosque jam est in confesso: De ipsius vero quoque *Ætheris Gravitate*, quam hac Dissertatione ostendendam suscepi, apud Scriptores Hydrostaticos, quorum experimenta ad solius Atmosphæræ pressio-

No. II. nem demonstrandam tendunt, altum haftenus fuit silentium : adeo tamen evidens est, aut ego pessime fallor, ejus rei argumentum, ut, illo intellecto, a nemine in dubium vocari amplius posse, firmiter mihi persuadeam.

Occasio  
scripti.

Quia vero maximi momenti esse & ad majorem intelligentiam quamplurimum conducere judico, si qua primum occasione quave via in cogitationes tuas incideris, enarres, quod alias per modum præfationis fieri solet; non abs re erit, si tribus id verbis hic innuam.

Incidi nuper in Scriptum aliquod *de Gravitate Aeris*, \* Auctore Cl. VOLDERO, Professore in Academia Lugduno-Batava Celeberrimo. Id cum secunda vice evolverem, cœpi attentius ruminare, quæ *sect. 37. seqq.* de receptis duobus Motus generibus, docte & solide scripsit. Quæ quia sequenti Tractatui ortum dedere, non possum, quin totidem pene Auctoris verbis, quantum ad propositum meum faciunt, huc transferam; quod citra Plagii notam interpretabitur benignus Lector.

Duo motus genera, Pulsio & Attractio.

Dicit ibi, omnem Motum ad duo vulgo revocari genera; *Pulsionem* & *Attractionem*; utramque duplicem esse. *Pulsionem* vocari, ubi corpus, quod tanquam causa motus in alio corpore spectatur, vel *quiescit*, dum alterum, quod ab illo impelli dicitur, ab eo recedit; vel *movetur*, & ad motum concitat id corpus, cui suo in itinere occurrit. *Attractionem* vero dici, ubi movens vel *quiescit*, mobili ad ipsum accedente, vel *præcedit*, mobili illud insequente. Prioris *Pulsionis* exemplum proponit in Magnete; qui licet ad sensum quiescat, alium tamen magnetem similibus polis se spectantem a se abigit; uti cum ferrum ad se attrahere dicitur, prioris *Attractionis* specimen nobis exhibere potest. Posteriores *Pulsionis* speciem spectari monet infinitis in casibus; *Attractiones* vero primario patere in Antliis, in quibus embolo adducto, qui motus aquæ censetur causa, sequitur pone ipsa aqua.

His

\* Burchardi de Volder *Quæstiones Academicae de Aeris Gravitate*. Mediodurghi, 1681.

His præmissis, quid de utraque specie censendum sit, inquiri; ostendendo primo, in nullius corporis natura motum involvi, adeoque nullum corpus moveri posse a seipso, sed quodcunque movetur, moveri ab alio. Unde porro infert, id quod movet, necessario quoque moveri; cum nemo comprehendat, quo pacto corpus quiescens ad motum concitet aliud, in quod sua quiete agere non potest. Quibus stabilitis, priores species, tum *Attractionis*, tum *Pulsionis*, ubi corpus quiescens aliud vel ad se allicit, vel a se propellit, sponte ruere manifestum est. Posteriorem *Attractionis* speciem agnoscit quidem, sicubi movens & mobile vinculo quodam inter se connexa sunt; sed eam a *Pulsione* non differre simul monet. Alteram vero, quam *Suctionem* vulgo dicunt, qua corpus motum insequitur corpus movens, quicum nullo vinculo conjunctum est, omnino rejicit, hac demonstrationum serie usus: Nullum corpus aliud movere potis est, nisi ei partem sui motus communicet; non potest autem communicare partem, quin tantundem illi decedat; decedere vero nequit, quin id quod movetur, moventis, aut motui, aut determinationi impedimento sit; impedimento denique illud esse nequit, nisi situm sit in eadem linea per quam, & easdem partes, versus quas fertur corpus movens. Si quis enim crederet, corpus, quod vel pone est, & extra viam ejus quod movetur, impedimento huic esse posse; eadem facilitate sibi quis persuaderet, (quod ejus non inficetum est simile) tormenti globum, orientem versus explosum, sibi in motu posse a mœnibus, quæ ad occidentem sunt. Unde concludit, corpus quod a tergo est, ab eo quod præcedit, nulla ratione motum iri: cunctaque tandem eo dirigit, ut omnem *Attractionem*, *Suctionem*, atque his affinem vacui *Fugam* e rerum natura eliminaret.

Huc cum perrexissem, *Attractioni* terra marique sollicitus quæsi patrociniū; & quamvis omnia rite demonstrata esse evidenter perciperem, tamdiu ab assensu me cohibui, donec plures motus, qui *Attractionis* speciem præ se ferre poterant, in specie examinasset, & tentasset, utrum per *Pulsionem* explicari commode possent.

No. II.  
Non datur  
*Attractio* distincta a  
*Pulsione*.

Ad.

No. II. Advertebam autem primo illud in Pulsione; non necessum esse, ut movens semper mobile in directum a se abigat; sed in diversa illud partes impellere posse, pro diversa obliquitate sui appulsus. Experientia enim compertum est, sphaeram, ab alia sphaera tactam & impulsam, secundum eam lineam propelli, quæ per punctum contactus & per centra utriusque sphaeræ ducitur; nulla habita ratione lineæ, quam sphaera impellens ante contactum descripserat: quam naturæ legem in emolumentum suum apprime vertere norunt illi, qui ludo delectantur tudiculario (*jeu de billard*).

- Quocirca, ut determinetur, quam in partem quælibet Pulsio fieri debeat, descriptus sit circulus  $abcd$ ; eoque per lineas  $ac$ , &  $bd$ , in quatuor quadrantes diviso, ponatur in ejus centro  $e$ , sphaerula per lineam  $ae$  delata; quæ, in puncto  $i$ , aliam sphaerulam  $g$  offendat, sic ut linea  $ei$ , punctum contactus cum centro  $e$  jungens, (quæ producta etiam per centrum sphaeræ impulsæ  $g$  transibit) in directum sita sit cum recta  $ae$ ; quo quidem casu nullum est dubium, sphaeram  $g$  in directum propulsam iri secundum lineam  $gc$ . Si vero nunc sphaerula  $e$ , ad alteram  $g$  ita appellere supponatur, ut punctum contactus  $i$ , in alterutro quadrante  $ceb$ , vel  $ced$  reperiat, adeoque recta  $eg$ , per centra sphaerarum transiens, cum recta  $ae$  non in directum jaceat, sed quemcunque angulum obtusum constituat; tum sphaerula  $g$  non amplius feretur in directum per lineam  $ec$ , aut huic parallelam  $gf$ , sed per rectam  $gh$ ; ita ut linea mobilis  $gh$ , rectæ  $eg$  in directum existens, eundem, quem ista, cum linea moventis  $ae$  constituat angulum. Ubi denique sphaerula  $e$  alteram  $g$  ita offendit, ut punctum contactus utriusque  $i$  incidat in lineam  $eb$ , vel  $ed$ , quadrantetenus distantem a recta  $ae$  descripta per motum sphaeræ  $e$ , cessabit omnis pulsio, eo quod jam tota sphaera  $e$ , sine obstaculo, inter parallelas  $mn$  &  $op$ , iter suum prosequi possit. E quibus haud difficulter constabit, fieri non posse, ut contactus sphaerarum fiat in quadrantibus  $ceb$ , vel  $ced$ : defluens enim pila ex  $a$  versus  $e$ , necessario prius aliquo sui puncto offendet pilam immotam  $g$ , in  $f$ , eamque propellet per lineam



neam  $gt$ , obtusum cum recta  $ae$  constituentem angulum. Adde, quod etiamsi per impossibile supponamus, pilam  $e$ , penetratis dimensionibus pilæ  $g$ , in punctum  $e$  defluxisse; nulla tamen ratio est, quare altera pila  $g$ , post contactum  $i$ , debeat impelli per lineam  $gn$ ; cum nullum afferat impedimentum pilæ  $e$ , quin libere ista moveri pergat ex  $e$  in  $c$ . Quibus perpensis, concludebam, in omni *Pulsione*, lineam moventis ante contactum descriptam, & lineam mobilis describendam post contactum, obtusum perpetuo angulum inter sese constituere debere; & si quando deprehendantur formare acutum, dubitabam, an ille motus aliter quam per *Attractionem* explicari possit.

No. II.

In omni  
Pulsione  
linea mo-  
ventis &  
linea mo-  
bilis obtu-  
sum an-  
gulum  
constitu-  
unt.

Talem vero motum reperiri primo suspicabar in Re nautica, ubi Nautæ, vento etiam adverso, spatia conficere norunt. Quoniam enim hoc in casu plaga, e qua ingruit ventus, ab illa, in quam cursus navis directus est, minus quadrante abest; ventus, prima fronte, videri cui posset attrahere potius navem, quam a se repellere. Verum brevi deprehendi, & hunc navium motum cum Pulsionis legibus modo allatis optime conspirare.

An ven-  
tus adver-  
sus attra-  
hat na-  
vem.

Esto igitur  $ab$ , longitudo navigii cujusdam (cujus prora  $a$ , puppis  $b$ ,) eamque in transversum secet recta normalis  $cd$ . Ventus, quem mihi imaginabar ut congeriem infinitorum globulorum ad vela allidentium, repræsentetur per parallelas  $gh$ , cum anteriore navis parte  $ba$  angulum quemcunque acutum  $gha$  constituentes. Velum  $lm$  medio loco sit expansum inter lineas  $gh$ , &  $ab$ : quandoquidem nostro in casu vela ita dirigi solent, ut eorum planum inter plagam, e qua irruit ventus, & eam quam respicit prora, intermedium jaceat, ut hac ratione ventus a velis obliquius, quam ab ipsa nave excipiatur. Quo facto, ut pateat, in quam partem motus navis determinandus sit; consideremus solum venti globulum  $e$ , (quia reliquorum par est ratio.) Is propellere conabitur navem secundum rectam  $en$ , ductam per globuli centrum & globuli velique contactum. Sed quoniam iste motus magnam partem infringitur per resistantiam aquæ post navem in spatio  $adb$  contentæ; intelligamus illum compositum esse ex duobus aliis, quorum unus

Fig. 5.

Jac. Bernoulli Opera.

I

pellit

No. II. pellit navem in transversum juxta rectam  $id$ , seu  $on$ , alter in directum secundum lineam  $dn$ , vel  $io$ : statimque patebit, motum in transversum, si non omnino, saltem maxima ex parte, sublatum iri a tota illa globulorum aqueorum serie, quorum quia totidem, vel plures, navis longitudini obicem ponunt, quam globuli venti vela impellunt, mirum non est, quod huic determinationi sufficienti impedimento esse possint. Eadem vero opera redditur hinc ratio, cur alter motus in directum debeat, vel nullum, vel exiguum detrimentum pati: cum enim paucissimi sint globuli aquei, qui proræ cuspidem excipiunt, eorum vires globulis venti resistendo nequaquam pares erunt; unde navis a vento impulsâ nullo negotio eos sulcabit, atque ita perpetuo secundum rectam  $ia$ , incedere perget, nunquam valde notabiliter ad latus deflectendo. Quæ explicatio nos docebit, ad nullam hic Attractionem confugiendum, sed motum hunc navigii, quanquam venti impulsui, ut videtur, contrarium, non minus per Pulsionem effici, quam si prora obversa puncto  $n$ , cum plano veli  $lm$  perpendiculares constitueret angulos; hoc tantum cum discrimine, quod navis  $ia$  longe tardius incedere debeat nave  $in$ ; quia quo tempore hæc spatium  $in$  percurrit, illa viam multo breviorē, nempe non nisi lineam  $io$  emetitur. Horum vero motuum (ut hoc in transitu moneam) sciatur proportio; si assumpto radio  $in$ , atque sinu anguli  $a il$ , hoc est,  $n id$ , nempe recta  $dn$ , sive  $io$ ; fiat, Ut sinus obliquitatis veli cum nave, ad sinum totum; ita via navis  $ab$ , ad viam, quam percurreret eodem temporis spatio, si vela haberet ad angulos rectos expansa. Eruntque in universum velocitates navium ad invicem, ut sinus obliquitatis velorum ad naves; supponendo vela eodem angulo ventos excipientia, æqualique ab iis impetu impulsâ.

Clavus  
non tan-  
tum agit  
per mo-  
dum vec-  
tis.

Antequam ulterius progrediar, non possum sub silentio præterire (quod nihil tale cogitanti inciderat) posse nimirum per hanc explicationem, genuinam reddi causam virtutis Clavi seu Gubernaculi; nimis enim evidentia sunt, quam ut dissimulari mereantur, nec Lectorem, spero, digressionis tædebit. Creditum

tum fuit tam a Veteribus, quam a plerisque Modernis, Clavum No. II. unice agere per modum vectis, cujus hypomochlium, seu fulcimentum, sit vel in centro gravitatis ipsius navigii, vel in puppis cardine, cui clavus inferitur; potentia vero motrix in resistentia ipsius aquæ stagnantis, ad quam allidit clavus. Sed bene observatum est a \* quodam e Recentioribus, virtutem istam, qua clavus navim sibi adhærentem circumagit, non unice naturæ vectis tribui posse; sed præterea aliud aliquid agnoscendum, in quo præcipuum ejus rei momentum consistat. Nam si per modum vectis solum operaretur clavus; tum in quavis sui inclinatione proram navis in eam partem flectere deberet, in quam ipse inclinatus est, & quidem eo efficacius, quo rectiores cum longitudine navis lineæ sive directionis constitueret angulos; quod tamen non omnino veritati consonum deprehenditur: si enim clavus eousque inflectatur, ut ejus latitudo perpendicularis sit cum navigio, multo languidiorem factam comperire ejus virtutem; quod si illum adhuc ultra perpendicularum ad navem, seu lineas directionis, inflectas, ut angulos acutos cum illis efformet, tunc non solum prora non convertetur amplius ad clavum, sed in contrarium potius latus impelletur.

Quam bene autem hæc observavit prædictus Auctor, tam abstractam & obscuram effecti rationem assignat; recurrens ad nescio quem fomitem in corporibus motis latitantem, qui ad tempus otiosus, mox actuosus eorum lationem, pro re nata, nunc accelerare, nunc retardare possit. Uter vero intelligibilis rem expediat, mox judicabit Lector.

Sit ergo *a*, prora alicujus navigii; *b*, puppis; *b c*, gubernaculum ad sinistram inflexum, ea ratione, ut primo cum longitudine navis *a b* constituat angulum obtusum, dehinc rectum, tandem acutum: *d e*, sit linea directionis, secundum quam fit impulsus aquæ ad gubernaculum; perinde autem est, sive navis immota, aqua deorsum labens allidat ad gubernaculum, Fig. 6.  
7. 8.

I 2

sive,

\* Stephanus Gradius in *prima Dissertationum quatuor*, Amstel. 1680. impressarum.

No. II. five, nave a vento sursum impulsa, gubernaculum allidat ad aquam stagnantem: utroque enim casu concipiemus, quo pacto gubernaculum  $bc$  per occursum globulorum aqueorum  $e$ , (juxta ea, quæ supra diximus de determinatione motus duarum pilarum sibi occurrentium) debeat impelli per lineam  $ef$  ipsi gubernaculo perpendiculararem, atque per centra globulorum, punctumque contactus transeuntem. Quia vero interim venti impetus, vel remorum efficacia, navem alio propellit, nempe ex  $b$  in  $a$ ; poterimus priorem impulsum, ex  $e$  in  $f$ , considerare, ut compositum ex duobus aliis, quorum unus navem directe ex  $e$  versus  $g$ , alter in transversum ex  $e$  in  $h$ , protrudere conatur; notabimusque, per lationem navigii ex  $b$  in  $a$ , tolli quidem illum motum, qui fieret in contrariam partem ex  $e$  in  $g$ , minime vero alterum, quo idem navigium ad latus, ex  $e$  in  $h$ , impelli debet. Ex his enim manifestum est, si gubernaculum sinistrorsum flexum obtusum cum longitudine navis angulum constituit, debere puppim dextrorsum impelli, (unde prora vicissim sinistrorsum ad gubernaculum converti videtur) eo validius, quod motus iste gubernaculi lateralis cum illa vi, qua agit per modum vectis, in eandem partem nunc conspirat: ubi vero gubernaculum ad navem perpendicularare existit, eo languidiorem liquet fore conversionem proræ ad sinistram; eo quod, evanescente motu laterali, gubernaculo illa tantum virtus relinquatur, qua per modum vectis operari potest: ubi tandem clavus angulum cum nave constituit recto minorem; perspicuum utique esse puto, impulsum lateralem & illum, qui fit per modum vectis, in diversa tendere, proinde navem obtemperare debere prævalenti. Unde quoniam constat, hoc in casu proram in aliam quam prius partem, dextram videlicet, converti, vecte nequicquam contrarium suadente; sequitur, potissimam rationem virtutis, quam gubernaculo ad gubernandos navium cursus inesse videmus, consistere in motu isto laterali a nobis modo explicato, non autem in illo, qui fit per modum vectis.

Attractiones Magneticæ &c

Sed satis diu pelago ratem commisimus; elementum nostrum Terram repetamus, visuri, si qua, in illa Attractionis sese nobis offe-

offerant vestigia. Accedendum autem primo fuisset ad Virtutem No. II.  
 attractivam Magnetis, (cique cognatas attractiones electricas) ni- Electricæ  
 si existimasset vel sublimioris hæc esse speculationis, vel nimis sunt per  
 præclara ea de re *Philosophi* inventa, quam ut in iis non sit ac- Pulsio-  
 quiescendum: quamvis enim, quoad ipsam rei veritatem, multis nem.  
 forte non satisfaciunt; possibilitatem tamen hoc Naturæ miracu-  
 lum per *Pulsionem* explicandi, abunde comprobant: vid. *Princ.*  
*Phil. part. IV. §. 133. seqq.*

Nec magis immorandum esse duxi Vaporum & Exhalationum Attractio-  
 e Terra Attractioni: nam quanquam invenirem CARTESIUM Effluvio-  
 in ejus explicatione satis jejunum, *Cap. II. Meteor. de commoda rum a So-*  
 tamen solutione non desperavi, considerans fieri posse, ut mate- le fit per  
 ria subtilis, calore Solis multum agitata, minutissimas quasque Pulsio-  
 particulas a corporibus terrestribus abradat, quæ avulsæ, cum pos- nem.  
 sint esse minores particulis atmosphæricis, vehementiorem istis  
 concipiant motum, atque adeo fortiolem a centro Terræ rece-  
 dendi conatum, & majorem in specie levitatem acquirant, qua  
 fiat, ut in altum evolare necessum habeant, donec, superata pon-  
 derosiore atmosphæræ parte, in ea regione subsistant, quam ejus-  
 dem specificæ levitatis particulæ occupant. Quod Experimenta  
 Boyliana de effluviis & fumis, in recipiente pleno, ascendentibus,  
 exantlato, subsidentibus, non parum confirmant, vid. *Libr. de*  
*nov. experim. num. 29. & 30.*

Quo pacto porro, oleum attrahatur e vasculo a flamma lam- Attractio  
 padis; res erat explicatu non difficilis, si supponatur, pressionem olei in  
 Aeris flammæ imminentis maximam partem impediri agitatione lampade  
 primi elementi flammam constituentis; huic enim consequens est, fit per Pul-  
 aerem incumbentem oleo restagnanti in vase, illud per ellych- sionem.  
 nium sursum impellere debere. Hinc est, quod Matronæ parsi-  
 moniæ studentes solent operculo vasculum occludere; ut debilita-  
 ta, hac ratione, aeris pressione, oleum flammæ non tanta copia  
 affluat, nec tam cito consumatur.

*Suctionis* vero, & huic affine *Respirationis*, negotium parumper Suctio &  
 videbatur obscurius: nec enim sufficebat dicere, liquorem ideo Respira-  
 per tubum in os sugentis attolli, quod, post attractionem aeris, tio fiunt  
 I 3 liquor per Pul- sionem.

No. II. liquor in tubo nullum amplius supra se pondus sentiat, quo deprimatur; unde obsecundare necessum habeat pressioni aeris externi, & ab illa sursum in os impelli. Quippe idem quæri poterat de aere in tubo, per quamnam pulsionem illi hæc ascendendi vis adveniat. Quare ut totum hoc negotium per Pulsionem expediatur, Microcosmi structura consulenda erit; qua inspecta, deprehendimus, per Suctionem nec attrahi aerem in tubo, nec liquorem post aerem, sed dilatari tantum beneficio certorum musculorum, vel secundum alios diaphragmatis motu, cavitatem abdominis, atque ita rarefieri aerem huic cavitati inclusum, qui hactenus compressos tenuit pulmones, aeremque, in ore & aspera arteria stabulantem ab ingressu in illos arcuit. Iste enim aer, sic rarefactus & ad majus jam spatium expansus, non amplius tanta vi comprimere potest, ut antea, pulmones; unde fit, ut, hac pressione sublata, externus Atmosphæræ cylindrus liquorem sursum per tubum in os, aeremque, ex ore, aspera que arteria, in pulmones impellat. Advertēbam autem simul, fieri non posse, ut cavitas abdominis in tantam amplitudinem distendatur, aerque illi inclusus eoque debilitetur, ut omni prorsus exuatur robore; cum præsertim per inflatos pulmones subinde ad pristinam reducatur angustiam, viresque suas resumat. Unde conclusi, suctione orali liquorem neutiquam in tantam altitudinem elevatum iri, in quantam elevaretur, si, applicata antlia, pressio illa aeris tubo imminentis embolo perfecte interciperetur: quod ipsum quoque testatur experientia; quippe Mercurius etiam maximo adhibito conatu vix ad altitudinem paucorum digitorum solo ore insugi potest; nec credo quenquam esse, qui sibi persuadeat, se sola halitus sui attractione imitaturum Antliam, quæ aquam ad 34 pedum altitudinem in tubum attollere solet.

Attractio  
catenæ &  
Tractio  
currus fi-  
unt per  
Pulsio-  
nem.

Cum hac ratione mihi satisfactum esset circa Respirationem & Suctionem; reliquas quoque Attractionis species perlustrare sustinui. In Attractione quidem Catenæ pulsio unicuique obvia esse potest; utpote qua attracta, præcedens annulus subinde propellit sequentem in flexura. Cui simile quid conspicitur in Tractatione Currus, quæ nihil aliud est, quam plures pulsiones sibi mutuo con-

con-



concatenata. Equus enim pellit ante se helcium seu collare, No. II.  
collare funem, funis clavum, clavus currum, currusque pellit  
axibus suis rotas.

Cum manus attrahit baculum, pulsio partium baculi non ad- Attractio  
baculi fit  
per Pul-  
sionem.  
eo quidem sensibus manifesta est; eam tamen facile sibi quis per-  
suadeat, cum consideraverit, nullius baculi superficiem adeo ex-  
quisite tornatam & lævigatam esse posse, quin infinitis adhuc de-  
hiscat hiatibus & poris, inter quos innumeræ protuberent asperi-  
tates, velut rotidem ansulæ seu manubria, quibus propelli manu  
possit baculus: cujus rei indicio est, quod ad movendum bacu-  
lum non sufficiat, cum immediate, sed superficialiter tantum te-  
tigisse; verum requiratur insuper firma & arcta manus com-  
pressio, qua molles ejus partes baculi poris sufficienter intrudi,  
& ansulis istis applicari possint.

Examinatis ita præcipuis *Attractionum* generibus, credebam  
me in iis omnibus *Pulsionem* satis planam reddidisse, nec posse  
dari aliud exemplum, in quo non pari modo ostendi posset  
*Pulsio*. Sed expecta paulum, & videbis, longe maximas adhuc  
difficultates restare superandas. Quem in finem, ultimo exem-  
plo de baculi *Attractione* manu facta pertinacius inhærebo.

Intelligo ex antedictis, quænam *Pulsionis* partes sint in *Attrac-  
tione* baculi: nunquid vero totius baculi? minime; sed supremæ An par-  
tes baculi  
cohære-  
ant cæ-  
mento?  
tantum ejus partis cui manum immediate applicuisti. Quare ita-  
que moventur reliquæ? An pelluntur? nullum apparet *Pulsionis*  
vestigium. Forsan pellit præcedens sequentem, sequens tertiam,  
hæc quartam, usque ad alteram baculi extremitatem. Id capiat qui  
volet, attrahi reliquas video, pelli (cum sint extra viam partis  
motæ, imo pone ipsam) non capio. Verum, ne desponde ani-  
mum; datur forte occultum quoddam vinculum, cæmentum,  
sive gluten, quod partes baculi ita firmiter connectit, ut nul-  
la possit moveri absque altera. Itane vero? Quale cæmentum?  
miror quo pacto cæmentum a parte baculi præcedente, & se-  
quente a cæmento impellatur. Impellantur autem; habet suas  
quoque cæmentum partes: dic, sodes! qua ratione prior im-  
pellit posteriorem: dabitur fortean cæmenti cæmentum? Nu-  
gæ!

No. II. gæ ! Bona verba, quæso ! nondum cane receptui ; omnia prius tentanda ; meministi, te quondam legisse, corpora dura consta-

Fig. 9. re particulis ramosis, figuram hamorum vel uncinulorum præ se ferentibus, quibus se mutuo instar annulorum catenæ amplexentur. En reperisti tandem mysterium, habes cui tuto insistas ; nempe capis, quo pacto partis superioris *a b* flexura inferior *b* pellat ante se superiorem inferioris *c*, hujusque flexura inferior *d* superiorem sequentis *e*, idque continua serie ad alterum usque baculi extremum. Speciose ! interim ne præcipites tuum *ὑψηλὰ* : clare ni fallor percipis, hamulos istos non esse puncta mathematica, neque in loco indivisibili ; secus enim tota baculi longitudo redigeretur ad punctum. Quid ergo ? adhuc erunt extensi ; habebunt adhuc partes extra partes ; effare quo cemento

An Funiculo ? hæ particulæ cohæreant. Confugere hic ad Funiculum nescio quem, partes corporis tam pertinaciter connectentem ( quod *Francisci LINI* Angli fuit somnium ) strenue nugari est, non philosophari. Nemo enim, ut opinor, concipiet, *LINI* Restiarium adeo fuisse subtilem, ut quemadmodum *APELLES* duxisse olim fertur lineam absque latitudine, iste fabricare potuerit funiculum omnis quoque longitudinis expertem. Si vero habet longitudinem, id est, extensionem ; id est, partes extra partes ; liquet, rationem nondum esse redditam, cur ipsius quoque funiculi partes non dissolvantur ; nec reddi posse, nisi funiculos funiculis in infinitum addere, id est, in infinitum insanire velis. Alia ergo via elabi studebo ; dicam, in baculo non unam tantum esse seriem hamorum vel uncinulorum ( qualis conspicitur in *Fig. 9.* ) Sed innumeras tales esse catenulas juxta se positas, sibi que densissime implexas ( quales adumbrantur in

An foliis  
hamulis  
sibi densissime  
implexis ?  
Fig. 10.

*Fig. 10.* ) ; quo fiat, ut quamvis una altera catenula rumpatur in medio alicujus uncinuli, ea tamen sustentetur ab aliis catenis lateralibus, in quibus nulla talis potuit fieri ruptura, quod forte e regione rupturæ correspondeant flexuræ uncinulorum : Ita quamvis, attracto baculo, uncinulus *im* rumpatur in medio sui *o*, manebunt tamen reliqui a latere *pn*, *nl*, & sequentes integri, quia sunt in flexuris, quæ separationem impediunt. Sed nequicquam

quam hæc affulsit respirandi rima : nonne prævides, quæ jugulum tuum repetit, instantiam? Si una rumpi conceditur catenula, rumpentur omnes, non quidem in flexuris uncinulorum, sed in illorum medio. Ita quamvis flexuræ uncinulorum *p n*, *m l*, & sequentes, prohiberent, ne rumperetur baculus in directum secundum planum *o n r*, ad modum ligni ferra fissi; non possunt tamen impedire, quin singulæ catenulæ aliis in locis rumpantur, una altius, altera humilior, in punctis *o*, *o*, *o*, instar ligni manu contrafacti; atque ita omnium partium baculi divulsio sequatur.

Cum dubius ita fluctuarem, succurrit CARTESII sententia, de causa istius cohæſionis partium duri corporis, quam in earumdem quiete constituit, *Parte secunda Princip. Philos. §. 55.* ubi ait: *Neque profecto ullum glutinum possumus excogitare, quod particulas durorum corporum firmiter inter se conjungat, quam ipsarum quies.* Sed ut verum fatear, non possum a me obtinere, ut ista acutissimi Philosophi decisione hac vice acquiescam; cujus dissensus rationes, salvo aliorum judicio, fusius exponam; (utinam vero etiam hoc ipso gratiam inirem aliquam apud Antiquæ Scholæ Doctores!) An quies sit causa cohæſionis partium duri corporis?

Statim autem animadvertimus, explicationem cohæſionis corporum per quietem involvere meram, quam vocant, principii petitionem, atque explicationem ejusdem rei per eandem; quod omnibus a partium studio alienis patebit, si modo considerent, se non aliam habere posse notionem cohæſionis corporum, & quietis eorundem. Quid enim, obsecro, aliud est cohærere duo corpora, quam non separari ab invicem? & quid non separari, nisi non transferri unum ex vicinia alterius? non transferri autem ex hac vicinia, nonne idem est quod non moveri? Cum ergo cohæſionis conceptus nihil involvat præter negationem motus, enunciatio hæc, Cohæret, quia quiescit, resolvetur in istam, Non movetur, quia quiescit. Nescio vero quid sit *ταυτολογεῖν*, si hoc non sit.

Observandum vero præterea, dictionis istius, Cohæret, seu non movetur, quia quiescit, duplicem esse posse sensum, vel enim significat, corpora, eo ipso quo quiescunt, vel dum quiescunt, mo-

Jac. Bernoulli Opera.

K

veri

No. II. veri non posse: vel innuere vult, illa quæ primo minuto juxta se quieverunt, hac sua quiete, causam esse, non tam quod eodem illo minuto cohaerint, quam quod secundo, tertio, & sequentibus minutis, coherere pergant. Si prior sensus obtineret, tum, præter inanem *ταυτολογίαν*, compositionis quoque luderetur sophismate: Nam si quis ad probandum, nunquam motum iri corpora, rationem sufficientem dari credat ex eo quod, dum quiescunt, moveri non possunt; ille non minus impertinens esset, ac si quis probaturus se nunquam moriturum, diceret se, dum vivit, mori non posse. Neque posterior sensus valde approbandus: Quia enim cohesio nihil aliud dicit præter meram negationem motus, atque adeo ipsissimam quietem; mirum nobis videbitur, quo pacto quies efficere possit, ut corpus perpetuo quiescat, cum nihil sit causa, vel efficiens, vel conservans, sui ipsius. Facile equidem concipimus, corpus quiescens, quamdiu a nullo alio impellitur, perseveraturum in hac sua quiete, eo quod nihil possit moveri a seipso: habere vero vim nonnullam positivam ad impediendum ne moveatur, etiam tum cum ab alio ad motum sollicitatur, intellectu valde difficile est. Quid enim esset illa vis? an consistit in hoc, quod corpus quiescens alii corpori tam pertinaciter adhæreat, mediante funiculo quodam, qui separationem eorum prohibeat? an potius quod vim & conatum moventis, æquali vi & conatu, a se repellat, per quandam reactionis speciem? Verum quod quiescit, qui agere hac sua quiete poterit in aliud corpus? Sed pone agere; quæ ratio, cur hæc quietis actio, in uno corpore minima vi, in altero vix maxima, tolli potest? an ergo in uno corpore efficacior, in alio minus efficax est? absurde; cum quies non recipiat magis & minus, instar motus. Fatendum sane est, per impulsum moventis non semper tolli quietem corporis quiescentis; unde hoc *resistere* dicitur; verum quis scit, an hæc resistantia positivam quandam supponat vim, in ipso corpore quiescente latitantem; an aliquid aliud potius, quod adhuc investigandum est. Antequam igitur cognoscamus, quid hoc sit, suspendamus tantisper judicium; & credamus, hanc esse Dei voluntatem, ut corpus, cum, tali, vel tali

tali mole, aut celeritatis gradu, ad aliud corpus quiescens No. II. appellens, illius quietem nunc superare, nunc non superare debeat, idque juxta æternas quasdam leges, quas primus Motor naturæ in creatione indidisse censendus.

Quanta autem virtute & mole debeat instructum esse unumquodque corpus, ut movendo alii corpori quiescenti aptum sit, determinabimus ex generalibus illis motus regulis ab ipso CARTESIO allatis; ut si forte nobis corpus occurrat quod moveri nequit, cum juxta regulam moveri deberet, concludamus ejus resistantiam necessario aliunde quam a quiete derivandam esse. Harum regularum quinta est: *Si corpus quiescens C esset minus quam B, tunc quantumvis tarde B versus C moveretur, illud secum moveret, partem scilicet sui motus ei talem transferendo, ut ambo postea æque celeriter moverentur.* Hujus recordatus Auctor, postea §. 63. recte sibi objecerat exemplum clavi ferrei, cujus ambæ medietates, quarum singulæ pro uno corpore numerari poterunt, quamvis manibus nostris longe minores, tam firmiter tamen sibi mutuo adhærent, ut nulla manuum vi ab invicem divelli possint, uti juxta citatam regulam divelli deberent, si nullo alio glutino sibi invicem adhærerent, quam quod juxta se quiescunt. Ad hanc autem objectionem sibi respondet ibidem *Philosophus*, rationem, cur clavus sola manuum vi frangi nequeat, hanc esse; quod manus nostræ, quæ ob mollitiem suam ad fluidorum corporum naturam accedunt, non totæ simul agere possint in clavum, sed ea tantum ipsarum pars, quæ clavum proxime tangit; unde cum hæc pars minor sit parte clavi, cui incumbit, mirum non esse, cur facilius a reliqua manu separetur, quam pars clavi a reliquo clavo.

Ut vero precariam hanc esse responsionem ostendamus, varia nobis observanda venient: Primo, si quies partium clavi illum manu frangi impediat, eademque sit causa, cur uno ejus extremo attracto sequatur pone alterum; quid dicendum de bacillo ligneo æqualis crassitie & molis, cujus si unam extremitatem attrahas, prompte sequi videbis reliquam, priorique cohæ-

K 2

An per quietem sufficienter explicetur, cur clavus manu frangi nequeat?

**Nº. II.** rere? An quia quiescunt ejus partes juxta se mutuo? Si sic, quidni hac quiete fiet, ut eadem difficultate rumpatur bacillus, qua flectitur clavus? nunquid enim pars manus minor est parte bacilli, cui incumbit? nam tametsi lignum habeat plures ferro poros, cogitandum habere vicissim quoque pauciores manus partes sibi incumbentes, quæ in illud agere possint.

Præterea, si eadem est quietis ratio in attrahendo, atque in frangendo clavo; nulla sufficiens ratio reddi poterit, cur in attractione clavi pene nullum, in ejus inflexione maximum conatum adhibere soleamus; siquidem æque, per utramque, partes clavi ad motum & ad separationem mutuam invitantur.

**Fig. II.** Non parum etiam gestio audire rationem, ob quam lignum satis crassum, applicato genu, vel etiam sola manu (pollice ad latus ligni innixo) facile dirumpi queat, conatu frangendi facto juxta lineam  $ab$ , vel  $ac$ , perpendicularem longitudini baculi  $de$ ; cum tamen tenuis bacillus, aut corpus adhuc fragilius, nullis humanis viribus diffringi possit, ubi conatus adhibetur in directum secundum lineas  $ef$ , &  $dg$ : tametsi enim obendi posset, id fieri ob naturæ a vacuo abhorrentiam, eo quod, facta hoc ultimo casu separatione, aer non posset eodem momento a lateribus bacilli ad ejus medium irruere; non tamen ita respondebunt Vacuistæ, nec inter Plenistas illi, qui quietem coactionis causam statuunt.

Iterum miretur forte aliquis, quare eadem manuum vis, quæ separat alia quiescentia multo majora clavo, quæ librum de tabula separat juxta quam quievit, ingentia pondera in terra quiescentia in altum elevat, non possit tollere quietem particularum clavi. Dicis, superficies libri & tabulæ, ponderis & terræ, non immediate se contingere, sed intercedere utrinque aerem, vel fluidum aliud subtilius. Verum ipse hic aer, qui intermediat, ejusve particulæ, aut quiescunt etiam juxta superficiem libri vel ponderis, aut moventur: si quiescunt; iterum redibit quæstio, cur hanc quietem superare valeat vis manus, cum non valuerit superare illam particularum clavi longe minoris: si moventur; etiam liber in mensa jacens, & pondus in  
terra



terra quiescens movebuntur, cum particulæ aeris nequeant transferri ex vicinia libri & ponderis, quin hæc transferantur simul ex vicinia illarum: sic nihil demum sola manu moveri poterit, quod prius non motum fuerit; sic omnia corpora aeri exposita, etiamsi non impulsa, movebuntur; sic movebuntur ædificia, turres, montes, &c. Scio, quamvis hæc a communi loquendi usu alienissima, in Auctoris tamen hypothese non adeo absurda esse. Sed illud potissimum hic observandum; quod proprie hic quæstio non sit, an corpus aere undiquaque ambitum recte dicatur moveri, necne, respectu habito ad aerem ambientem; hæc enim relatio, pure extrinseca, nullam realem mutationem vel modum addit corpori: sed quæritur, an corpus istud absolute per se, & tanquam in vacuo spectatum, possideat illam vim, quæ agitat corpora, quæque essentiam motus constituit; an vero hæc vis insit soli aeri ambientem, an denique utrique, ita ut aer allidens ad corpus, ei partem harum virium communicet? Neutrum dicere poterit CARTESIUS, quin regulæ suæ quartæ contradicat: si omnis movendi vis sit penes aerem, nulla penes corpus crassum aere circumdatum; quo pacto illi a manu toties minore ista vis imprimitur? sin illam communicatam supponat ab aere, meminisse debuisset, fluidissimi corporis illas tantum particulas in corpus agere posse, quæ illud proxime ambiunt; sed hæc omnes simul sumptæ forte sexcenties minores sunt mole commovenda; quo pacto ergo huic partem motus sui juxta regulam communicabunt? Sed sensibili aliquo exemplo forsan evidentius insufficientia explicationis Cartesianæ demonstrabitur.

Quem in finem repetamus idem, quod nobis Auctor subministravit, exemplum clavi: Sumatur clavus ferreus, intrudatur mediotenus arcto foramini parietis, altera medietate extra parietem prominente; hanc desuper malleo pete, & comperiere, illam sat validos sustinere ictus, antequam vel curvetur semel, nedum frangatur. Si nullum aliud glutinum esset, quod partes clavi conduceret, quam ipsarum quies; sequeretur juxta citatam regulam, ad impulsus mallei, utpote corporis clavo longe majoris, partem clavi prominentem a reliqua non tantum avulsam, sed ea

No. II. quoque celeritate latum iri, quæ æqualis fere est velocitati mallei; antequam clavum attigisset. Supponamus enim malleum non nisi nonagies novies quantitate excedere clavum, & uno pulsu arteriæ spatium unius perticæ in aere emensum fuisse; communicabit igitur, juxta regulam, clavo in occurſu centesimam partem sui motus, nonaginta novem pro se retentis; ut sic malleus & clavus æquali celeritate ferantur: nempe quia malleus centesimam tantum partem motus sui amisit, uterque pulsu arteriæ  $\frac{1}{100}$  unius perticæ emetiri debet; quod sane fieri nequit, nisi pars ista clavi ab altera quiescente separetur. Nec valet hic *Philosophi* exceptio: malleus enim, cum corpus sit, non instar manuum molle, sed durissimum, hinc non tantum superficie illa, qua clavum immediate contingit, imo nec illa sua crassitie tantum, quæ clavo directe incumbit, sed tota sua mole & soliditate in clavum agere censendus est. Hanc quippe esse corporum durorum naturam experitur quivis, qui magnum onus in capite gestans, non tantum sentit pondus illius cylindri, qui capiti directe incumbit, sed & totius molis reliquæ, quæ extra caput prominet.

Ut vero rem magis illustremus, suspendatur ex hoc clavo parieti infixio malleus; evidens est, non tantum malleum, sed præterea magnum pondus eidem clavo appensum ab ipso sustentatum iri. Pari ratione axiculus bilancis utramque lancem, una cum multis centumpondiis, & uncus ferreus satis exiguus immensæ molis campanas sustinet. Idem autem usu venit in his exemplis, quod in præcedenti: si enim ibi clavus per mallei ex alto ruentis impetum ad separationem invitatur, non minus hic clavus, axiculus, & uncus a tam vastis ponderibus sibi appensis, ad quorum molem nullam pene habent proportionem, sollicitantur ad motum: de quo facile conveniemus, si perpenderit, non posse appendi hæc pondera, quin tota sua mole super clavo, axiculo, vel unco gravitent, illosque premant; premere autem non posse absque conatu illos loco movendi, adeoque partem a parte separandi. Quæ causa ergo, cur nulla actualis separatio sequatur? anpe quies particularum clavi, axiculi, unci? Fabulam nobis

nobis narras, CARTESI: annon hæc tolli deberet vi regulæ No. H. tuæ quintæ per pressionem vastorum corporum ipsis appenso- rum, ad quorum molem nullam imaginabilem proportionem habent illæ particulæ?

Postquam itaque certo certius cognovissem, neque catenas, nec hamulos, nec funiculum, nec ipsam quietem, nec quodvis aliud cæmentum, quod inter particulas durorum corporum intercedere forte posset, earum cohæsionem sufficienter explicare; judicavi longe aliud hic latitare mysterium. Et quum perspicerem, duo corpora perinde cohæsura, sive ab interno vinculo connectantur, sive ab externa vi comprimantur; non dubitavi tandem concludere, cohæsionem partium duri corporis necessario acceptam ferendam extrinseco alicui corpori comprimenti, quodcunque demum illud fuerit. Tali enim, si quod detur, glutino longe sane firmitus conjungi intelligemus particulas durorum corporum, quam ipsarum quiete, aut alio quovis cæmento, modo indicibili illas connectenti.

Firmitas  
corpo-  
rum tri-  
buenda  
compres-  
sioni cor-  
poris ali-  
cujus ex-  
terni.

Cui si animum advertisset CARTESIUS, non difficulter agnovisset infirmitatem illius sui dilemmatis, quo usus fuit ad quietem hujus cohæsionis causam asserendam; quando pergit loco allegato: *Quid enim esse posset glutinum istud? non substantia, quia cum particula ista sint substantia, nulla ratio est, cur per aliam substantiam potius, quam per se ipsas jungerentur: non etiam est modus ullus diversus a quiete; &c.* Quid si enim subsumtionem invertam: *Atqui non est modus* (proinde nec quies); modi enim non conjungunt, quia modorum non est agere, sed substantiarum per modos. *Ergo substantiam esse oportet*: Sed si sit substantia, an illa nulla poterit esse alia, quam ipsæ cohærentes particulæ? imo quævis alia potius, quam ista; cum uti nihil a seipso moveri, ita nihil per seipsum alteri jungi possit: Notandum autem, non obscure hic prodere *Philosophum*, se per illam aliam substantiam nullam aliam intellexisse, quam intermediam inter duas particulas intercedentem; cum hac ratione verum sit, ad vitandum progressum in infinitum, subsistendum necessario esse in duabus tandem particulis, quæ per se cohæreant, absque interventu aliarum.

rum

No. II. rum mediarum. Sed dum ita ratiocinatur, non advertendo ad aliam substantiam externam & ambientem, qua particulæ connecti possint; perinde facere videtur, ac si quis librum sub compactoris prelo videns, & ad prelum non attendens, inferre vellet, cohæSIONem foliorum quieti illorum ascribendam esse, ex eo quod nequeat attribui vel ipsis foliis, vel ulli substantiæ interceptæ inter folia, utpote quæ nulla est. Imo mirari merito subit, cur acutissimus Philosophus, qui primus claros in Philosophiam conceptus intulit, quique corporum gravitatem, non indicibili cuidam principio interno, sed ambientis materiæ pressioni ascripsit; cohæSIONem tamen illorum intrinsecæ quieti, cujus quæ sint connectendi vires, intelligere mens nostra nequit, quam vero externæ pressioni tribuere maluerit.

Et quidem Gravitati Atmosphære.

Postquam itaque satis, ut opinor, constiterit, cohæSIONem durorum corporum nulli alii causæ, quam compressioni alicujus corporis externi deberi; non multum porro illi determinando insudabimus, cum præter Aerem nullum detur, quod corpus durum immediate tangat & ambiat. Illud tantum inquirendum, an cum verbi gr. manu attraho baculum, ille duntaxat aer, qui per motum brachii mei expellitur, & per circulum ad alterum baculi extremum deferatur, baculum post manum pellat, ejusque partes ita cohærere faciat. Id namque videtur suaderi ex eo, quia quo ponderosius corpus quod attrahitur, eo major ei attrahendo conatus adhibendus; propterea quod majus pondus magis quoque resistit aeri pellenti se, & consequenter manui pellenti aerem. Verum quod solus aer manu expulsus hanc baculi cohæSIONem non efficiat, exinde liquet, quia nulla est ratio, quare iste aer expulsus potius ad imum baculi per majorem ambitum, quam per minorem peripheriam ad quamvis aliam ejus partem intermediam deferatur: cum enim partes baculi nullo cohæreant cæmento, & per attractionem manus superior tantum baculi pars ad motum sollicitetur, adeoque disponatur ad hiatus relinquendum inter se & inferiorem, locumque aeri cedendum; videntur potius, aerem manu expulsam inter illas sese insinuaturum, quam vero longiori via ad imum baculi perrecturum; cum natura

natura via, quantum licet, brevissima agere nitatur. Illud vero No. II. cum primis hic animadvertendum, quod si solus aer a manu attrahente expulsus cohæſionis causa sit; sequeretur, si loco attractionis suspenderetur in aere baculus, eum subito in partes collapsurum esse, quod tum nullus amplius a summo baculi extremo propelleretur aer; cessante enim aeris expulsionem, tanquam causa, deberet cessare cohæſio partium baculi, velut effectus. Unde cum cohærere pergant, alia huic effectui causa querenda; & quandoquidem præter generalem totius Atmosphæræ pressionem (qua gravitatis effectus in corporibus terrestribus producit) nulla alia meditati se pressio offert; necessaria consequentia infero, hanc demum veram esse istius cohæſionis causam.

Cui assertioni stabiliendæ opportune incidit celebre illud Experimentum de duobus marmoribus politis & lævigatis, quæ sibi juncta, ut nullus aer intermediare possit, quovis cæmento tenacius cohærescunt, adeo ut nisi maxima adhibita vi avelli a se mutuo nequeant. Quod Phænomenum, ubi per pressionem vel gravitatem atmosphæræ explicant Scriptores Hydrostaticorum, particularem in-  
 Parallelismus inter cohæſionem marmorum politorum, & particularem insensibilem duritiam corporis.

hoc volunt: Cum duo marmora ita sibi juncta in altum elevantur, vel ex alto suspenduntur; per hanc elevationem vel suspensionem fit, ut marmor inferius nullum amplius supra se pondus habens, quo deprimatur, a pondere lateralis aeris sursum impelli debeat contra superficiem inferiorem superioris marmoris, atque ita suspensum teneri, quamdiu, una cum pondere annexo, si quod annexum fuerit, non præponderat simili cylindro aërio, (vel potius prismati, si marmor sit quadrangularis figuræ) a marmoribus ad ultimos atmosphæræ limites protenso. Pari modo in attractione baculi existimandum est, pondus aeris supremæ ejus superficiem incumbens reprimi & impediri, ne gravitare possit super particulis inferioribus; quo concessio, quid evidentius, quam has sursum impelli debere per pondus aeris lateralis, atque ita superioribus firmiter agglutinari?

Manifestum quoque est, eundem effectum sequi debere, sive

*Jac. Bernoulli Opera.*

L

at.

No. II. attrahatur baculus, sive suspendatur; perinde uti coherere solent marmora, sive dum e terra elevantur, sive dum ex unco suspensa quiescunt; quia utroque in casu particulae inferiores a pondere sibi incumbente liberantur, sufflaminato a supremis impetu desuper ruentis aeris.

Facilis etiam hinc redditur ratio, cur aer lateralis pellat integrum baculum potius, quam sese insinuando partibus baculi pel- lere possit tantum superiores: nam eo ipso quo attrahere conor vel suspendere baculum, tollo eodem momento pondus aeris incumbentis ab omnibus partibus intermediis usque ad infimam; adeo ut antequam aer partibus baculi alicubi sese intrudere pos- sit, infima ejus particula nullum amplius supra se pondus ha- bens, debeat ab aere laterali sursum impelli, & pellere ante se superiores. Quare quamvis in baculo sit series innumerarum ta- lium particularum sibi coherentium, non poterit tamen fieri, ut in ejus attractione vel suspensione ulla ab alia sejungatur; quemadmodum nullum dubium est, etiamsi tria, quatuor vel plura complanata marmora sibi superficietenus jungantur, ea omnia non minus cohaesura, quam si duo tantum in experi- mentum adhibeantur. Ex quibus omnibus constat, idem fieri in cohaesione particularum duri corporis, quod fit in illa mar- morum politorum; hoc tantum cum discrimine, quod hic in- dustria humana circa duo magna corpora poliando praestat, quod natura in superficieculis particularum insensibilium coaptandis praestare solet. Ad quem manifestum parallelismum si attendamus, mirari non parum subit, quod recentiores Philosophi in co- haesione marmorum aeris pressionem agnoverint, nec ean- dem repererint in cohaesione partium insensibilium duri cor- poris. \*

Ne

\* Cum hanc dissertationem ad umbilicum fere perduxissem, incidi in Exc. Dn. BOYLEI Tractatum de *Historia Firmitatis corporum*, e quo perspexi, Nob. Authori jam olim suboluisse vim aeris in *conneſtendis duobus corporibus sensibili mole constantibus* (non audet adjicere, in *conglutinandis particulis insensibilibus ejusdem corporis*) *sect. 8. & 24.* Tametsi vero non parvam in- de



Ne quid vero assumamus, quod alii sensuum & infantiae præ-  
 judiciis occupati, vix largientur, consultum erit, ut disserta-  
 tionis nostræ orbitam tantisper deferamus, donec examinaveri-  
 mus, an hæc *Aeris Pressio* seu *Gravitas* extra omnem jam dubi-  
 tationis aleam sit posita, ne chimæram videamur pro principio  
 nostro assumere. Primum & præcipuum, quod illi natales de-  
 dit, est celeberrimum illud Experimentum Torricellianum de  
 Argento vivo, quod tubo vitreo superne obstructo inclusum ad  
 certam & determinatam altitudinem in illo suspensum hæret:  
 Sumitur enim Tubus vitreus cylindricus *a b*, altera sua extre-  
 mitate bene clausus; isque impletur argento vivo; dein inver-  
 titur, obstructo prius digito orificio ejus, ne quid effluat; in-  
 versusque immergitur cum claudente digito in vasculum quod-  
 dam *m n* alio argento vivo repletum; postmodum subtrahitur  
 paulatim digitus; quo subtracto, deprehenditur argentum,  
 quantumvis ponderosum, minime tamen in vasculum effluere,  
 sed tubi summitati affixum hære, dummodo tubus non altior  
 fuerit 29 circiter digitis. Idem animadvertitur, si loco Mercu-  
 rii quicunque alius adhibeatur liquor, puta Aqua; qua si tubum  
 quantumvis procerum dicto modo repleveris, eumque inver-  
 sum in aliam aquam stagnantem immerferis; subtracto di-  
 gito, reperiēs eam tubi summo adhuc affixam hære; imo  
 tametsi postea tubum e liquore restagnante omnino extra-  
 has, non defluet tamen e tubo aqua, dummodo tubus non ni-  
 mis ampli fuerit orificii. Idem vero quoque paucis mutatis  
 effectui dederis; si assumpta, loco tubi una extremitate clau-  
 si, fistula utroque orificio aperta, immergatur liquori alicui ad  
 summitatem usque, eoque repleatur, ac postmodum superiori  
 orificio digito obstructo extrahatur: hoc enim facto, liquor in  
 fistula adhuc suspensus hærebit, quamdiu obturatum manet ejus  
 orificium; quod jam vulgare est in cylindris illis, e laminis

No. II.  
 Gravitas  
 Aeris sub  
 examen  
 revoca-  
 tur.

Experi-  
 mentum  
 Torricel-  
 lianum.

Fig. 12.

L 2

ferri

de lucem istis afferre potuissem, & nonnulla alio disponere ordine: consul-  
 tius tamen judicavi, nihil meditationibus meis addere, easque hic recensere,  
 quo primum naturalissimo ordine sese menti meæ obtulerunt.

No. II. ferri confectis, quibus vina e doliis attolli solent. Sed quid mirum, præoccupas, non descendere liquores in tubis; cum enim, ob clausum tubi verticem, nullus aer possit loco liquoris descendens succedere, necesse est ut sic suspensus hæreat ad impediendum vacuum. Sed expecta paulisper, & videbis, longe aliud hic latitare mysterium; præterquam enim quod Vacui metus finem tantum dicat hujus suspensionis, non causam ejus efficientem; ipsi quoque non semper congruit experientia.

Fig. 13. Quare sumatur nunc Tubus *a d*, altior  $29\frac{1}{2}$  digitis, isque denuo repleatur argento vivo; reliqua peragantur ut prius, digitusque subtrahatur; jam si natura tantopere abhorreret vacuum, quo pacto sibi consuleret? certe suspensum teneret in tubo liquorem, si saperet; quandoquidem per descensum liquoris in tubo breviori non magis vacuum timendum sit, quam per descensum in altiori. Sed quid sit? non obstante prætenso hoc vacui metu, descendit mercurius ad *l*, usque dum altitudinem  $29\frac{1}{2}$  digitorum supra argentum in vase restagnans obtineat, qua quidem in statione quiescit, nec humilior descendit. Pari modo deprehensa est aqua, per antlias suctorias, non ad quamecunque altitudinem elevari posse, sed in altitudine 34 circiter pedum subsistere, quam cum attingit, nequicquam agitabitur embolus, nihil amplius efficiet.

Explicatur per  
aerispressionem.

Horum ergo phænomenorum ut causam reddant sanioris Philosophiæ Patroni, respondent, ideo hydrargyrum, vel aquam, in tubis brevioribus non descendere, quoniam pondus similis columnæ aeris *ef*, a terra ad summos usque atmospheræ limites protensæ, & pro base *ei* habentis partem superficiiei liquoris in vase stagnantis, fortius premere subsumitur super hanc suam basin, quam tantillum pondus liquoris in fistula contenti premit super partem superficiiei *ac* lateribus fistulæ interceptam; unde fiat, ut debilior hæc liquoris pressio fortiori illi aeris externi cedere, ipseque proin in fistulam intrudi, in eoque pensilis hædere necessum habeat: hancque similiter esse rationem, cur dicti liquores in tubis longioribus descendant; nempe quia jam liquoris cylindrus, in fistula *ad*, præponderat simili cylindro atmo-

mosphærico, extra fistulam, *e f.* Unde concludere promptum No. II. est, si externus atmosphæræ *e f.*, & internus liquoris *al*, æquiponderant; nec ascensurum nec descensurum amplius in tubo liquorem. Quanta vero liquoris cujusque portio simili cylindro aërio æquiponderare censenda sit, experientia sola nos docere potest; quæ cum testetur, argentum semper in altitudine  $29\frac{1}{2}$  digitorum, & aquam 34 circiter pedum acquiescere, inque æquilibrio hære; concludimus, cylindro aeris, a superficie liquoris stagnantis ad summitatem atmosphæræ protenso, æquiponderare similem cylindrum argenteum  $29\frac{1}{2}$  dig. & aqueum 34 pedum; qui duo proinde & inter se æquiponderabunt: unde simul ratio iniri poterit specificæ gravitatis utriusque liquoris; cum enim gravitates duorum corporum ejusdem molis sint in ratione reciproca altitudinum similium cylindrorum æquiponderantium; erit gravitas argenti ad gravitatem aquæ, ut 34 pedes ad  $29\frac{1}{2}$  pollices, id est, mercurius erit quam proxime quatuordecies in specie aqua gravior; quod ipsum liquoribus ad bilancem examinatis experientiæ consonumprehenditur.

Explicatis ita breviter, juxta mentem saniorum Philosophorum, De ad-  
causis suspensionis liquorum in tubis; superest, ut examinemus suctione li-  
ca, quæ huic explicationi possunt in contrarium objici. Itaque, quoris e  
si aer, gravitatis suæ pondere vel pressione, sustentet in tubo clau-  
quorem; colligi debet, si quo artificio pressio illa aeris externi so vel la-  
arceri & impediri possit, ne in liquorem inclusum sese exerat, gena.  
fore ut liquor, toto suo pondere, repente deorsum ruat; sublata  
enim causa, deberet cessare effectus. Hoc autem artificio ut, sine  
omni mysterio, effectui detur, applicetur os orificio inferiori fistu-  
læ alicujus *r s*, superius sigillatæ & repletæ aqua; atque intus su-  
gatur seu attrahatur aqua; quæ, hac ratione, magno impetu in os  
irruere debere videtur; idque duplici jure, semel vi suctionis, se-  
mel vi propriæ suæ gravitatis, quæ libere nunc sortiretur effectum,  
utpote non amplius impedita a pressione aeris externi. Sed quid  
fit? eventus accidit plane contrarius: liquor in fistula hæret per-  
naciter, nec nisi difficulter in os descendit; uti experientur illi, qui  
e lagena, ore totum ejus orificium obtegente, bibere conantur.

Fig. 14.

L 3

Quam-

No. II. Quamnam ergo assignabimus causam, cur admoto ore non descendat liquor? videtur profecto, omnis agentis externi pressio, ore intercepta cum sit, causam suspensionis non alibi quærendam esse, quam intra ipsum tubum. An ergo confugiemus ad vacui fugam, dicendo, ideo liquorem non descendere, quia si sugenti obtemperaret, vacuum relinqueret in superiore fistulæ parte? An LINI arripiemus funiculum, seu tenuem substantiam a liquoribus abrasam vel abradendam, & more funiculi liquoris superficiem cum superiore tubi superficie connectentem? Sed quia institutum nobis est de rebus loqui, quas concipere valeamus; nec fuga vacui, nec LINI funiculus tutum nobis præstabit asylum: quid ergo? repetemus *Aeris pressionem*; nec temere causam, infinitis alias nixam experimentis, deferemus; quamvis forte, prima fronte, difficultas omnis superari nequeat: illam potius conciliare cum nostro casu annitemur. Quamobrem considerandum, quid in Inspiratione & Suctione contingat, videndumque, an idem in re præsentī locum habeat. Cum musculi thoracis (vel, ut alii, diaphragmatis motus) inflant abdomen, dilatari solet cavitas illa, in qua jacent pulmones; quo fit, ut exiguus ille aer pulmones ambiens, in majus spatium extendatur ac rarefiat, neque amplius tanta vi pulmones constringere possit, ut fecerat antea; quare necessum est, ut prævalens jam atmospheræ pondus aerem sine obstaculo in nares & os, perque asperam arteriam in pulmones, ipsum vero liquorem per tubum in os intrudat, ubi a muscūlis œsophageis abreptus in debita porro sibi vasa devehitur. Applicaturi jam hæc ad rem præsentem, advertimus forte fieri posse, ut in dicto casu nulla derur suctio: ubicunque enim suctio est, ibi venter intumescit, & aerem proximum e loco expellit; sed cum jam antea omnia supponantur plena, non posset pelli aer, nisi in locum, quem deseruit aqua attracta: ad hunc autem locum cum non pateat accessus, ob orificium digito obturatum, sequitur aerem non posse pelli, nec ventrem expandi, nec proin aquam in os insugi. Cum vero & hac ratione sequi videatur, si antlia, loco oris, applicata fuerit tubo altera sui extremitate clau-

676

so, nec embolum quoque ipsum posse adduci, eo quod aer No. II.  
ab embolo expulsus locum non inveniat quo se recipiat; quod  
tamen frequenti refragatur experientia. Quare ut hæc concilie-  
mus, aliud medium non superest, quam ut dicamus, embolum  
propterea propellere posse aerem, quod satis habeat virium ad  
illum condensandum, id est, ad expellendam materiam subti-  
liorem, inter aeris particulas crassiores natantem, eamque in-  
tubum intrudendam; musculos vero thoracis non sufficientibus  
ad aerem condensandum viribus esse instructos: proinde abdo-  
men non posse aerem ambientem expellere, nec ejus locum oc-  
cupare, citra dimensionum penetrationem. Hinc enim ratio,  
quare embolus adduci facile possit, & adductum prompte se-  
quatur liquor, non vero identidem dilatari queat cavitas pulmo-  
num; qua dilatatione negata, nulla potest fieri suctio. Respon-  
deri etiam posset, tametsi cavitas illa per conatum musculorum  
ægre quodammodo ampliatur, aerque illi inclusus tantundem ra-  
refiat; illum tamen sufficientes adhuc posse retinere vires susten-  
tando tantillo cylindro liquoris inclusi, ejusque descensui impe-  
diendo, præsertim quia, ob exclusam, obturato orificio, at-  
mosphæræ pressionem, liquor proprio duntaxat pondere descen-  
sum molitur.

Sed non immerito quis porro quærat; unde fiat, quod par-  
va illa aeris molecula, sive sit in statu suo naturali, sive in sta-  
tu modicæ dilatationis, reprimere possit pondus multo majoris  
copiæ liquoris alicujus incumbentis, eumque a descensu cohibe-  
re; quare non potius liquor iste, tanquam multo ponderosior,  
aerem in corpore humano stabulantem condenset, quo in angus-  
tias redacto, aperta illi pateret descendendi via? Sciendum ita-  
que, Physiologos modernos in aere, præter gravitatem, con-  
siderare vim quandam, quam vocant, *Elasticam*; ita compara-  
tam, ut minima portio aeris alicubi incarcerationi vel inclusi, in-  
sustentandis aut pellendis liquoribus tantum possit, quantum to-  
tius atmosphæræ pondus; adeo ut, per hanc vim pauxilli ae-  
ris corpori humano inclusi, aqua non minus in tubo sustentari  
debeat, quam sustentaretur, amoto ore, a toto pondere at-  
mosphærico.

De Ela-  
tere Aeris  
ejusque  
effectu.

Per

No. II. Per idem elaterium, ut opinor, explicabunt sequens experimentum : Inferatur inferiori ejusdem fistulæ *r s*, aqua repleta, & ad perpendiculum erectæ, orificio, loco oris nuper admoti, orificium alterius fistulæ *t u*, inferiori sui extremo clau-

Fig. 15. sæ vel hermetice sigillatæ; sic ut orificia fistularum *t r* communicationem habeant invicem, sed ita arcte sibi jungantur, ut nullo modo aeri externo ingressus permittatur : quid fiet? hærebit adhuc suspensus in superiore fistula liquor, quamvis nullus aeri laterali externo pateat accessus ad liquorem sursum pellendum : quantum enim ad aerem in inferiore fistula *t u* contentum, is non videtur solus hoc præstare posse; propterea quod, cum aqua longe sit in specie gravior aere, pressio cylindri aquæ deorsum multo deberet prævalere pressioni tantilli cylindri aeris sursum. Hic igitur, inquam, Elateristæ iterum ad virtutem aeris elasticam recurrent; qua fieri possit, ut parva moles incarcerati aeris tantam vim habeat sursum premendi liquorem, quantam haberet integer aeris cylindrus ad extimam usque atmosphæræ superficiem extensus.

De suspensione liquorum in loco clauso, aut obstructo vasculo. Eundem elaterii effectum conspici autumant in observationibus de hac suspensione liquorum factis in loco aliquo clauso, cubiculo puta, recipienti nondum evacuato, aut ubi solummodo vasculum inferiori tubi orificio appensum obturatum fuerit : in omnibus enim his casibus, hærebit suspensus liquor, non minus atque si experimentum subdio, extra recipiens & recluso vasculo captum fuisset; indicio nempe, aeris parietibus conclavis aut recipientis lateribus inclusi, vel inter superficiem liquoris stagnantis, vasculique operculum intercepti, claterem æquipollere gravitati totius atmosphæræ.

De aere relicto in summitate tubi. Quod vero istud, de elaterii æquipollentia cum atmosphæræ gravitate, assertum non ita crude, ac sine limitatione, intelligendum sit, ex sequenti patebit experimento : Sume commodæ altitudinis fistulam *m n*, utrinque patulam; ejusque inferiori orificio digito obstructo, per superius infunde mercurium; relicto tamen, in summitate tubi, uno alterove pollice aeris, sic ut mercurius occupet spatium *b*, aer spatium *a* : Immerge dein tu

Fig. 16.



tubum, cum claudente digito, in argentum vasculi *q*; admo- No. II.  
toque alio digito supremo fistulæ orificio, subtrahe alterum ar-  
gento immersum; quo facto, descendet quidem notabiliter li-  
quor, multoque humilior, quam solo pondere tantilli aeris in-  
clusi deprimi posset, nempe per spatium *y*; nihilominus ma-  
ximam adhuc partem suspensus hærebit; qui tamen lapsum om-  
nimodum non posset evitare, si aer inclusus elatere suo tantun-  
dem in illum ageret, quantum, deobturatora fistula, tota cy-  
lindri atmospherici moles; propterea quia pressio cylindri ex  
liquore & aere incluso composita, pressione similis cylindri ex-  
terni ex puro aere constantis, tanto foret validior, quanto li-  
quoris inclusi gravitas excederet gravitatem æqualis molis ae-  
ris.

Ut itaque cautius mercari discamus, circa rem maxima etiam  
alias obscuritate involutam, operæ pretium me facturum arbi-  
tror, si quam notionem de hoc aeris elaterio habeamus, &  
quousque extendendum sit, explicem. Hunc in finem autem,  
altius paulo repetenda sunt, quæ de Natura & Causis Gravitatis  
corporum nobis innotescunt.

Cum videamus, si non omnia, pleraque saltem corpora, De Natu-  
quanquam cætera diversissimæ naturæ, in hoc tamen conveni- ra & Cau-  
re, ut libero acri exposita deorsum, terram versus, ferantur; sis Gravi-  
merito concludimus, hanc vim tendendi deorsum non proveni- tatis.  
re a forma aliqua intrinseca, vel qualitate cuique corpori pecu-  
liari, sed ascribendam esse causæ alicui externæ & universali,  
quæ, omnia in hoc mundo sublunari corpora implicans, eun-  
dem in iis gravitatis effectum producere debet. Istiusmodi vero  
generalem causam, lustrando totum hoc Universum, vix repe-  
riemus alibi, quam in motu vorticoso materiæ Terræ circumfu-  
sæ. Quocirca meminimus, Deum, postquam hunc subluna-  
rem mundum condidisset, ei indidisse motum, eumque gemi-  
num; unum generalem, quo omnes hujus materiæ particulæ in  
eandem plagam circa commune aliquod centrum, Terræ videli-  
cet, rapiantur; alterum peculiarem, quo unaquælibet particula  
materiæ in omnes plagas infinitis modis moveatur: cogitemus-

*Jac. Bernoulli Opera.*

M

que,

No. II. que, illum, in quem conspirat tota hæc materiæ compages; Gravitatis forte; hunc vero Elaterii causam existere posse: quare illum, *Motum communem* seu *Gravitatis*; hunc, *proprium* seu *Elaterii*, non incommode appellare poterimus.

Quanam autem ratione effectus Gravitatis ex priori motu elici possit, assequemur; si consideremus, omnia in hoc Vortice contenta, per proprietatem a motu circulari inseparabilem, acquirere vim & conatum recedendi ab ejus centro; qui quidem conatus in istis particulis tanto major, vel minor existit, quanto quælibet earum sigillatim vel rapidiorem, vel languidiorem agitationem accepit; ita ut proprie loquendo omnia corpora dicenda sint levia; quamvis interim illa, quæ reliquis minus levia sunt, ob rationem mox dicendam, descendere debeant (unde gravia illa appellare assueti sumus): plane ut illi, qui omnia corpora considerant ut gravia, aerem tamen non verentur appellare levem, quod sub corpore graviori aquæ detentus ascendere cogitur.

Fig. 17. Quare concipiamus porro in aere nostro duos Conos contiguos  $ab$ ,  $ac$ , materiæ homogeneæ, a superficie terræ  $de$ , ad orbem usque Lunæ  $bc$ , protensos, verticibusque suis in centro terræ  $a$  cocuntes. Hi coni, per motum sui vorticis, dispositionem acquirunt recedendi a centro  $a$ , & tametsi iste conatus, in singulis horum conorum corpusculis, fiat secundum tangentem orbitæ, trusio tamen illorum mutua communicari debet (juxta illa, quæ initio dissertationis de natura Pulsionis monuimus) a centro ad circumferentiam, secundum lineas  $ab$ ,  $ac$ , in quibus corpuscula illa se contingunt: unde revera quoque secundum has lineas extruderentur, nisi obstaret materia, qua plenum est omne spatium supra orbem Lunæ  $bc$ . Hac ergo ulteriorem ascensum prohibente, oritur conflictus quidam duorum conorum in circumferentiâ  $bc$ ; neutro tamen alterum loco pellente, quandoquidem, ob materiam homogeneam, nulla ratio est, cur unus alteri prævaleret. Si vero nunc supponamus, alterutri horum conorum immitti corpus aliquod terrestre  $f$ , cujus partes crassiores, aut nullam, aut exiguam habeant agita-

Supra  
pag. 58.

agitationem; liquet, hujus conī a centro recedendi impetum No. II. tanto imminutum iri, quanto particulæ corpōris istius minus possident agitationis, quam æqualis moles materiæ fluidæ, cujus locum occupat: cui consequens est, ut alter conus, qui nihil virium suarum amisit, diffundendo sese versus circumferentiam *bc*, debiliorem conum deorsum impellat, isteque impulsus secum protrudat corpus *f*, atque ita gravitatis in illo effectum producat. Si jam concipiamus, argentum vivum, aut quemcunque alium liquorem, in vase stagnantem, esse illud corpus terrestre, quod minus aere habet agitationis; non difficulter rationem perspicemus, quare iste liquor ab incumbente cono aerio (qui ob latera sua tantum non parallela cylindrus vulgo audire consuevit) jugiter deorsum premi, atque si copia detur, in tubum intrudi debeat.

Ex hac porro explicatione perspicuum esse poterit, gravitatem corporis alicujus non tam dependere a multitudine particularum terrestrium illud constituentium, quam ab earundem languidiore motu; ac v. gr. aurum 19000<sup>ies</sup> pene aere gravius esse posse, etiamsi forte non centuplo plus contineat materiæ terrestris, quam æqualis massa aeris; dummodo quod numero deest, particularum quies resarciat.

Prætermittendum quoque non est in transitu, (quod in sequentibus observasse juvabit), huic motui Gravitatis pondus & incrementum nonnunquam accedere posse a pressione globulorum cœlestium, (quo nomine materiam subtilem ætheris insigniunt,) qui, rotatione vorticis solaris, indefinenter a Sole Terram versus vibrati, pro majore vel minore sui agitatione, dictos conos vel cylindros, diversis anni tempestatibus, fortius vel debilius premere, citra absurditatem, statui possunt.

De incremento & decremento Gravitatis.

Hæc dicta sunt de motu Gravitatis. Postquam autem Naturæ Consulti vidissent, hunc solum motum non sufficere explicandis omnibus circa suspensionem liquorum phænomenis; quippe qui non explicat, quare suspensus hæreat in tubo liquor, obturato vasculo, ubi totius tamen atmosphæræ gravitatio intercepta: hinc alium adhuc aeri peculiarem, atque a motu gravi-

Quid sit Elaterium aeris?

No. II. tatis independentem, ascribere motum, quo aeris particulæ conatum quendam (non communem aquæ, fluidisque aliis crassioribus) habeant sese expandendi, dilatandi, remotoque obstaculo majus occupandi spatium; quique conatus, in aere incluso, par sit sustentando tanto ponderi liquoris alicujus, quantum sustinere valeat gravitate sua tota atmospheræ moles; nonnunquam minori, aliquando etiam majori, pro re nata. Illud mirari subit, quod cum omnes hydrostaticorum Scriptores hanc aeris vim elasticam unanimi fere fateantur ore, plerique eam ostendisse sint contenti; pauci vero in naturam & causam illius penitus inquirere sustinuerint, aut solliciti fuerint, ut certas illi regulas præscriberent, atque omnes evolvendo casus aeris liberi, inclusi, condensati, rarefacti, exponerent, quantum in singulis horum casuum effectum sortiri aer debeat.

Ejus causa obscura.

Enimvero unde istud Elaterium sive conatus sese dilatandi in aeris particulis proficiatur; an ex eo, quod singulæ illarum circa proprios axiculos rotentur, vel plures aliquot in unum motum circularem conspirantes, infinitos parvos vortices constituent; dumque ab horum centrīs recedere conantur, ambientes particulas loco pellendi ac se dilatandi vim acquirant: an vero procedat ex peculiari harum particularum figura vel textura; quod forsitan sint graciles, flexiles, intortæ ac conglomeratæ spiræ, instar tæniæ, funis, aut elaterii horologii portatilis: an quod, ab agitatione materiæ primi & secundi Elementi inter corpuscula aëria rapidissime discurrentis, illis hic elaterii motus communicetur, quo in continua quasi conserventur bullitione, ut qua licet sese diffundant: an denique quod ista sese dilatandi virtus, absque adminiculo causæ externæ, immediate a Primo Motore in creatione illis indita olim fuerit: hoc, inquam, negotium est tam arduum, conjecturis ubique æquali difficultatum numero laborantibus; ut inter abstrusissima naturæ mysteria jure merito referatur. Quocirca, hac de re quicquam determinare non sustineo; præsertim cum unusquisque, salvis forte phænomenis, hic suo sensu abundare possit.

Quid sit Quod vero effectum spectat hujus Elaterii; illi paulo distinctius

ex-

excutiendo inhærebimus : & quia multis id videtur comprehensu valde difficile , qua ratione pauxillum aeris , etiam non compressi , ingentis atmosphæræ pressione , æquivalente pressione & actione efficaci , ( talem enim activam efficaciam significatio vocis in illis rebus , quibus tribui solet , requirit , ) repellere irritamque reddere valeat ; hinc ad captum illorum nos accommodaturi , atque elaterium hocce mitigaturi , aliud quiddam præterea in aere considerabimus , quod *Resistentiam* vocabimus *passivam* ; atque ita effectum soli hætenus elaterio tributum bipertiemur ; partem relinquendo actioni elaterii , partem vero asserendo resistentiæ illi passivæ ; monstrabimusque , quo pacto idem sequi debeat effectus , omniaque allata experimenta non minus , sed forte intelligibilius , solvi possint ; etiamsi aer longe minori , quam vulgo creditur , elatere foret præditus , cætera vero mere passive se haberet ; resistentia supplente elateris vicem . Notandum vero ante omnia , per hanc aeris *Resistentiam passivam* , me non tam intelligere qualitatem aliquam in ipso aere latitantem , & a nostra cognitione remotam , quam vero defectum virtutis in liquore aerem premente , qui non satis habere censendus est virium ad aerem loco movendum , vel condensandum .

No. II.  
Aeris  
Resistentia  
passiva ?

Ut vero distinctius cognoscamus , quæ possint esse partes huius resistentiæ passivæ , consideremus duo corpora se invicem prementia ( puta duos luctatores , vel duas pilas ; ) sitque primo utrumque libero aeri , ( id est , loco ubi nihil vel adjuvat , vel impedit illorum motum ) expositum , nullique innixum sustentaculo ; occurratque corpus A corpori B ; quo si fortius est , illud propellet ; si debilius , pelletur ab ipso in contrariam partem ; si æquali denique vi premat & renitatur utrumque , sublati ex æquo viribus , eodem loco tanquam quiescentia spectabuntur ambo . Hoc unico proinde in casu , non constabit ex sola loci consideratione , utrum alterum in alterum æquali pressione conatu agat , an vero ambo inertia & otiosa juxta se quiescant ; quod postmodum demum cognoscere datur , cum alterum loco moveris ; si pone enim sequatur alterum , concludes sese pres-

Illustratur  
exemplum  
duorum  
Luctatorum.

No. II. fuisse antea; si immotum maneat, indicio est, antea quievissse utrumque, quamvis interim utrobique præstet illa considerare, ut omnibus viribus destituta; cum si quas habent, tantundem iis efficiant, ac si non haberent.

Sit vero etiam porro corpus B (luctator vel pila) innixum solido alicui fulcro, puta luctator parieti cuidam, vel pila lateri mensæ tudiculariæ; faciatque corpus A impetum in corpus B suffultum, quid fiet? hoc quidem illud in contrariam adhuc partem repellet, ubi plus illo impendit virium: sed siue vires utriusque sint æquales, siue vires corporis B sint debiliores, siue plane nullæ; in omnibus his tribus casibus, neutrum corpus loco suo expellet alterum, sed juxta se quiescent; adeo ut hactenus nulla pateat ratio, quæ nos cogat ad credendum, corpus B, ad impetum corporis A infringendum & sufflaminandum, æqualem potius conatum adhibere, quam vel debilius, vel plane non reniti. Sed ubi porro consideraverimus, etiamsi mille præterea homines, aut pilæ, in directum positæ essent, quæ omnes vires suas jungerent cum luctatore vel pila A, ad pellendum corpus B, illas tamen omnes non plus effecturas, quam antea fecerat solum corpus A; justam habebimus suspicandi ansam, obstaculum, quo impediabatur paulo ante corpus A, ne propellere posset corpus B, non provenisse a renitentia & repulsione æquivalente facta a corpore B, id est ab aliquo ejus elaterio (quale præcipue in pila eburnea concipere absurdum foret), cum non sit verosimile, eandem hanc vim corporis B, postea parem esse potuisse repellendo impetui millies majori: sed a mera interpositione corporis B, quæ sola sufficiens esse possit sistendo impetui corporis A, totiusque seriei corporum istud juvantium. Pergat enim, si possit, corpus A moveri in directum post contactum corporis B; aut penetret necesse est dimensiones hujus, quod omnino impossibile; aut faciat, ut hoc permeet solidum fulcimentum, cui innixum esse supponimus: sed sic vel integrum corpus B deberet trajicere, quod idem involvit absurdum, vel deberet prius in minutissimas partes conteri, cæque dein per poros muri adigi; quod cum non fiat, con-



concludendum, corpus B esse talis texturæ, cui dissolvendæ No. II. impar sit conatus quantumvis maximus corporis A, omniumque reliquorum vires suas huic-adjungentium: atque in hoc illud ipsum consistere puto, quod vocare solco *Resistentiam passivam*. Quæ cum omni corpori, etiam ipsi aeri solido vasi incluso & lateribus ejus suffulto, applicari possint, non difficile erit perspicere, quare minima ejus portio sufficiens sit sustentando multo majori ponderi, quam sola sua gravitate præstare posset; non quod credendum sit, particulas fluidissimi corporis tali præcise textura & nexu inter se coherere, qui earum separationem reddat difficiliorem ponderi incumbenti; sed quod externa materia vasi circumfusa, non minore gravitate pollens quam pondus inclusum, materiam subtilem exire conantem æquali vi repellere, atque intra vasis latera cohibere possit: imo, considerans ista attentus Lector forte non obscurum hic mysterii illius, quod nostræ titulum dissertationis facit, indicium deprehendet.

Hæc vero omnia ( quod expresse moneo ) ea intentione a me non dicuntur, quod disiteri, aut possim, aut velim omne aeris elaterium; sed quod ad illud in omni casu confugere non necessum ducam. Quare nunc aliquas Leges seu Regulas, quas quidem rationi & experienciis, maxime Boylianis, consonas fore deprehendero, tum pro *Aeris Elaterio*, tum pro ejus *Resistentia passiva* statuminabo.

I. *Qualibet aeris portio, naturalem habentis consistentiam seu laxitatem, in loco aperto, sub dio, resistit passivæ ponderi totius sibi incumbentis atmospheræ.* Ratio, quia ab æqualis ponderis columnis lateralibus suffulcitur; quam ob rationem etiam aqua, omni licet elaterio fere destituta, in profundissimo maris, sine notabili condensatione, toti moli aqueæ sibi incumbenti resistendo par est. Tum vero aeris portionem aliquam dico habere *naturalem consistentiam*, quando tantundem continet materiæ subtilis, tantundemque materiæ terrestris, quantum utriusque sub æquali volumine ordinarii illius, in quo experimenta fieri plerunque solent, quemque spiramus, aeris continetur. Te-  
nen-

Regulæ  
Elaterii  
& Resi-  
sentiæ  
passivæ.

No. II. nendum namque, aerem nostrum non esse corpus homogeneum, sed particulas ejus terrestres satis dissipatas, atque æqualibus fere intervallis a se invicem disjunctas, majorem adhuc copiam materiæ alicujus subtilissimæ & æthereæ concludere, solidissima quæque corpora permeantis: adeo ut, si supponamus in isto, quem haurimus, aere, singulis particulis terrestribus ordinarie respondere centum alias materiæ subtilis; dicere conveniat, ejus portionem aliquam naturali sua laxitate præditam esse, quotiescunque contingit, sive in loco libero, sive clauso, ut quantitas materiæ subtilis, in illa portione contentæ, centies excedat quantitatem materiæ terrestris; eandem vero duplo, triplo, &c. densiorem esse redditam, quandocunque, parte materiæ subtilis expulsa, particule terrestres accedunt ad se invicem, atque jam arctius constipatæ, duplo, triplo, &c. minorem, quam antea, locum occupant: uti vicissim duplo, triplo &c. rarior dicendus aer, ubi eadem quantitas materiæ terrestris, intervallis suis per accedentem novam materiam subtilem ampliatis, ad duplo, triplo &c. majus spatium extendi cogitur.

II. *Qualibet aeris inclusi portio, naturalem habentis consistentiam, resistit passivè ponderi totius atmosphære, aut cuicunque aliæ pressioni huic æquivalenti.* Ratio, quia a lateribus corporis solidi continentis suffulcitur. Ita perspicuum est, in fistula solo aere repleta, cujus superius orificium apertum, inferius clausum, aerem quamvis inclusum, & totius atmosphære ponderi succumbentem, non magis comprimi vel condensari, quam quamvis aliam ejus portionem extra tubum, in eadem horizontali superficie cum incluso existentem. Perinde ut si tubum repleveris aqua; infimus aquæ pollex, tametsi nullo sensibili gaudeat elaterio, notabiliter non magis compressus erit, quam quivis alius, sive intra, sive extra tubum. Quod probe observandum, contra illos, quibus ordinarium est, aeris inclusionem & compressionem in hac materia confundere.

III. *Quantulacunque aeris condensati portio passivè resistit majori vi aut ponderi, quam soli atmospherico, aut huic æquivalenti;*

ei; idque ea lege, ut densitates duarum portionum aeris fere sint ad invicem, sicut pondera ab iis sustentata. No. II.

IV. Aeris rarefacti portio quantacunque, minori tantum vi aut ponderi, quam atmospherico, passive resistendo par est; suntque raritates ad se invicem in ratione reciproca ponderum sustentatorum. Veritas utriusque hujus regulæ manifesta fit duobus curiosis experimentis ab Illustr. Dn. BOYLIO hanc in rem factis, quæ videlicet in *Tractatu ejus contra LINUM*, Cap. V. cui duas Auctor subjunxit Tabulas pro diversis Condensationis & Rarefactionis gradibus.

V. Aer inclusus naturalis consistentia, pressus a majori pondere, quam est atmosphericum, aut aliud ei aequale, condensatur quousque eum densitatis gradum acquisiverit, qui juxta proportionem Reg. 3 memoratam, par sit passive resistendo illi pondere. Hinc est, quod, in campana vitrea urinatoribus nonnunquam usitata, quo profundius illa immergitur, eo magis aer inclusus comprimitur; quia, præter atmosphericam columnam, tantum adhuc cylindrum aqueum sustinet, quantus porrigitur a superficie aquæ ad orificium campanæ; adeo, ut campana 34 pedes sub aquam depressa, aer inclusus non nisi dimidiam circiter ejus cavitatem impleturus sit.

VI. Aer inclusus naturalis consistentia, minori vi aut pondere pressus quam atmospherico, vi elaterii sui se expandit ad eum usque rarefactionis gradum, qui secundum proportionem Reg. 4 sufficiens adhuc sit passive resistendo illi pondere.

VII. Aer condensatus, pressus a majori vi aut pondere, quam cui passive resistendo sufficiat, magis condensabitur: pressus a pondere exacte æquivalente gravitati atmospherica, vi elaterii sui ad consuetam usque laxitatem dilatabitur: a minori vero pondere pressus, eadem vi rarefiet magis.

VIII. Aer rarefactus, pressus a minori vi aut pondere, quam cui resistendo sufficiat, vi elaterii sui magis dilatabitur: pressus a pondere atmospherico aut alio æquipollenti, ad naturalem consistentiam redigetur: a majori pressus magis condensabitur: eaque omnia per gradus densitatis & raritatis ponderibus proportionatos,

No. II. *juxta* Regg. 3 & 4. Sic collo recipientis evacuati sub aquam demerso, apertoque epistomio, adscendere solet aqua atmosphaeræ pondere stipata, cōusque in recipientem, donec aer per totam illius cavitatem diffusus, atque per ascensum aquæ sese contrahens, ad pristinam consistentiam redeat.

*IX. Minima aeris quantitas, sive naturalem habentis consistentiam, sive condensati, sive rarefacti, qua parte ab omni materia premente (excepta subtili) liberatur, vi elaterii sui sese protinus expandet, & per totum spatium materia subtili repletum aequalibus intervallis sese diffundet.* Hinc applicato antliæ recipienti, & adducto embolo, versoque epistomio, non manebit omnis aer in recipienti, nec descendet omnis in antliæ scapum, relicturus materiæ subtili totam recipientis cavitatem; sed restabit subinde pars aliqua in recipienti, quæ æqualibus intervallis per materiam subtilem dispersa, eandem acquireret laxitatem cum illa, quæ descendit in scapum. Hinc est, quod aerem materiæ subtili facile permisceri dicunt; secus atque fit in aqua aliove liquore, cui adducto embolo soli materiæ subtili spatium superius cedens, totus in scapum descendit. Facilis quoque isthinc redditur ratio, quare vesica recipienti inclusa protinus intumescat, cum evacuari incipit aer; quoniam enim, per hanc evacuationem, paucillum aeris, quod in vesica remansit, ab aere ambiente liberatur, necessum est, ut vim elasticam exercendo sese dilatet & vesicam inflat, quousque ejus permittunt latera; imo, ubi vesica non satis robustæ est texturæ, ea omnino disrupta, per totam recipientis cavitatem sese diffundat.

*X. Aer in infinitum rarefieri potest, sed non in infinitum condensari.* Consecutarium hoc est præcedentis regulæ, de cujus veritate absque experimentis certi esse poterimus, ubi consideraverimus, intervalla inter particulas aeris terrestres nunquam posse esse tam ampla, quin, ingrediente nova materia subtili, ampliora subinde fieri possint: sed vicissim, expulsa omni materia subtili, hæc intervalla tandem plane tolli debere; adeo ut nullus amplius possit esse condensationi locus: Ita grana possunt in in-

infinitem spatium dissipari, sed non arctius constipari, quam No. II. immediatus eorum contactus permittit.

[ Notandum, quando in Reg. 3. diximus, *densitates aeris esse ad invicem, ut pondera ab illo sustentabilia*, non sine causa adjectam esse particulam *fere*; quia ubi experimenta accurate instituta sunt, semper deprehendetur, pondus ab aere densiori sustentatum ad pondus sustentatum a minus denso, majorem tantillo habere rationem, quam densitas ad densitatem: cujus ratio dubio procul hæc est, quod, decresciente proportionaliter in condensatione aeris inclusi volumine, sola expellitur materia subtilis, non imminuta quantitate materiæ terrestris; unde fit, ut decrementum materiæ subtilis (& consequenter incrementum virium particularum crassiorum) aliquantillo majus esse debeat, quam foret, proportionem habita ad decrementum totius voluminis. Exempli gratia, si in determinata aliqua quantitate aeris atmospherici, contineantur decem corpuscula terrestria, centumque æquales particulæ materiæ subtilis, sic ut tota massa sit centum decem partium; requiritur ad hanc massam in duplo minus volumen redigendam, ut quinquaginta quinque particulæ inde expellantur; sed quia nulla decem crassiorum expelli potest ob exilitatem pororum vitri, omnes demendæ erunt ex materia subtili, cui proinde non nisi relinquentur quadraginta quinque, adeo ut plusquam sui dimidii jacturam patiatur: atque ita ratio decem particularum terrestrium ad residuam materiam subtilem, plusquam duplo major erit illius rationis, quam habuere illæ decem particulæ ante condensationem ad omnem materiam subtilem. Unde fit, ut plusquam duplo majores etiam in sustentando liquore vires nancisci debeant. Et hoc egregie confirmatur experimento illo Cl. BOYLEI supra citato; in quo animadverto, semper nonnihil majus ab aere condensato sustentatum fuisse pondus, quam juxta hypothefin, cum ipsius, tum nostræ, sustentandum fuisset. In cujus differentię contemplatione cum occupor, mentem subit, annon forte, ex illa cognita (suppono autem experimentum cum omni requisita *ἀκριβείᾳ* peractum), ratio iniri possit utriusque materiæ, terrestris & subtilis,

N 2

lis,

Limita-  
tio Regu-  
læ 3.

No. II. lis, contentæ sub volumine aliquo aeris atmosphærici in naturali sua laxitate constituti; id est, annon investigari queat, quoties quantitas unius excedat quantitatem alterius. Id quod hac ratione exequor:

Esto *volumen aliquod aeris communis* . . . . .  $a$ .

*Ratio voluminis hujus ad volumen aeris condensati, ut  $m$ , ad  $n$ .*

Erit *volumen aeris condensati* . . . . .  $n : a : m$ .

*Quantitas materiæ terrestris sub utroque volumine comprehensa,  $x$ .*

Ergo *quantitas materiæ subtilis sub volumine  $a$ , erit* . . .  $a - x$ .

*Quantitas ejusdem sub volumine  $n a : m$  erit* . . .  $n a : m - x$ .

*Pondus ab aere communi sustentatum* . . . . .  $b$ .

*Pondus ab aere condensato juxta hypothesein sustentandum  $n b : m$*

*Pondus ab aere condensato sustentatum* . . . . .  $n b : m + c$

*Differentia sustentandi & sustentati* . . . . .  $c$ .

Jam quoniam ratio materiæ terrestris ad materiam subtilem voluminis minoris, debet esse ad rationem, quam illa habet ad materiam subtilem voluminis majoris, ut pondus sustentatum ab illo volumine ad pondus sustentatum ab hoc: sive (propter eandem utrobique quantitatem materiæ terrestris) quoniam materia subtilis voluminis majoris est ad subtilem minoris; ut vicissim pondus sustentatum ab hoc volumine, ad pondus sustentatum ab illo: erit  $a - x$  ad  $n a : m - x$ ; ut  $m b : n + c$  ad  $b$ . Unde, proportionem ad æqualitatem reducta, translatisque quantitibus cognitis in unam, incognita in alteram partem; habebitur  $x = n n a c : (m m b + m n c - m n b)$ .

Quanto plus contineatur materiæ subtilis, quam terrestris, in portione aliqua aeris atmosphærici?

Quocirca, si volumen aliquod aeris in statu suo naturali constituti (quod volumen ponimus 10000 partium) sustentavit 29 $\frac{1}{8}$  digitos mercurii, juxta Tabulam Boylianam; idemque aer, ad duplo minus volumen redactus, sustinuit 58 $\frac{1}{2}$  dig. quorum, juxta hypothesein, non nisi 58 $\frac{1}{2}$  sustinere debebat, adeo ut differentia sustentati & sustentandi fuerit  $\frac{1}{2}$  dig.; calculus patefaciet, materiam terrestrem occupare non nisi 94 $\frac{1}{2}$  partes illius voluminis, reliquis 9905  $\frac{1}{2}$  omnibus a subtili repletis; adeo ut quantitas materiæ terrestris a quantitate interspersæ subtilis excedatur quam proxime centies quinquies: eruntque, si corpuscula terrestria æqualibus per aerem intervallis disseminata supponamus, inter duo



duo quævis corpuscula proxima, ad minimum quatuor æquales No: II.  
 materiæ subtilis portiones interjectæ. Observandum tamen, si  
 in experimento Boyliano idem calculus institueretur circa aerem  
 quadruplo densiorem naturali; ubi differentia mercurii susten-  
 tandi & sustentati erat  $1\frac{1}{2}$  dig.; fore, ut quantitas materiæ sub-  
 tilis quantitatem terrestris plusquam trecenties tricies superare  
 deprehenderetur. Hoc vero inde provenire auguror, quod forte  
 particulæ aeris crassiores, per nimiam condensationem, tam valide  
 comprimantur, ut, figura sua rotundiore in oblongiorem &  
 graciliorem mutata, jam libere per poros vitri, juxta cum sub-  
 tiliore materia, expelli possint; tametsi illos paulo ante penetra-  
 re, ob crassitiem suam nequiverint. Hinc enim fit, ut residua  
 materia terrestris non possit tantum pondus sustinere, quantum  
 sustinere deberet, si nulla omnino expulsa fuisset; proinde ne-  
 queat locum amplius habere analysis nostra, quæ sub utroque  
 volumine aeris naturalis & condensati, æqualem materiæ terro-  
 stris quantitatem supponit.]

Sed ut ex tricis algebraicis redeamus ad institutum nostrum; Cur etu-  
 non difficile nobis erit, stabilitis paucis illis regulis, respondere bo clauso-  
 ad experimenta supra memorata, omniaque reliqua, quæ ab ad- vel lage-  
 versa parte ad aeris gravitatem impugnandam afferri forte pote- na diffi-  
 runt. Nam quod spectat primo Fistulam superne clausam, vel culter ad-  
 Lagenam, e qua liquor sola suctione attrahi nequit; ratio est, fugi possit  
 quia cum abdomen ob imbecillitatem musculorum, hoc in casu, liquor.  
 vel nullatenus, vel difficulter dilatari possit, aer ejus cavitati in-  
 clusus naturalem suam quam proxime retinebit consistentiam;  
 adeoque, per Reg. 2, & 4, resistendo plusquam par erit paucis  
 aeri in aspera arteria, liquorique in lagena vel fistula contento,  
 eorumque proin descensui impediendo.

Quod porro attinet ad duas Fistulas, ita sibi coopratas, ut com- Respon-  
 municationem habentes invicem, aeri externo omnem ingressum detur ad  
 præcludant, quarumque superior aqua vel alio liquore crassiore, exem-  
 inferior solo aere repleta sit; valde quidem dubito de successu plum  
 experimenti, nisi ubi fistulæ supra modum graciles fuerint: se- duram  
 cus enim fiet, ut aer inter liquorem & vitri latera sibi transitum fistula-  
 rum.

No. II. parando, sensim superiora petat, dum interea liquor inferiorem sibi locum vendicabit; non aliter atque in clepsammo, descendente in inferius vasculum arena, aer per ejus grana ad superiora eluctari solet. Si vero forte contingat in tubis gracilioribus, ut suspensus hæreat in superiori liquor; tum nihil obstat, quo minus dicamus, aerem per resistantiam suam passivam, liquoris descensum impedire, ut pote quæ juxta Reg. 2 etiam multo majori ponderi sustentando par esset.

Resp. ad  
suspensionem li-  
quoris in  
loco clau-  
so, vel  
vasculo  
obstructo.

Ita etiam in promptu ratio est, cur liquor adhuc suspensus in tubo hæreat, si vel experimentum fiat in cubiculo clauso, vel vasculo obstructo, sive eodem incluso recipienti. Quantum quidem ad cubiculum; non existimo, ullum adeo exacte clausum esse posse, quin aer externus rimam inveniens, toto suo pondere in conclave irruat, & vi gravitatis hunc effectum producat, qui elaterio ascribitur. Ad reliquos vero casus respondebimus, neque gravitatem, neque elaterium suspensionis causam esse; cum resistantia aeris inclusi pure passiva illud præstare possit. Quod enim non necessarium sit, ad elaterium hic confugere, vel ex eo manifestissime liquet; quia si loco aeris supremam vasculi partem occupantis, superinfundatur liquori in vasculo restagnanti aqua vel mercurius, vel quivis demum alius liquor, sive homogeneus, sive heterogeneus, illoque vasculum penitus repletum obturetur, idem secuturus est effectus, liquoris videlicet in tubo suspensio: ubi sane elaterio nullæ possunt esse partes; cum, fatentibus Elateristis, nullus præter aerem liquor, tali virtute notabiliter polleat. Proxima ergo ratio, cur maneat in consueta statione mercurius, alia nulla dari potest, quam quod liquor superinfusus in vasculo restagnans, & undique suffultus lateribus & operculo vasculi, resistantia sua passiva, reliquo liquori in tubo, se prementi ac descensum molienti, obstaculum ponat. Unde cum concipi possit, eundem secuturum etiam cum aere incluso effectum, nullo concepto elaterio; sequitur, elaterium hocce, neque esse unicam, neque proximam suspensionis causam.

Suc-

Succurrit tamen hic quoddam experimentum, quo doctrina nostra de resistantia aeris passiva primo intuitu omnino videtur subrui. Illud autem tale: In cubiculo clauso, vel alio aliquo loco ubi aeri ingressus non patet, loco simplicis tubi, adhibe siphonem inæqualium crurum, ejusque crus brevius immerge liquori cuicunque, quem per crus longius adiugito; quo peracto, comperies, liquorem omnem e vasculo per crus brevius ascensurum, & per longius descensurum, idque continuo fluxu, quamdiu crus brevius liquori immersum est, non secus atque fieri solet alias, cum experimentum sub dio capitur. Sed ne iste continuus liquoris fluxus possit excusari per pondus totius atmosphæræ, sub prætextu, quod conclave nunquam adeo exacte claudi possit, quin aer inclusus cum externo per rimam aliquam communicet; eundem ergo fluxum efficere tentabimus in recipienti clauso, ubi nullum ab aere externo periculum timendum. Hanc in rem autem opportune incidit experimentum, a Cl. VOLDERO, pro ultimo superioris anni specimine, in Theatro Physico Academiæ hujus publice ostensum, quo Elateristæ admodum gloriantur. Sumsit vitrum cylindricum *a*, aqua subrubido colore tincta impletum; eique immisit crus brevius siphonis *bcd*; atque ore admoto longiori adfluxit per siphonem aquam; qua fluente, prorinus vitrum cum siphone demisit in recipientem *efg*; quod pariter mox aqua subrubida ad summam usque oram adimplevit, ne quid in illo remaneret aeris; atque tandem operculo admoto clausit, & cera undiquaque probe munivit. Quo facto, coëptum est agitatione emboli evacuari recipientem; extracto per ejus collum *e* liquore, usque ad superficiem circiter *il*; quo subsidente sensim, subsidit pariter liquor in cavitate siphonis contentus, mansitque subinde in eodem plano cum superficie liquoris extra siphonem; descendens in breviori quidem crure ad summam usque oram vitri cylindrici; in longiori vero, quousque subsederat reliquus in recipienti liquor; propterea quod, præter materiam subtilem, nihil aderat quod ponderare super liquore in recipienti, cumque

No. II.  
Fluxus  
liquoris  
per siphonem  
in loco clauso  
explicatur  
per  
Resistentiam  
aeris  
passivam.

Fig. 18.

in:

No. II. in siphonem impellere, vel in eo suspensum tenere potuisset. Evacuato sic maximam partem recipienti, intromisit per apertum obstructorium aerem, qui irruens in liquorem vitri cylindrici, cum pondere suo impellebat in crus siphonis brevius, & exinde porro in longius; nec cessabat liquoris per siphonem fluxus, quantumvis postea obstructorium loco suo iterum intrusum fuisset. Cujus rei quidam ratio, supposito aeris elaterio, reddi potest facile; cum enim per obstructorium intromissus aer, virtute sua elastica, premat tum super liquore in vitro cylindrico contento, tum super reliquo extra cylindrum; fit ut liquor in utroque crure sursum impellatur, usque ad mutuum occursum in flexura siphonis *c*, ubi quia in contrarias tendit partes, species quædam luctæ oritur inter liquores utriusque cruris, adeo ut neuter alteri prævaleret, sed immoti hærent, si æqualibus ambo viribus fuissent impulsæ: Verum, quia elaterio columnæ aeris *qr*, a pondere liquoris in longiori crure magis resistitur, quam elaterio columnæ *op* resistitur a minori pondere cruris brevioris; fit ut liquor fortius adactus in crus brevius, alterum debilius impulsus repellat, & ita in continuo fluxu perduret, ex vitro cylindrico ascendendo in crus brevius, ex breviori descendendo in longius, & ex longiori in recipientem. Atque sic quidem elaterio res conficitur: idem vero absque elaterio demonstrari quoque posse, forsitan videbitur nonnullis prima fronte impossibile; cum facile quidem intelligi possit, qua ratione aeris inclusi resistentia passiva suspensum teneat in cruribus siphonis liquorem, ejusque descensum impediat; non vero identidem, quo pacto fluxu continuo novus subinde liquor in crus brevius assurgat, nisi supponatur aliquod supra liquorem vitri cylindrici, quod cum efficaci pressione in crus illud intrudat; quæ pressio aliunde procedere posse non videtur, quam ab aeris elaterio. Quare superest, ut monstremus adhuc, etiamsi nullum in aere agnosceremus elaterium, eundem tamen secuturum ex hypothese nostra effectum. Intelligere jam putamus, quare admissio per obstructorium aere, debeat impleri siphonem; nimirum quia paucillum aeris irruentis, tota stipatum atmosphæ-

ræ mole, dum obstructorium apertum est, super liquore pre- No. II:  
 mēre, eumque gravitatis impetu in utrumque crus impellere  
 censendum est. Consideremus vero nunc recipiens iterum ob-  
 structum, & liquorem in utroque siphonis crure suspensum;  
 quid fiet? cessabit atmosphæræ gravitatio, nec aeris inclusi pon-  
 dus ullius erit momenti; & siquidem elaterio nullum quoque  
 locum hic tribuimus, cessabit omnis premendi in illo conatus:  
 sed non cessat pariter gravitatio liquoris in cruribus suspensi, qui  
 naturali suo pondere subinde descensum moliens, liquorem in  
 recipiente & vitro cylindrico sublevare, & cum liquore aerem  
 imminemtem versus supremam recipientis cavitatem attollere co-  
 nabitur, longioris quidem cruris liquor columnam *qr*; brevior-  
 is columnam *op*; ille nisu majori, quia ponderosior, hic mi-  
 nori, quia ut brevior, ita minus gravis. Cedet ergo fortiori  
 pressioni columna *po*, unaque deprimet liquorem sibi subjec-  
 tum, eumque in crus brevius ascendere faciet; non vi propriæ  
 elasticitatis, sed vi adventitia, communicata sibi a pressione præ-  
 valente liquoris in crure longiori: adeo ut, quemadmodum prius  
 ex Elateristarum mente considerabamus pugnam duorum liquo-  
 rum ab elaterio aeris impulsorum in flexura siphonis *c* factam,  
 fortiolemque ex parte *po*; ita vice versa eandem nunc contem-  
 plari conveniat, tanquam inter duas columnas aerias a pondere  
 liquorum impulsas, in superficie concava operculi *g* gestam,  
 fortiolemque ex altera parte *qr*. Ad quorum meliorem intel-  
 ligentiam in memoriam nobis revocemus Luctatorem illum B, <sup>Supra</sup> pag. 88.  
 qui nuper eludebat conatum Luctatoris A, suffultus tantum pa-  
 rietis, cætera nullas adhibens vires ad repellendum ipsum A.  
 Pateat vero nunc ei rima, qua pelli possit ab ipso A, eumque  
 immediate contingat in adverso latere alius Luctator C, qui pa-  
 riter non nisi passive se habens, prematur in oppositam partem  
 a quarto Luctatore D, sed viribus debilioribus, quam B pel-  
 litur ab ipso A. Qua ratione evidens est, Luctatorem D, cui vires  
 sunt debiliores, repulsum iri; idque non tantum a Luctatore  
 A, qui reapse conatum adhibuit, sed potissimum a duobus inter-  
 mediis B, & C; quamvis non propriis horum viribus, quas o-  
 tiosi

*Fac, Bernoulli Opera.*

O

tiosi

No. II. tiosi nullas adhibent, sed viribus ipsis communicatis a Luctatore A. Jam si, loco Luctatoris A, substituamus liquorem crucis longioris; pro Luctatore D, liquorem brevioris; pro utroque otioso, columnas acrias *qr*, & *op*; applicatio nullo institueretur negotio.

Cur relicto in summo tubi aere mercurius solito humilior descendat, nec tamen omnino effluat?

Unius adhuc superest phænomeni ut evolvamus causam, (quod intellectis nostris de Elaterio & Resistentia passiva regulis non erit arduum) quare videlicet, si in tubi mercurio impleti summitate relictum fuerit pauxillum aeris, argentum vivum nec omne effluere, nec omne in tubo suspensum hærere, sed notabiliter tamen descendere debeat, etiamsi argentum ad longe minorem altitudinem 29 digitis infusum fuerit. Notandum autem, duo hic distincte quæri posse; semel, cur argentum, quamvis ad minorem altitudinem infusum, non ascendat; columna enim atmospherica vasculo imminens illud altius impulsura esset in tubum, sine interventu aeris in summitate relictæ; dein, cur præterea etiam notabiliter descendat. Prioris causam rejiciemus non in elaterium, sed passivam tantum resistentiam inclusi aeris, qui, cum naturalem habeat consistentiam, & a summa base tubi suffultus sit, juxta Reg. 1, toti atmospheræ ponderi, argentum altius subinde impellere conanti, obicem ponere potis est. Quod vero argentum non tantum non ascendat, sed & descendat; exinde est, quoniam aer inclusus non premitur a tota cylindri atmospherici mole, sed a tanta duntaxat illius portione, quæ correspondet excessui, quo totum ejus pondus superat pondus cylindri mercurialis inclusi: ex gr. Si altitudo mercurii infusi fuerit 20 digitorum; aer, inter tubi summitatem & mercurium interceptus, sentiet tantum pondus 9½ digitorum mercurialium; quanta videlicet est differentia inter pondus atmosphericum, æquivalens 29½ digitis mercurialibus, & pondus mercurii inclusi: quoniam enim atmosphæra ab una parte, tota sua mole sursum impellere conatur argentum, ab altera vero argentum naturali sua gravitate, contra nititur; fit ut æqualibus, illinc pellendi sursum, hinc descendendi, viribus sublati, aer inclusus ea tantum pressione afficiatur, qua pondus cylindri mercurialis



curialis inclusi superatur a simili cylindro atmosphærico. Quare, juxta tenorem Regulæ 6<sup>te</sup>, conveniens est, ut aer inclusus, vi sua elastica, sese expandat, hydrargyrum eousque deprimendo, donec imminuta hinc dilatati aeris resistantia, & illinc adaucta pressio, qua cylindrus atmosphæricus cylindrum mercurialem residuum excedit, pari passu ambulent.

Quousque vero mercurius in quovis casu, juxta hypothesein nostram deprimi debeat, ut calculo experiamur, ponamus in Fig. 16.

Quousque descendere debeat? Fig. 16.

Pro *Quantitate Aeris inclusi* . . . . . *a.*

Pro *Altitudine cylindri mercurialis inclusi* . . . . . *b.*

Pro *Excessu, quo pondus hujus superatur a pondere similis cylindri atmosphærici, id est a pondere 29½ digitorum mercurialium* . . . . . *c.*

Denique pro *Quantitate futura depressionis* . . . . . *y.*

Erit *Volumen aeris rarefacti* . . . . . *a + y.*

*Pondus Atmosphæricum, seu 29½ digitorum mercurialium.* *b + c.*

*Pondus sustentandum ab aere rarefacto* . . . . . *c + y.*

Et quoniam per Reg. 4, Volumen aeris inclusi debet esse ad Volumen aeris rarefacti, ut vicissim Pondus sustentandum ab hoc, ad Pondus totum atmosphæricum sustentabile ab illo; erit ut *a* ad *a + y*, ita *c + y* ad *b + c*; & multiplicatis extremis ac mediis habebitur æquatio inter *ab + ac* & *yy + ya + yc + ac*. Translatis porro in alteram partem quantitibus *ya + yc + ac*, sub signo contrario, erit  $yy = (-a - c)y + ab$ . Radix vero:  $y = -\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}c + \sqrt{\left(\frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}ac + \frac{1}{4}cc + ab\right)}$

Hinc Regula generalis:

*Si quadrans quadrati altitudinis inclusi aeris, & quadrans quadrati excessus, quo pondus atmosphæricum superat pondus liquoris inclusi, una cum illo, quod provenit ex altitudine inclusi aeris bis multiplicata, semel in dimidium dicti excessus, semel in altitudinem liquoris inclusi, in unam summam conjiciantur; & ab aggregati latere quadrato subtrahatur dimidium altitudinis inclusi aeris, una cum dimidio dicti excessus; residuum indicabit, quousque deprimendus sit liquor.*

No. II. Ubi notandum, si pondus liquoris infusi exæquet pondus similis cylindri atmospherici; tum, evanescente quantitate  $c$ , habebitur radix:  $y = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\left(\frac{1}{4}aa + ab\right)}$

Eritque Regula sequens:

*Si id, quod provenit ex altitudine aeris inclusi, multiplicata tum per quadrantem sui ipsius, tum per altitudinem liquoris inclusi, in unam summam colligas; ex summa radice quadrata dimidium altitudinis inclusi aeris subtrahas; indigabit reliquum, quousque infra consuetam stationem descendet liquor.*

Quocirca, juxta priorem regulam, mercurio infuso altitudinem obtinente 20 digitorum supra restagnantem, si cylindrus aeris, supremam tubi partem occupantis, sit *pollicaris*, subtracto digito, descendet argentum per  $1\frac{3}{8}$  dig. si *bipollicaris*, per  $2\frac{1}{2}$  dig. si *tripollicaris*, per  $3\frac{7}{8}$  digitos; &c.

Iterum juxta posteriorem regulam, elevato per infusionem mercurio ad consuetam altitudinem  $29\frac{1}{2}$  pollicum, si cylindrus aeris in summitate tubi relictus sit *pollicaris*, deprimetur mercurius  $4\frac{1}{8}$  dig. si *bipollicaris*,  $6\frac{1}{4}$  dig. si *tripollicaris*,  $8\frac{3}{8}$  digitis, &c.

Calculus hunc prolixum Lectori ponimus ob oculos, ut illum conterat cum \* verbis Nob. ROHOLTI, qui ad eundem calculum, quo in summitate tubi relinquatur aer, memorat, *pollice aeris eo humilius depressum iri mercurium, quo minus excedit tubus ordinariam mercurii stationem.* Unde nonnulli, quibus non major, ac mihi, est experiundi copia, concluderunt, si duo tubi diversæ longitudinis impleantur argento vivo ad eandem altitudinem, reliquo spatio acri concessio; fore, ut argentum in tubo breviori, ubi minor est aeris copia, profundius descendat, quam in longiori, cui major aeris quantitas est inclusa; propterea quod virtus aeris elastica fortior esse debeat in arctiori, quam ampliori loco.

Quæ

\* In Physic. ROHOLTI, part. prim. cap. 12. §. 34. *Nous prévoyons même, qu'un ponce d'air fera d'autant plus descendre le vif-argent, que le tuyau excède moins la longueur de vingt-sept pouces & demi.*

Major aeris quantitas absolute majoris, comparative minus profunde deprimit liquorem.

Quæ cum directe adversentur calculo nostro, concludendum, No. II. alterutro in loco errorem subrepsisse. Certum autem est, a parte nostri nullam posse esse hallucinationem; eo quod suppositio hæc, *Densitates aeris esse ad invicem, ut Pondera sustentata*, e qua calculus noster immediate fluxit, non alia est quam ipsissima Clar. BOYLEI hypothesis, egregiis insuper experimentis, gemina tabula in Tractatu ejus contra Linum exhibitis, stabilita: quodque in toto hoc negotio nullum aliud inter nos discrimen est, quam quod ille elaterio tribuit, quæ sola nonnunquam aeris resistentia passiva explicari posse autumo; cætera vero iidem omnino utrinque effectus expectandi. Sed nolumus etiam suspectam reddere veritatem assertionis Roholtianæ, quam experientiæ conformem deprehendi subjungit Auctor. Neque vero tamen nobis persuadebimus, idem experimentum alium in Anglia, contrarium in Gallia, successum fortiri; cum naturam sibi semper & ubique constare, sit certissimum. Potius ergo statuemus reliquos, intellecta perperam ROHOLTI mente, deceptos fuisse. Et revera decipiuntur in eo, quod existimant, argentum *absolute* humiliter deprimi debere a minore, quam a majore aeris inclusi quantitate; cum illud *comparative* tantum intellexisse videatur Auctor: neque enim de toto aere incluso loquitur, sed de *pollice* tantum *aeris*; significans, majorem aeris copiam profundius quidem detrudere posse mercurium, quam minor ejus quantitas eundem in alio tubo deprimat, sic tamen ut singuli pollices majoris quantitatis per se minus efficiant, quam singuli minoris. Atque si hæc sit ROHOLTI mens, ut nulus dubito, nihil aliud dicit, quam quod principis & calculo nostro conforme; juxta hunc enim, liquor, in consueta statione constitutus, descendet per  $4\frac{1}{2}$  digitos, ubi aer inclusus fuerit pollicaris; cum vero fuerit bipollicaris, non nisi deprimetur per  $6\frac{1}{2}$ : ubi quamvis cylindrus inclusi aeris duplo prioris altior est, nequaquam tamen propterea duplo humiliter liquorem detru-  
dit.

Interim non dissimulandum, quod sanior forte est assertionis Roholtianæ sensus, quam solidior ejus subjuncta ratio; qua

No. II. putat Auctor, aerem arctiori loco constrictum, exemplo elaterii automati cujusdam, majoribus sese dilatandi viribus pollere: nec enim, quod aer, hic, quam ibi, arctioribus est conclusus limitibus, propterea magis compressus, aut majus habere elaterium censendus est, dummodo pro ratione angustioris spatii minor quoque sit inclusi aeris quantitas; id est, dummodo aer, quod supponitur, ejusdem utrobique sit densitatis seu consistentiæ. Minus vero adhuc excusari poterunt illi, qui, hoc elaterii simile ulterius extendentes, sibi persuadent, aerem minori loco inclusum absolute majorem præstare debere effectum, quam alium sub majori contentum: si enim elaterium certæ cujusdam aeris portionis sub simplo spatio majoris foret efficaciam, quam duplo majoris ejus quantitatis sub duplo spatio; tum sequeretur ex eodem fundamento, pauxillum pulveris pyrii, quod sclopetis minoribus solet inseri, majorem habiturum vim glandem explodendi, quam habet major ejus quantitas altius intrusa tormento. Quamvis interim verum sit, & ipsis principiis nostris conforme, quod ubi eadem quantitas aeris ampliatis intervallis rarefit, & majus tubi spatium implere cogitur, ejus efficacia deprimendi liquorem non amplius tanta futura sit, quanta fuit antea, ubi occupaverat minus spatium; propterea quod per rarefactionem ejus debilitatur elaterium: uti nullam dubium est, si eadem (nec major) quantitas pulveris, quo sclopetum onerantur, ita immittatur scapo, ut, dispersis a se granis, majorem locum occupet, multo minorem habituram esse effectum, quam ubi grana densius constipata, minori spatio fuere conclusa.

Aer efficit  
Firmitatem  
corporum,  
uti suspen-  
sionem li-  
quorum  
in tubis.

Sed jam dudum, Benevole Lector, tua abusus patientia, atque Dissertationis pene prætergressus limites, in instituti mei orbitam quantocyus redibo. Postquam, proluxa hic digressionem, de *Atmosfera nostra Gravitate* multa disserui, ostendendo, quamnam possint esse ejus partes in suspensione liquorum, & quo pacto argumenta in contrarium allata, vel per *Elaterium Aeris*, vel per ejus *Resistentiam passivam*, vel per utrumque commode queant explicari; jure suspicabimur, imo nulli amplius dubitabimus, eandem ipsam Gravitationem quoque esse Cohæsi-

nis

nis partium duri corporis causam; cum, præter eam, nullum No.II.  
possit concipi aliud gluten, quo connectantur; adeo ut hæc du-  
rorum corporum, utut vulgaris, proprietas, non minorem me-  
reatur considerationem, quam mereri primum visa fuit TOR-  
RICELLIO mercurii in tubo suspensio; neque hæc, quam illa,  
majus sit naturæ miraculum censenda.

Hoc ergo supposito, quia mens nostra proclivis solet esse ad  
comparandos statim invicem duos effectus, quorum cognoverit  
eandem esse causam; hinc non cunctabimur, inter Suspensio-  
nem liquorum & CohæSIONem corpusculorum talem instituere  
parallelismum. Primum autem & proximum, quod cogitanti  
sele offert, est descensus argenti vivi, qui animadverti solet in  
tubo longiori 29½ digitis. Unde mox inferemus, similem effec-  
tum debere conspici in corporibus duris, ubi certam quandam  
altitudinem exceßerint, atque verbi gr. partes baculi cujuscun-  
que, sive attracti, sive suspensi necessario disruptum iri, tum  
cum totius baculi pondus superarit pondus similis columnæ at-  
mosphæricæ. Quare ut ejus rei faciamus periculum, examina-  
bimus corpora quævis ponderosissima, aurum, plumbum, fer-  
rum, &c. & quoniam aurum decies novies, plumbum duode-  
cies, ferrum octies, mercurius vero quatuordecies aqua in spe-  
cie graviora deprehensa sunt; & proinde mercurii ad aurum ra-  
tio est subsuperquintupartiens decimas quartas, ad plumbum ses-  
quifexta, ad ferrum supertripartiens quartas; inde calculo eli-  
ciemus, cylindrum aureum 21½ dig., plumbeum 34½ dig., fer-  
reum 51½ digitorum, æquiponderaturos simili cylindro mercu-  
riali 29½ pollicum, cui æquivalet similis cylindrus aerius, a ter-  
ræ superficie ad extimos atmosphæreæ limites protensus. Unde  
inferre non cunctabimur, fore, ut baculi aurei, plumbei, fer-  
rei, attracti vel suspensi, necessario in frustra concidant, ubi as-  
signatam singuli altitudinem exuperent; eo quod a simili cylin-  
dro atmosphærico, quo ponderosiores tum existunt, non pos-  
sint amplius propelli, si attrahantur, nec sustentari, si suspen-  
dantur.

An vero  
solus aer,  
disquiri-  
tur per  
compara-  
tionem e-  
jus, quod  
accidit  
mercurio  
in tubo  
longiori.

Qua-

No. II. Quare oculis in naturam coniectis dispiciemus, num hæc ita se habeant; sed mirabimur, ratiocinia & calculum nostrum immane quantum adhuc a quotidiana experientia abludere; utpote quæ testari solet, ferramenta non tantum 46 digitorum, sed plurium perticarum, prodigiosæque longitudinis catenas trahi aut suspendi, suspensæve teneri multorum annorum decursu posse, absque ullo rupturæ periculo.

Concluditur, ipsum quodque Ætherem gravitare.

Fateor, nos primo ne cogitando quidem assecuturos, quæ unquam possit esse causa, quale cæmentum, qualeve gluten, quod has ingentis ponderis catenas a lapsu sustentet; cum absurdum sit, effectum hunc proficisci posse a tantillo pondere cylindri atmospherici toties minori. Sed quoniam ex superioribus clare quoque percepisse nobis persuademus, pertinacem hanc cohesionem partium duri corporis nulli alii deberi causæ, ne quieti quidem ipsi, præterquam soli pressioni corporis alicujus externi; concludere non dubitabimus, omnino necessum esse, ut suspensio & cohesio partium baculi proficiscatur quidem a pondere corporis alicujus externi, sed a pondere longe majori, quam est pondus solius atmospheræ: unde in suspicionem hanc incidemus, non solum aerem crassiores, sed ætherem ipsum, omnemque materiam subtiliorem, longe supra atmospheræ limites diffusam, aliqua quoque gravitate præditam esse, quæ, juncta cum gravitate atmospheræ, effectum producat, quem hæc sola producere nequibat.

Ætherem gravitare probatur e natura & causis gravitatis.

Quamquam vero mera tantum hæc adhuc suspicio sit, mox tamen abibit in probabilem conjecturam, quando in memoriam nobis revocaverimus ea, quæ superius dicta sunt de Natura & Causis Gravitatis. Hæc enim cum consistat in eo, quod particulae materiæ Terræ circumfusæ, atque in communem vorticem actæ, conatum habeant a centro vorticis recedendi, aliasque particulas minus agitationis habentes versus Terram repellendi; manifestum est, hanc deorsum premendi vim competere debere non minus materiæ subtili, quam aeri crassiori, quoniam idem motus vorticosus eam implicans, eundem recedendi a centro, aliaque corpora versus illud propellendi conatum ei imprimit.

Unde



Unde non minori jure Gravis dici meretur, quam aer atmos- No. II.  
phæricus, quem ita vocare assueti sumus, non tam quod ipse  
invisibilis descendat, quam quod descendere faciat alia corpora  
visibilia sibi exposita. Si qui vero aerem, hac de causa, levem  
potius quam gravem nuncupandum esse censent; illis nullam in-  
tentabo litem, cum sufficiat mihi, ætheri talem asseruisse pres-  
sionem, quæ sit per omnia similis illi, qua aer crassior statui-  
tur efficere cohæSIONem marmorum, deprimere in vasculo mer-  
curium, cumque in tubum sursum intrudere, aliaque similia ef-  
fecta præstare: nam an ista pressio gravitatis aut gravitationis,  
an ponderositatis, an levitatis demum nomine venire debeat,  
parum refert; nisi forte præstat, illorum modo loquendi sese  
accommodare, quibus primo placuit virtutem hanc, quam ha-  
bet atmosphaera, connectendi marmora, deprimendique in vase  
liquorem, gravitatis, non levitatis titulo insignire. Si tamen  
verborum delectus sit habendus; putem, concinnius illa quæ des-  
cendunt, vocari gravia; quæ vero descendere faciunt, aut quo-  
quo modo incumbunt premuntve super alio corpore, rectius di-  
ci *gravitare*, aut *ponderare*. Sed adde etiam, quod difficulter  
concipi potest, qua ratione aer ætheris deprimant corpora gra-  
via sibi exposita, nisi una descendant & ipsi, præsertim ubi nos-  
ter Gravitatem explicandi modus obtinet; id quod omnem scru-  
pulum eximere poterit illis, qui hanc corpora deprimendi virtu-  
tem Levitatis nomine insignire mallent. Atque probabiliter huic  
ipsi ætheris sive gravitati, sive gravitationi ascribendum, quod  
aer crassior, non per totum hunc vorticem æqualiter diffusus sit,  
sed in infimo ac terræ proximo subsederit loco, in quem ob  
languidiorem sui agitationem, ab æthere detrusus forte fuit; si-  
cuti ob similem causam faeces vini, a materia spirituosiore sepa-  
rata, ad dolii fundum subsidere solent.

Sed ut nostra conjectura omnimodam induat certitudinem; cau- Item e  
sam, quæso, expendamus, cur postquam recipiens aqua imple- descensu  
veris, obstruxeris, atque embolum detraxeris, aqua non hæreat liquorum  
summitati recipientis affixa, verum prompte insequatur embolum, in vasis  
atque in scapum concedat: quare etiam, mercurius tubo longiori oclusis.

Jacobi Bernoulli Opera.

P

29 dig.

No. II. 29 dig. inclusus deorsum labatur. Profecto non sufficit dicere, hos liquores vi suæ gravitatis descendere; cum enim certum sit, hanc gravitatem non promanare ab aliquo principio interno, sed ab externi cujusdam corporis impulsione, determinandum esset, quale sit corpus istud, descensum hunc in liquoribus efficiens; & cum non possit esse aer atmosphæricus, cui aditus undique præclusus est, erit ergo necessario pondus materiæ subtilis, recipiens ingressæ, stipatæque mole totius columnæ æthereæ incumbentis, quacum per poros vitri communicationem habet. Imo tantum abest ut, sine hac ætheris gravitate, descendere possent liquores, ut violenter quoque detrusi cum impetu superiora versus resilirent, ob recedendi a centro Terræ conatum sibi impressum a motu vorticoso, cui omnia hæc sublunaria involuta sunt. Neque huic nostræ doctrinæ officit, quod aliqua diversitas animadvertatur inter aquam recipienti inclusam, & inter aerem, in eo quod hic sese in recipiens, æqualiter, non minus sursum atque deorsum, diffundat, non vero imitar aquæ subsidat; uti quidem subsidere debere videretur, si materia subtilis aliquam super illo exerceret gravitationem. Tenendum namque, materiam subtilem gravem esse, aeremque revera subtili graviorem, & hætenus in subtili subsidere debere: sed quia excessus, quo gravitas terrestris alicujus particulæ aeris superat gravitatem æqualis particulæ materiæ subtilis, non tantus est, quantum ejusdem particulæ terrestris elaterium; hinc fieri necessum est, ut fortior elaterii vis effectum gravitatis impediens, aerem per totum recipiens, non minus sursum atque deorsum, dispergat.

Aliud porro pressionis ætheris argumentum est; quod nequeat concipi, quo pacto aeris particulæ superiores premant gravitate sua inferiores, siquidem singulæ a singulis (quæ fluidorum natura est), interspersa materia subtili, separatæ sint; nisi concipiatur, superiores premere subtilem, utramque vero, junctis viribus, inferiores.

Ætherem  
gravitare  
in Philo-  
sophia

Sed eo minus denique hæc ætheris gravitatio mira videri nobis debet, quod tota fere Philosophia Cartesiana absolvitur pressione materiæ cælestis (quæ globulorum secundi elementi nomine

mine ipsi venit); non tantum tali, qua singulæ hujus materiæ No. II.  
 particulæ peculiarem exercentes motum, multorum particularium Cartesia-  
 effectorum causæ existunt; sed insuper universali aliqua pressio- na nullum  
 ne, qua dicti globuli, a rotatione corporis solaris, circum circa myste.  
 continua serie protrusi, in fundo oculorum nostrorum fibras, rium.  
 seu capillamenta nervi optici concutunt, atque ita luminis in  
 nobis sensum efficiunt: nulla enim erit ratio, quare in reliquis  
 corporibus, quibus incumbunt, hac sua pressione, non pari ra-  
 tione effectum gravitatis producere possint; præsertim ob ana-  
 logiam pressionis horum globulorum ac gravitatis atmosphæræ,  
 quarum utraque ab alicujus vorticis, illa solaris, hæc terreni,  
 gyratione derivatur. Notabimus ergo hac occasione, quamvis  
 illius tantum gravitatem materiæ demonstrasse mihi sufficiat,  
 quæ: in hoc vortice sublunari contenta, a motu ejus vorticoso  
 vim acquirit a centro recedendi, aliaque corpora versus illud  
 propellendi; me tamen subtilioribus ingeniis discutiendum adhuc  
 relinquere, annon & omnis illa materia inter Lunam Solem-  
 que intercepta in censum corporum gravium referri possit, ob  
 pressionem, qua continuo, a Sole deorsum, Terram versus,  
 impellitur vibraturve; imo nunquid totius hujus, quam late pa-  
 tet, universi materia quodammodo gravis dici possit, ob arctis-  
 simam constipationem particularum suarum; qua fiat, ut, omni  
 vacuo inter eas excluso, nulla possit a vorticis sui rotatione im-  
 pelli, quin subito premat infinitam aliarum seriem in longissima  
 linea, ex uno vortice in alium, protensam, atque ita subinde  
 Terram quoque nostram in occursum feriat. Illud tantum hic  
 concedi mihi velim, quod gravitas ætheris sublunaris, (sic vo-  
 co materiam subtiliorem, quatenus contradistinguitur aeri cras-  
 siori,) varias possit accipere modificationes a pressione ætheris  
 supralunaris, & vel augeri vel minui, prout, diversis anni  
 tempestatibus, ab illa fortius debiliusve Terram versus impel-  
 litur.

Concessa itaque jam ætheris pressione, seu gravitate; non Per Gra-  
 arduum nobis erit rationem reddere, unde sit quod partes cate- viratam  
 næ, etiamsi longissimæ, tam firmiter cohæcant. Cum enim ætheris  
 P 2 explicata-  
 tra-

No. II.  
tur cohæ-  
sio par-  
tium ba-  
culi.

trahitur, vel suspenditur ex alto talis catena; cogitandum est, per hanc attractionem vel suspensionem, retundi & sufflaminari, ut sic dicam, pondus cylindri aërio-ætherei, summæ superficiæ catenæ perpendiculariter incumbens, ita ut nequeat amplius gravitare super reliquas catenæ partes; quo fit, ut planum illud imaginarium, inferiorem catenæ superficiem lambens, hac in parte, qua huic superficiæ subest, a solo catenæ pondere (vel rectius a nullo) prematur; cum in reliquis suis partibus ab incumbente mole aërio-ætherea longe maiorem subeat pressionem; unde, juxta Mechanicæ & Hydrostaticæ leges, minore pressione fortiori cedente, opus est, ut partes catenæ inferiores a pondere laterali subinde sublevantur, ubi suspensa est catena; vel impellantur contra supremas, ubi attracta est: unde necessaria partium sequi debet connexio & mutua quies. E quibus perspicuum esse poterit, tantum abesse, ut quies sit cohæsionis istius causa, ut potius & quies, & cohæsiō, (utriusque enim eundem tantum conceptum habeo,) compressionis externæ manifestissimus sit effectus.

An possit  
dari bacu-  
lus, cujus  
pondus  
superet  
pondus  
similis  
cylindri  
ætherei?

Quanquam autem ex iis, quæ modo diximus, concludere promptum sit, lapsuram necessario catenam, partesque a partibus separatam iri, ubi pondus catenæ exceßerit pondus similis cylindri aërio-ætherei; non tamen sperandum hujus consecutarii veritatem, unquam aliter quam in speculationes demonstrari posse: ut enim in praxi exhiberetur, tam prodigiosæ longitudinis requireretur baculus, isque ex tanta altitudine suspensus, ut ab industria humana tale quid expectari prorsus nequeat. Quod ut cuivis pateat; supponamus, illam tantum ætheris gravitare portionem, quæ in minori isto vortice Terram inter & Lunam expansa est; ejusque specificam gravitatem centies minorem esse gravitate crassioris, quem spiramus, aeris; sumamusque aurum omnium hactenus cognitorum corporum gravissimum. Hoc, cum decies novies gravius sit aqua, aqua fere millies aere, aer vero ex suppositione centies æthere; erit ipsum aurum 1900000ies in specie gravius æthere; & consequenter ætheris cylindrus æquiponderabit simili cylindro aureo 1900000 vicibus bre-

breviori. Quare, cum altitudo cylindri ætherei sit 90 circiter No. II.  
 semidiametrorum Terræ, id est, 43000 milliar. German. sive  
 860000000 pedum Rhinlandicorum, (quanta videlicet est Lu-  
 næ a Terra distantia) erit altitudo cylindri aurei, æthereo æqui-  
 ponderantis, plusquam 452½ pedum; quibus addendi adhuc duo  
 pedes, pro pondere atmosphærico, ut habeantur 454½ pedes.  
 Tanta videlicet deberet esse longitudo baculi ex metallo ponde-  
 rossimo confecti, antequam superet vim illam, qua ejus par-  
 tes cohærent: unde liquet, quanta reliquorum metallorum,  
 auro longe leviorum, cylindris debeatur longitudo, quæ suffi-  
 ciens sit ad divellendas eorum partes, atque ad superandum pon-  
 dus æthereum, quo illæ cohærere solent.

Atque ita quidem ratiocinandum fuit, ubi, facilioris intelli-  
 gentiæ gratia, rem vulgari more hydrostatico expedire placuit;  
 supponendo in catena pondus quoddam, quod ætheris pressioni  
 contranitur, eamque si satis magnum fuerit, superare valeat:  
 sed, si rem attentius introspeciamus, patebit, quantæcunque etiam  
 fuerit longitudinis catena, impossibile esse, ut ejus partes infe-  
 riores a superioribus separentur; propterea quia, in suspensione  
 vel attractione, nullum amplius possident pondus, quod illas  
 ad lapsum invitet. Consideremus primo catenam alicubi suspen-  
 sam, & si vis, aliquot mille pedes longam, quare deciderent  
 partes ejus inferiores? Frustra dicis, quia sunt ponderosæ: quid  
 enim est pondus? haud dubie nisus aliquis & tendentia deor-  
 sum: unde vero iste nisus? fateris non a principio quodam in-  
 trinseco, sed nec ab incumbenti ætheris pressione, utpote quæ  
 per suspensionem terminari supponitur in summa superficie cate-  
 næ, nec pertingere ad partes ejus inferiores. Nullus ergo talis  
 descendendi in ipsis est conatus: non ergo descendant, etiamsi  
 nulla supponatur materia, quæ illas contra supremas catenæ par-  
 tes impellat. Sed contemplemur etiam nunc catenam, altera  
 sui extremitate attractam, iterumque assignata mensura multo  
 longiorem; & expendamus rationem, quare partes ejus sequen-  
 tes deberent non attractæ relinqui. Quia sunt, inquis, ponde-  
 rosiore simili cylindro acrio-æthereo, a quo proinde nequeunt

Baculus  
 attractus  
 vel sus-  
 pensus  
 proprie  
 nullum  
 possidet  
 pondus,  
 adeoque  
 a minima  
 ætheris  
 vi propel-  
 li poterit.



No. II. propelli : supponis ergo habere pondus ; sed unde hoc ; si non ab interno principio , nec ab externa ætheris incumbentia , quæ per attractionem irrita fit. Regeris , ipsam catenæ molem & quietem resistere pressioni ætheris lateralis , illam sublevare conantis : atque in hac resistantia consistere ejus pondus. Tota ergo quæstio huc rediret , an corpus aliquod quantumvis magnum in loco vacuo , id est , tali , ubi a nihilo adjuvaretur , vel impediretur , constitutum , sola sua mole , vel quiete , potentia moventi resistere potis esset ? & quia puto concipi non posse , qualis sit ista in magnitudine vel quiete , qui modi sunt pure passivi , resistendi vis ; credendum , minimam potentiam motricem sufficientem esse movendo maximo corpori quiescenti in vacuo constituto , contra Reg. motus 4<sup>ta</sup>m Cartesianam. Unde quia , per attractionem catenæ , inter supremam ejus partem & sequentes , constituitur ( sit venia dicto ) vacuum quasi *potentiale* , id est , talis locus , in quem inferiores , nullo impediante , protrudi possunt ; sequitur minimam ambientis materiæ pressionem capacem esse sublevandæ toti catenæ , licet multoties longiori.

Cur supposita ætheris gravitate, liquores tamen non debeant ad infinitam altitudinem in tubis suspensi hære?

Longe autem alia ratione hac in parte comparatum est cum suspensione liquorum in tubis ; quare diluendus est circa illam scrupulus , quem prævideo ad impugnandum ætheris pondus moveri posse : Existimaret enim forte aliquis , si præter atmosphæram gravitaret omnis illa materia subtilis ad orbem usque Lunæ protensa , fore , ut aqua incomparabiliter altius in tubum elevaretur , quam ad 34 tantum pedes ; ipseque mercurius in multo majore quam 29 digitorum altitudine suspensus hæreret : quoniam enim gravitates aeris & aquæ sunt , ut 1 ad 1000 , numero rotundo ; vel aeris & mercurii , ut 1 ad 14000 ; oportet , ut cylindrus fluidi externi , qui in æquilibrio aquam 34 pedum , aut mercurium 29 digitorum sustinet , cylindrum aqueum non nisi millies , aut mercurialem 14000<sup>ies</sup> superet ; adeo ut altitudinem 34000 pedum vix excedere queat ; ( quanta quoque fere esse poterit atmosphærae altitudo , siquidem uniformis ubique supponatur consistentiæ ; ) tantum abest , ut ad orbem usque



que Lunæ pertingere, ac 43000 milliarium altitudinem ex-  
 quare possit. Considerandum itaque, latera tubi, quæ acri cras-  
 siori transitum negant, non perinde materiæ subtili impervia es-  
 se; quare cum hæc libere per poros istorum laterum, ut &  
 durissimi cujusque corporis, irruere possit; non est, quod dici  
 queat materiam subtilem, imminentem vasculo extra tubum,  
 fortius impellere liquorem sursum, quam illa quæ liquori in tu-  
 bo incumbit, eundem premit deorsum; cum utrique liquori,  
 extra & intra tubum, æqualis altitudinis cylindrus æthereus in-  
 cumbat: (exigua enim illa paucorum pedum differentia, qua  
 cylindrus vasculi altior est cylindro tubi, in tam immensa cy-  
 lindrorum altitudine nullius est momenti: ) subductis ergo æqua-  
 libus istis viribus in contrarium tendentibus, ac se mutuo des-  
 truentibus, remanet solum aeris atmosphærici pondus, præter:  
 materiam subtilem super vasculo gravitans, cui impulsio liquo-  
 ris in tubum ascribenda.

Idem quoque responderi tuto poterit, quotiescunque animad-  
 vertimus, cylindrum acrio - æthereum non majus sustentare vel  
 elevare posse pondus, quam atmosphærico æquivalens. Huc  
 facere poterit *Exper. 33. Illustr.* BOYLII in *Libro ejus de No-*  
*vis Experim.* ubi narrat, postquam evacuatum fuisset recipiens,  
 detractum embolum, sublata vi detrahente, tanto impetu in  
 antliam veluti sua sponte reascendisse, ut etiam annexum sibi  
 pondus plusquam centum librarum in altum sustulerit. Quum  
 enim hic maximi ponderis, quod ab embolo sic sursum rapi  
 poterat, mentionem factam esse mihi persuaderem; explicando  
 pondus plusquam centum librarum de paucis ultra centum li-  
 bris, cupido me incessit calculo explorandi, an solius atmo-  
 sphæræ pressio isti ponderi sublevando sufficiens esse potuerit.  
 Quoniam autem constat, cylindrum atmosphæricum æquiponde-  
 rare simili cylindro aqueo 34 circiter pedum; suffecerit inves-  
 igare pondus talis cylindri aquei, cujus basis insuper obtinet  
 diametrum 3 digitorum, quanta nempe est diameter scapi atque  
 emboli, in machina Boyleana. Sumsi itaque, dum aliud vas  
 regularius non erat ad manus, vulgarem urnam lymphaticam  
 a b c d,

No. II.

Cur Em-  
 bolus  
 evacuatus  
 antliæ  
 non nisi  
 centum  
 plus mi-  
 nus libras  
 sustineat?

No. II. *abcd*, conii truncati figuram præ se ferentem : Ejus summa  
 Fig. 19. basis *ab* in diametro continebat unum pedem Anglicanum ,  
 seu mille scrupulos ; ima *cd*, 792 ; profunditas perpendicularis  
*ge*, 750 : hinc superioris basis area reperitur 785714 , infe-  
 rioris 492850 , scrup. quadr. Et quia in conis truncatis , ut  
 differentia diametri basium est ad profunditatem , ita diameter  
 basis minoris ad altitudinem frusti refecti ; hinc erit , ut 208 ad  
 750 , ita 792 ad rectam *ef*, 2856 scrupul. cujus tertia pars  
 952 , ducta in aream 492850 , mihi exhibuit soliditatem conii  
 imaginarii *efd*, nempe 469193200 scrupulorum cubicorum.  
 Similiter area basis majoris 785714 , ducta in 1202 , tertiam  
 videlicet partem aggregati profunditatis urnæ & altitudinis conii  
 imaginarii , manifestavit soliditatem conii integri *afb*, quæ est  
 844428228 , scrup. cubic. ; a qua subtracta soliditas conii ima-  
 ginarii *efd*, reliquit capacitatem quæsitam urnæ *abcd*, nempe  
 475235028 scrup. cubic. Quo facto urnam in balance appen-  
 di , primo vacuum , reperique pondus ejus 7 lib. 6. unc. can-  
 demque postmodum aqua repletam , ponderabatque 35 lib. 6  
 unc. illo ergo ab hoc subducto , relinquebantur pro pondere  
 solius aquæ 28 librarum ; unde conclusi 475235028 scrupulos cu-  
 bicos aqueos deprimere 28 libras , integrum vero pedem cubi-  
 cum aquæ propemodum \* 39. libr. Porro , quia circulus , cu-  
 jus diameter est trium digitorum , sive 250 scrupul. aream ha-  
 bet 49107 scrup. quadr. si ducatur hæc in 34 pedes , sive 34000  
 scrupulos , prodibunt 1669638000 scrup. cub. pro soliditate cy-  
 lindri. Quare dicendum : Si 475235028 scrup. cub. aquæ de-  
 primunt 28 libras , quantum ponderabunt istorum scrupulorum  
 1669638000 ? Facit 94 libras , pro pondere cylindri aquei 34  
 pedes alti , & latitudinis tripollicaris , sive similis cylindri atmos-  
 phærici , quantum quoque præterpropter fuit illud pondus , quod in  
 Expe-

Pondus  
 pedis cu-  
 bici  
 aquæ.

Pondus  
 cylindri  
 atmos-  
 phærici  
 latitudi-  
 nis tripol-  
 licaris.

\* ROMOLTUS Physicæ suæ parte prima. cap. 9. §. 10. ponit pro pondere  
 pedis cubici aquæ 71 libras ; sed pes Parisiensis Anglicano major , ille 1055 , hic  
 tantum 968 est partium , quarum Rhinlandicus continet mille. Taceo , quæ  
 in ponderibus intercedere potest , differentiam.

Experimento Boyliano embolo appensum & ab illo sublevatum No. II. fuit.

Exinde vero frustra quis putaret, convelli gravitatem ætheris, sub prætextu, quod solum pondus atmosphæricum huic effectui producendo capax fuerit, & quod, supposita ætheris pressione, longe majus pondus embolo annexum sustentari & elevari debuisset. Nam considerandum est, dum evacuatur aer, non pariter exhauriri posse ex antlia materiam subtilem, quin subinde liberum sibi paret introitum in recipiens atque antliæ scapum per eorum poros, ibique non minori robore premat super interiore emboli superficie, quam exterior ætheris cylindrus premit super exteriori; unde, æqualibus his abolitis viribus, remanet tantum illud cylindri atmosphærici superpondium efficax, quo exterior emboli pressio interiorem superat.

Atque hinc maxima elucet disparitas, quæ hac in parte intercedit, inter suspensionem attractionemve baculi vel catenæ, & inter suspensionem liquorum in tubis, vel emboli in scapo recipientis: nam, quantum ad baculum suspensum vel attractum; is, toto suspensionis seu attractionis tempore, reapse nullam possidet gravitatem, neque in actu secundo, neque in actu primo, id est, neque descendit, neque descendendi habet conatum, utpote liberatus a pressione incumbentis ætheris, cujus tota vis terminatur in summa baculi superficie, vel potius in manu attrahentis, aut unco, ex quo suspensus est: hinc enim fit, ut baculus, utut procerus, a minima ætheris vi sustentari aut propelli debeat. Sed aliter sentiendum de liquore in tubo, aut embolo cum annexo pondere in scapo recipientis; qui quamvis actu non descendant, retinent tamen omnem suam gravitationem & descendendi nisum, propterea quia efficaciam pressionis materiæ subtilis, per tubum vel recipiens ingressæ, in omnibus suis partibus adhuc persentiscunt: neque enim sane ut manibus sustentati, vel ut clavis ad tubi scapique latera, instar baculorum, affixi concipi debent: unde sequitur, non majorem ipsorum molem hac ratione sustentari posse, quam cujus descendendi nisus debiliior est vi externæ pressionis atmosphæricæ.

Disparitas inter suspensionem baculi, & liquorum in tubis.

*Jac. Bernoulli Opera.*

Q

In-

No. II. Interim tamen etiam recte exinde colligimus, si quo artificio materia subtilis ab ingressu tubi arceri queat, fore, ut liquor ad quamvis imaginabilem altitudinem in tubum elevari, vel in eo suspensus teneri debeat; quod ab omnibus Plenistis, præsertim ab iis, qui ad Fugam vacui confugere in hac materia solent, mihi concessum iri non dubito.

Cur Mercurius repurgatus in sex pedum altitudine hæreat?

Quanquam autem tale quid effectui dare impossibile forte videatur, ob improbum obstaculum, quod nullus dari possit tubus, adeo solidus & compactus, qui sit materiæ subtili impenetrabilis; non tacendum tamen est hanc in rem rarum quoddam experimentum, quod Nob. ROHOLTUS *Phisic part. prim. cap. 12. §. 29.* ex Anglia sibi transmissum memorat, videlicet quod mercurius, in exhausto recipienti aliquantum temporis aservatus, ad altitudinem sex pedum citra lapsum in tubo suspensus hæreat: ubi observandum, mercurium, durante sua in evacuato recipienti mansione, a magna copia materiæ peregrinæ, quæ antea in ejus poris latitaverat, repurgari; perque hujus materiæ exhalationem ejus poros reddi debere multo, quam fuerant, angustiores: quo concesso, facilem dabimus ex iis, quæ hætenus dicta fuere, phænomeni solutionem: Si supponamus enim, mercurium hoc pacto repurgatum ita sese insinuare & adaptare tubi poris, ut omnes eorum recessus quam exactissime oppleat; consequi videtur, materiam subtilem in illas tantum mercurii particulas agere posse, quæ poros vitri obstruendo ejus pressioni exponuntur; cæteras vero, quæ solidis tubi partibus, tanquam propugnaculo muniuntur, ab hac pressione immunes præstari debere, quod materia subtilis objectu priorum ab omnimoda in tubum irruptione prohibetur. Unde quia cylindrus mercurialis tubo inclusus, a perpendiculari columna æthereæ parte sui tantum aliqua (qua, ut sic dicam, cylindrum refert perforatum) deorsum premitur; dum interea ab æthere laterali vasculo incumbenti secundum se totum sursum impellitur; non potest non ista impulsio priori multo prævalere, atque ita longe procerior mercurii cylindrus sustentari, quam si, illo non  
repur-

repurgato, penetrasset tubum æther, superque totum ejus corpus æqualiter sese diffudisset. No. II.

Observandum etiam hac occasione, esse aliquos, qui existimant, materiam subtilem in vulgari experimento Torricelliano non per vitrum, quod illi sit impenetrabile, sed per ipsius mercurii poros sibi transitum parare; id quod per alterum experimentum, siquidem fidem mereatur, necessario inferri autumat R O H O L T U S: nulla enim alia, inquit, phænomeni hujus dari posset ratio, quam quod clausis, vel angustatis, mercurii repurgati poris, omnis materiæ subtili præclusa foret via, qua pelli posset ab incluso mercurio in locum, ad quem descendum ipse naturali sua gravitate proclivis est. Veruntamen aliam phænomeni jam dedimus rationem, non recurrendo ad omnimodam vitri soliditatem: imo ne quidem necessaria esset allata responsio, supposita etiam tubi impenetrabilitate, & sufficienti pororum mercurii angustia; simpliciter dicendum fuisset, mercurium repurgatum ideo in tanta altitudine hæere suspensum, quod omni exutus sit gravitate; cur enim descenderet, ubi nulla est gravitas seu descendendi nîsus? unde vero iste descendendi nîsus, ubi nulla est materia deorsum premens? unde tandem ista materia, cui undequaque negatur ingressus? Verum tam altas egit in mentibus nostris radices idea gravitatis, ceu qualitatis alicujus inhærentis, & a subjecto suo inseparabilis; ut, omni etiam adhibito studio, vix cavere possimus, quin crebro inventerati hujus conceptus indicia verbis incogitanter prodamus.

Alia nunc suboritur nobis excutienda quæstio, unde nempe fiat, quod tota hæc fluida materia, Terram quaquaversum ambiens, siquidem gravitet, atque ista gravitate cohesionis partium causa existat in corporibus duris, non possit idem efficere in corporibus liquidis, & ne quidem, tota hac sua pressione, duas solas guttulas aquæ ita connectere, quin, attracta vel suspensa una, altera protinus decidat atque ab illa separetur; cum tamen liquida corpora non minus ejus pressione exposita sint, atque dura. Observo autem, hujus quæstionis solutionem ex principiis nostris reddi non posse, quin illa eadem opera nos deducat in

Cur pressione Ætheris non connectantur, uti durorum, ita liquidorum particulae?

No. II. cognitionem naturæ corporum durorum & liquidorum, qualis ea concipitur a sanioris Philosophiæ Cultoribus, quod proinde sententiam meam de Pressione Ætheris, Cohæſionis corporum causa, non parum confirmabit: Supponamus itaque duo cor-

*Fig. 20.* pora A, & B, libero aeri exposita, quorum superius A, vel attractum, vel suspensum, vel quoquo modo fulcro innixum intelligatur; & consideremus primo, quid circa corpus B, juxta principia nostra, fieri debeat, ut affixum hæreat corpori A. Manifestum autem, quia ambo corpora fluido externo ambiuntur, nos posse concipere varias hujus fluidi columnas, quarum media C incumbat perpendiculariter corpori A, lateralium una D premat superficiem superiorem corporis B, altera E inferiorem; animadvertimusque, quamdiu columna D æqualibus viribus infringit impetum columnæ E pellentis sursum, corpus B non posse jungi superfici ei corporis A, sed necessario ab illo separatum iri, & lapsurum vi tanti ponderis, quanto juvatur conatus deprimendi columnæ D a propria gravitate corporis B. Unde concludimus, si corpora A & B cohærere debeant, necessum esse, ut superficies superior corporis B a pressione columnæ D immunis præstetur; quod aliter fieri nequit, quam si

*Fig. 21.* superficies contiguæ corporum A & B immediate sese contingant; (ut videre est in *Fig. 21.*) sic enim fiet, ut exclusa columna D, corpus B illa tantum pressione afficiatur, quæ illud sursum impellit & agglutinat corpori A: neque enim existimandum est, columnam C ullatenus in corpus B, quamvis immediate junctum corpori A, agere posse, illud deorsum impellendo; utpote cujus tota pressio terminatur in corpus A, vel potius in manum illud elevantem, aut fulcrum illud sustentans. Et sic quidem cohærebunt corpora: unde intellectu non difficile est, cum contrariorum sit contraria ratio, quid corpora reddat liquida: nihil enim aliud ad hoc requiri videtur, quam ut columna D hiatus sive rima relinquatur aperta, qua possit irruere inter superficies utriusque corporis A & B; atque, hoc deorsum premendo, irritam reddere columnæ E pressionem sursum; (uti in *Fig. 20.*) sic namque fiet, ut corpus B necessario separatur



retur ab A, decidatque tanto impetu, quantus respondet excessui, quo pondus B superat pondus æqualis voluminis materiæ sursum prementis. No. II.

E quibus tandem judicabimus, naturam *Liquidi* cujusque corporis in eo consistere, quod particulæ ejus singulæ a singulis separatæ sint atque discretæ, interjectis intervallis *iii*, alia materia peregrina repletis, quæ adeo non inepte comparari poterunt densæ congeriei minutissimarum insularum, in materia subtili tanquam oceano suo fluitantium; qualis repræsentatur *Fig. 23*. *Duri* vero natura in eo sita est, quod ejus partes continuo sibi omnes adhærescant filo, sic ut nulla inter superficièculas earum queat intercedere materia peregrina, quamvis interea infinitis possit patere poris *aaa*, per quos tanquam per canaliculos deferatur materia subtilis; quo ipso non inconcinne refert tractum terræ continentis, cujus partes omnes longo isthmo protensæ, communicationem habent invicem, & quamvis hinc inde interlabente amne interstinctæ, ponte tamen iterum connexæ sunt; qualis figura adumbrata est num. 24.

Quæ sit  
natura li-  
quidi &  
duri?  
*Fig. 23.*

*Fig. 24.*

Sed quia hic peculiaris aliqua circumstantia, & difficultas non contemnenda circa naturam Liquidorum sese offert, speciali aliquo exemplo rem illustrare conabor: Sit ergo tubus in aere pendulus, & repletus aqua, cujus duæ solummodo considerentur guttulæ A, & B, (quia reliquarum par est ratio) annihiletur per Dei potentiam tubus, suspensaque concipiatur in aere guttula superior, quid fiet de reliqua? decidet, inquis, & separabitur ab altera; aere enim undique allabente, erit columna quidem una E, quæ ad ascensum sollicitabit guttulam B, alia vero D, quæ eandem æqualibus viribus conabitur premere deorsum; & quia huic posteriori pressioni auctarium accedit a proprio pondere guttulæ, sequitur illam priori prævalituram, & sic detrusum iri guttulam. Sed ecce nodum: supponis, columnas ambas prementes æqualium esse virium; dum non attendis, illam, quæ premit super superficie inferiore corporis B, ex æthereæ & atmosphæricæ esse compositam, illam vero, quæ superficiè ejusdem superiori incumbit, pure esse ætheream; propterea

*Fig. 26.*

Q 3

quia

No. II. quia rimula illa, inter utramque guttulam interjecta, ob angustiam suam, nullam aliam materiam præterquam subtilem admittit; (constat enim liquores, aut nihil, aut sane perparum, in se continere aeris crassioris, intervallis inter particulas eorum soli subtili patentibus;) unde plane sequeretur contrarium, videlicet pressionem guttulæ sursum, factam a columna aërio-ætherea E, fore tanto validiorem pressione ejusdem deorsum, profecta a columna ætherea D, quanto columnæ E accesserit a cylindro atmosphærico superpondium; & proinde guttulam istam perpetuo adhæsuram superiori.

Pori li-  
quorum  
non sola  
materia  
subtili re-  
pleti.

Quare ut hæc evanescat difficultas; sciendum probabile esse, liquorum poros non soli materiæ subtili patere, sed subinde satis laxos esse, qui imperceptibiles quasdam aeris particulas, vel aliquid aëri analogum hinc inde diffusum hospitentur. Id enim videntur suadere exiguæ illæ bullulæ, quæ e quovis liquore recipienti incluso per exhaustionem effci conspiciuntur, quippe quæ (inclinante in hanc sententiam Illustriss. BOYLEO) aeris ibi delitescantis, atque sese jam expandentis potius, quam elaterii cujusdam ipsius liquoris, sunt effectus; cum similes bullulæ in argento vivo, liquore adeo ponderoso & denso, nullumque haud dubie possidente elaterium, deprehendantur; vid. *Lib. de Nov. Experim. num. 22.*

Cur liquo-  
ri effuso  
sese con-  
festim in-  
sinuet aer?

Verum alia superest respondendi via, etiamsi intervalla liquorum nulla alia quam subtili materia repleta esse supponamus; hoc enim admissio, verum quidem esset, quamdiu nihil aeris atmosphærici subintraverit rimulam duarum guttularum, superque inferiorem guttulam presserit, eam minime lapsuram esse; sed verum etiam foret, guttas sic diu hære non posse, quin statim sese rimulæ insinuet aer: considerandum enim, quantumcunque materiæ subtilis illud est, quod guttulam a guttula determinat, hiatum tamen & rimam semper aliquam inter utramque relictum iri, minutissimam quamvis, rimam tamen; huic rimæ particulæ aeris angulosæ columnæ D necessario sese intrudunt, & cum stipatæ sint mole totius columnæ aëriæ D, non minori nisu hanc rimam studebunt servare apertam atque laxare,

laxare, quam eandem rimam angustare vel claudere conatur columna E; cum vero conatus columnæ D adjuvetur proprio pondere guttulæ, quo impeditur pressio columnæ E, prior necessario superior evadet, atque laxata rima super superficie guttulæ pressionem exercens, eam deorsum impellet. Quodque hic dictum de duabus guttulis, pari ratione de integra mole aquea, alteriusve liquoris, in aerem effusa intelligendum: quoniam enim infinitis istiusmodi patet rimulis *iii*, (*fig. 23.*) per quas aer, cunei instar, desuper & a latere magno impetu sese intrudit; non possunt non laxiores reddi, guttulæque ab aere intromisso deprimi; quod & ex ipso aquæ descensu liquere potest; quo diutius enim hæc continuavit cadere, eo magis magisque ab aere irruente dissipatas videmus guttulas.

Contrario plane modo philosophandum est de Corporibus Firmis seu Duris, v. g. de baculo, cujus nulla pars ab alia separatur, quamvis sub dio suspensus, atque libero aeri expositus sit; cujus ratio est, quod ejus particulæ a provida Matre Natura ita firmiter sibi sint coaptatæ, ut ne minima quidem inter superficialium commissuras relicta sit rima, quæ accessum præbeat materiæ peregrinæ: nam quanquam per illos canaliculorum *maandros* *aaa*, (*fig. 24*) irrumpere possit non tantum subtilis, sed & ipse quandoque aer crassior, atque ita determinare seriem unam particularum *bb*, ab altera *cc*; cogitandum tamen, has series subinde innumeris ramis transversis *bc*, *bc*, sibi connexas esse, atque adeo singulis particulis cum singulis perpetuum, sive immediate, sive per intermedias, esse commercium. Ergo dum attrahitur, vel suspenditur baculus; impeditur per hanc suspensionem, vel attractionem, columna insistens supremis baculi partibus, pariterque, per arctam connexionem particularum, reliquæ omnes columnæ laterales, ne gravitare possint super summas superficies partium inferiorum; quæ cum desuper non premantur, obsecundabunt pressioni ex imo sursum, atque ita perpetuo cohærebunt.

Non arduum etiam erit, his intellectis, cognoscere naturam Corporum mollium & Liquorum crassiorum, quæ cum minus per-

No. II.

Fig. 23.

Cur pressione Ætheris connectantur Durorum particular?

Fig. 24.

In quo consistat mollities & lentor?

No. II. tinaciter cohæreant, quam perfecte dura, ægrius quoque tamen separantur perfecte fluidis. Cum enim particulae ex parte cohærent, ex parte divulsæ sunt, hinc oritur *mollities*; & cum rimulae inter partium superficieculas interjectæ sunt angustiores, quas minus facile, nec nisi cum aliqua mora penetrare possit aer, hinc ille *lentor*.

Cur liquidorum particulae sint rotundiores, durorum oblongiores?

Quem philosophandi ordinem si ulterius vellemus prosequi; varias adhuc detegeremus corporum durorum & liquidorum proprietates, quarum una est, quod Liquidorum particulae debeant, non dico, exacte rotundæ esse, sed magis ad figuram sphaericam accedere, quam Durorum; quia illæ a materia subtili totæ ambitæ, undique fere premi æqualiter, hæ vero, propter aliarum accrescentiam, longorum ramorum figuram nancisci debent.

Cur illæ moveantur, hæ quiescant?

Maxime vero insignes Duri & Liquidi proprietates, quæ præcipuum eorum constituunt discrimen, atque ex principio nostro sponte quasi fluunt, hæ sunt; quod Fluidorum particulae in continua sint agitatione & motu, utpote singulae a singulis separatae; Durorum vero universæ juxta se quiescere debeant, quippe singulae ab aliis sibi connexis impeditæ. Simile cape, crassum forte magis quam ineptum: Duæ Bestiæ solutæ in omnes partes prompte discurrere, seseque in orbem vertere possunt; & dum una ad sinistram, altera eodem momento ad dextram se inflectere poterit: sed vinculo sibi illigatae ubi fuerint, neutra poterit aliquorsum tendere, quin altera nolens volens in eandem plagam rapiatur; imo dum sic, respectu partium conclavis, locum varie mutare possunt, respectu sui tamen, quiescere dicentur; quandoquidem altera in alterius vicinia perpetuo hæret: Ita putandum est, pressionem duarum columnarum aerio-ætherearum esse vinculum illud, quod partes duri corporis inter se connectit, atque ad motum ineptas reddit. Qua occasione præsertim notari velim, sicuti ridiculum foret, bestiarum connexionem, quæ debetur vinculo, ascribere earum quieti, cum hæc contra fluat ex illa; ita non magis excusari posse, si dicatur, causam cohæsionis partium duri corporis deberi ipsarum quieti; cum

cum utraque, & quies, & cohæsiō, ( utriusque enim eundem No. II. habeo conceptum ) debeat esse manifestum consequens & effectum illius pressionis, seu actionis, qua partes invicem connec-  
tuntur.

Illud tamen etiam prætereundum mihi non est; quod quamvis particulae duri corporis ita connexæ, a pressione columna-  
rum aërio-ætherearum impediuntur in illo motu, quo promiscue, atque celerrime, in omnes partes ferri alias potuissent; non tamen necessum sit, ipsis omnem prorsus adimere motum; relinqui enim illis poterit motus languidior in orbem talis, qui fit super axiculis ad partium connexarum superficiecudas perpen-  
dicularibus; quo motu fiet, ut superficies sibi mutuo, secundum se totas quidem, junctæ mancant, partes tamen earum successive aliæ aliis diversimode respondeant. Confirmatur ex eo, quod etiam in adamante, & corpore quovis durissimo, successive temporis alterationes observentur, quæ de intestino particularum motu, licet lentissimo, satis utique testantur. Consule Tractatum Celeb. BOYLEI de *absoluta Quiete in corporibus*.

Alia proprietas Durorum & Liquidorum est, quod hæc facile cedant tactui, illa difficulter: Cujus causam CARTESIUS iterum rejicit in motum & quietem partium, *Part. secund. Princip. §. 56. 57.* Sed nequicquam: an enim digitus meus impellens plus invenit resistentiæ in particulis ferri omnino quiescentibus, quam in particulis aqueis, forsan in adversam digiti mei partem motis? id vero refutatur ex ipsius Regulis motuum, secunda & quinta, invicem collatis; quoniam, juxta hanc, ad movendum corpus quiescens, sufficit, ut ab alio majori quantumvis tarde moto impellatur: ad movendum autem corpus in adversam antea partem motum, requiritur, juxta illam, ut impellens ad minimum æque velociter moveatur, atque corpus impulsus: unde manifeste colligitur, cæteris paribus majore cum facilitate loco propelli illa, quæ plane quiescunt, quam quæ in contrarium moventur. Et quamvis, cum fluidi particulae promiscue in omnes partes ferantur, contingere possit, ut nonnullæ earum in eandem cum digito partem conspirantes, ei faci-

Durorum  
particulas  
absolute  
quiescere,  
non est necesse.

Cur Liqui-  
da facile  
cedant tac-  
tui, Dura  
difficulter:  
& an quies  
ejus rei  
causa sit?

liorem parent transitum; cogitandum tamen subinde, totidem vicissim esse alias, quæ in contrariam partem motæ digiti conatum tantundem impediunt, quantum reliquæ adjuvant; unde quantum ad hoc, digitus non majorem debet sentire, vel resistantiam, vel facilitatem in dividenda aqua, quam si omnes ejus particulæ prorsus quiescerent. CARTESIUS hanc difficultatem prævidens nobis persuadere vult, particulas jam actu motas propterea facilius cedere tactui, quam quiescentes, quod digitus illas impellens non novum iis imprimat motum, ( id quod citra difficultatem fieri nequiret ) sed hoc tantum præstet, ut determinetur ille motus, quem jam habent, in eam partem, versus quas fertur ipse digitus. Veruntamen quia magnus semper, uti dictum, particularum numerus in adversam digiti partem feruntur; cogitur statuere *Philosophus*, facilius esse, ut digitus corpus ita sibi obvians determinet in contrariam partem, quam ut ad motum concitet aliud corpus omnino quiescens; sed, hac ratione, quid fiet de Regulis ejus secunda & quinta, quæ plus requirunt virium ad repellendum corpus in adversam partem motum, ( sive hæc repulsio fiat per communicationem motus, sive per determinationem saltem ) quam ad impellendum corpus quiescens? Quæ quidem invicem adeo manifeste pugnant, ut certissimus sim, CARTESIUM circa hanc materiam sibi ipsi nequaquam satisfecisse, si vel minimum attenderit ad ea, quæ ipsemet stabilivit.

Atque ut palpabili exemplo manifestum fiat, causam facilitatis aut difficultatis, quam sentimus in separandis his vel illis corporibus, non esse motum quietemve partium; consideremus arenæ quendam acervum, qui cum non difficulter cedat tactui, Liquidum quodammodo speciem præ se fert; quamvis ejus grana, nec circa propria centra volvantur, nec motum ullum circularem obeant, qualem *Philosophus* ad constituendam Liquidam naturam ibidem requirit; sed singula juxta se perfecte quiescant: notemusque, hanc arenam firmi corporis naturam tum demum induere, cum mediante frigore, vel cemento, vel alio quovis modo plura ejus grana in unam massam coaluerint,

Vera



Vera ergo ratio, quare Liquidorum partes facile cedant tactui, hæc est; quod cum singulæ a singulis per intervallula separatæ sint, illæ duntaxat impellantur, quas tangis, quæque, materia subtili ex intervallis expulsa, locum facile invenire possunt, quo se recipiant. Quod vero Durorum partes tactui resistent, inde est, quoniam sibi mutuo immediate connexæ cum sint, loco dimoveri sola nulla potest, quin uno sensu, aut penetrentur reliquæ, aut impellantur omnes: vel alio sensu, si una separanda sit ab altera, superetur illa vis, qua connectuntur: unde facilius est, integrum corpus durum movere, quam partium ejus situm inter se mutare; quod adeo verum est, ut in ipsis quoque liquidis, quæ tanta facilitate dividere putamus, non tam partem a parte separemus, quam plura integra corpuscula dura solidave impellamus; talia enim necessario concipi debent minimæ liquorum particulæ, ubi singulæ per se solæ spectantur.

No. II.

Pariter intellectu non difficile est ex hypothese nostra, quare clavus ferreus, aut aliud corpus valde durum, sola manuum nostrarum vi frangi nequeat: Ut enim duæ corporis duri partes ab invicem separentur, requiritur, ut vis illa connexionis, quæ omnibus ejus particulis in transversum sitis accedit a totidem columnulis acrio-æthereis, superetur ab alia vi majore: cum ergo manuum vis illa sit inferior, non mirum, quod solæ manus frangendo clavo impares sint. Sed quare, inquis, nullo labore rumpitur bacillus ligneus, cujus partes a columnis æthereis non minus premuntur, arctèque conglutinantur, quam partes clavi? Respondeo, quia in ligno, ceu corpore valde poroso, non tot superficieculæ separandæ, atque in ferro: unde vis, quæ par est separandis ligni particulis, non confestim ferro frangendo sufficiens est. Adde, quod possunt dari gradus Firmitatis in cohæsione particularum hujus vel illius corporis; aliis arctè sibi junctis, aliis non nisi leviter cohærentibus & semiapertis, sic ut minima vis acri primo subtiliori, dein crassiori ingressum parere possit: separatio enim partium ut sequatur, sufficit, ut apertura fiat inter juncturas particularum, per quas irruere possit aer,

Quare manus lignum frangere possit, non ferum?  
Conf. sup-  
pag. 69.

R 2

atque

No. II. atque pressione sua irritam reddere vim, qua partes ab aliis antea columnis comprimebantur: hinc est, quod ense, securi, vel alterius ferri acumine, longe facilius finditur lignum, quam si malleo, etsi multo majoribus adhibitis viribus, idem tentes; utpote qui ob figuram suam obtusam hebetemque ad penetrandas particularum commissuras minus aptus est.

Cur manus facile clavum attrahat, ægre frangat? Conf. supr. p. 70.

Supra jam indigitavimus, *CARTESIUM* difficulter per quietem suam explicaturum, unde fiat, quod manus nullo labore attrahat clavum, ægre eundem frangat seu inflectat: cum enim, & per attractionem, & per inflexionem, hæc clavi pars, quam manu constringo, disponatur ad deserendam alteram sibi adherentem; cur non hæc altera quiete sua utrobique æquali nisu vim manus cohibet, & sicut inflexionem, ita attractionem studet impedire? Videbor quidem multis haud dubie nodum in scirpo quærere, scrupulosque fingere, ubi plana est via: quid enim, inquam, evidentius, quam ideo nullam in attrahendo sentiri difficultatem, quia nihil est, quod impedit, quo minus altera clavi pars manui obsecundet, partemque attractam libere insequatur ad separationem mutuam præcavendam? Verum si Cartesiani animo non præoccupato rem perpendant, animadvertent, ex suis placitis non adeo dictu facile esse, quid alteri huic parti vires insequendi tribuat: si dicant, nullis opus esse viribus ad quiescendum in vicinia alterius; respondeo, viribus tamen opus esse ad mutandum locum respectu aeris ambientis: si regerant, per attractionem nullum accedere motum novum parti insequenti, nec ipsius etiam aeris respectu; hujus enim respectu jam ante attractionem possedisse motum: esto, sed accedit saltem nova illius motus determinatio; unde vero hæc determinatio? non profecto ab ipsa parte clavi manum insequente; uti enim omnis motus, sic omnis ejus determinatio aliunde est; nec aeri ambienti ullæ ab iis hic conceduntur partes. Ergo ipsi manui attrahenti ascribenda hæc determinatio: explicent vero illi, qui non nisi clara proferunt, qua occulta virtute manus determinare queat motum partis hujus, citra immediatum ejus contactum. Sed in hypothesi nostra res omni caret difficultate: Elevo e terra

terra baculum, resistit elevanti columna ætheris, huic quam contrecto extremitati incumbens; sed & alia est columna, quæ oppositam post manum extremitatem propellendo, tantundem ferre conatum manus meæ adjuvat, quantum altera columna impedit; atque ita omnem, quæ absque hac propulsione sentiretur, difficultatem tollit, excepta tantum illa, quæ a proprio pondere baculi, minuente in tantum vires columnæ manum adjuvantis, procedere potest. Iterum, arrepto utraque manu clavo, inflectere illum, partemque a parte separare nitor: quid contingit? sunt columnæ, quæ extremitatibus imminentes, oppositis suis viribus utramque clavi partem comprimunt, manibusque separaturis omni nisu reluctantur; & quia propter immediatum partium contactum nulla sese potest inter illas intrudere columna, quæ faveat earum separationi, unam pellendo in hanc, alteram in illam partem; hinc ille conatus sæpe irritus, & difficultas, quam experimur in inflectendis vel frangendis corporibus valde duris.

Et quamvis difficultas ista in ligno tanta non sit, quin baculus ligneus inflecti & rumpi certo sensu facile possit; conatu nimis mirum frangendi facto juxta lineam  $ab$ , perpendiculararem baculo  $de$ ; eadem tamen difficultas alio sensu humanis viribus omnino fit insuperabilis, conatu adhibito in directum juxta lineam  $ef$ , Quod ob eandem rationem fieri puto, ob quam duo marmora complanata sibi imposita facile quidem separantur, cum juxta superficiem suarum mutuam contactum ita trahuntur, ut unum quasi repere videatur super altero; difficulter vero, ubi alterutrum in directum ab alterius superficie avellere tentaveris. Causa utrobique hæc est, quod pressio columnæ incumbentis marmori, extremitative baculi (scilicet columnæ  $fe$ , qua cohesio partium baculi efficitur) non opponitur directe motui ad latus, ex  $a$  in  $b$ , sed motui duntaxat illi, qui fit ex imo sursum, ex  $e$  in  $f$ , unde multo efficacius conatui frangendi secundum hanc, quam secundum illam lineam adhibito resistat, necesse est. Observandum autem, quamvis alia sit columna  $ba$ , quæ latus baculi premens directe etiam opponitur conatui meo ex  $a$  in  $b$ ,

No. II.

Cur lignum uno sensu facile, alio difficillime rumpatur? Conf. supr. pag. 70. Fig. 11.

R 3

non

No. II. non tamen hanc esse, quæ mediocrem, quam sentio, difficultatem efficit; quandoquidem omnem ejus resistantiam, quæ ex adverso est columna  $ca$  contrariis viribus abolet, conatumque meum tantundem juvat, atque impedit altera  $ab$ . Omnis ergo difficultas, quam persentisco in separanda quoquomodo parte baculi  $ae$  a parte  $ad$ , (quam suppono forcipe vel unco firmatam) proficiscitur a columna  $fe$ ; quæ cum nullam habeat e regione aliam columnam oppositam, quæ pellendo partem  $ae$  versus  $f$ , suas vires destruat, semper conatui frangendi necessario resistit, licet nonnunquam fortius, nonnunquam debilius, prout ejus pressio, nunc magis, nunc minus directe conatui nostro opponitur.

Quomodo  
pressiones  
columna-  
rum nos  
juvent, im-  
pediantve  
impulsio-  
ne corpo-  
rum?

Atque ut distinctissime omnibus satisfaciamus scrupulis, qui ex non plene intellectis Mechanices Staticæve legibus, circa hanc materiam, suboriri cui poterunt; supponamus, in corpore quantumvis magno nullas per se vires esse ad resistendum; omnia autem corpora, in singulis suis superficiebus ambientibus seu hedris, premi a totidem columnis aërio-æthereis; videamusque, quo pacto diversæ hæ pressionibus nos juvent, impedianve in iis impellendis.

Nova quæ-  
dam Me-  
chanicæ  
principia.  
Fig. 22.

Hunc in finem consideremus cubum  $A$ , quiescentem in plano horizontali  $fg$ , expositumque pressioni quatuor columnarum  $B, C, D, E$ , in quatuor hedris  $b, c, d, e$ ; hac tamen cum differentia, ut columnæ quidem  $D$  &  $C$  in opposita latera cubi  $d, c$ , æquali impetu arirent, columna vero  $B$ , quæ summæ superficiei incumbit, cubum tantillo efficacius deorsum premat, quam eundem sursum impellit columna  $E$  basin cubi suffulciens; propterea quod ipsum cubi pondus aliquas vires addit illi, dum huic easdem aufert.

Quid fiat,  
ubi corpus  
elevatur  
perpendi-  
culariter?

I. Elevanti e terra perpendiculariter cubum, resistit columna  $B$ , favet columna  $E$ , & quia magis impeditur, quam adjuvatur, sentiet difficultatem respondentem excessui virium, quo prior columna superat alteram, scil. tantam, quanta proficisci potest a proprio cubi pondere.

Cur ma-  
jus corpus

II. Cubo existente majore vel minore, augebitur vel minuetur

tur elevantis difficultas; non quod pro ratione molis major vel minor sit resistentia, sed quod pro ratione tum crassitici columnarum B, & E, tum ponderis ipsius cubi, augetur vel minuitur excessus virium, quo illa superat hanc.

No. II.  
majorem  
pariat ele-  
vanti diffi-  
cultatem?

III. Impulsa hedra laterali dextra  $c$ , debet sentiri aliqua difficultas, non quidem proficiscens a columna D, premente hedram lateralem oppositam  $d$ , (hanc enim manus impellens, æquali robore columnæ C armata, facile eludit) sed ab ipsa columna perpendiculari B, quæ cum fortius affigat humi cubum, quam eundem humo sublevat columna E, consequens est, ut cubus non sine aliquo labore possit revelli a parte superficiæ  $c$ , cui incumbit; isteque labor, ob eandem rationem §. 2. citatam, cum majore, vel minore cubi mole, crescere minuique debet; sed nunquam tantus erit, quantus proficisci posset a toto cubi pondere; propterea quia columna B, motui in transversum, ex  $c$  in  $d$ , non diametraliter & secundum totum excessum virium supra columnam E reluctatur.

Cur corpus  
facilius ad  
latus im-  
pellatur,  
quam ele-  
vetur sur-  
sum?

IV. Si basis cubi & superficies plani, in quo quiescit, ita sint lævigatæ, ut propius cocuntes omnem excludant aerem atmosphæricum, admissa tantum inter commissuras suas materia subtili; tum elevando ad perpendicularum cubo eæ impendendæ vires, quæ præter pondus ipsius cubi superare valeant integrum pondus columnæ alicujus atmosphæricæ, pro basi habentis summam cubi superficiem: isto enim superpondio columna æriothærea B columnam puræ ætheream E excedit. Hinc, quo amplior cubi superficies, eo difficilior ejus elevatio; quia crassior tum columna atmosphærica, cui succumbit. Quæ requiruntur autem vires ad propellendum cubum lateraliter, non adeo magnæ sint oportet; quoniam columna perpendicularis B, motui laterali, ex  $c$  in  $d$ , non valde insigniter resistit.

Quid fiat,  
ubi duo  
corpora  
complan-  
ta sunt re-  
vellenda?

V. Si basis cubi & superficies plani, cui insistit, ita arcte sese excipiant, ut omnem quoque materiæ subtili columnæ E præcludant aditum, tum avulsio cubi erit molitionis difficillimæ, imo elevatio ejus perpendicularis humanis viribus omnino impossibilis: propterea quia columna B, jam nihil habens e regione,

gione,

No. II. gione, quod vires suas vel ex toto vel ex parte retundat, toto suæ preffionis nisu cubum humi affigit.

Quare corpus angulosum difficilius moveatur spherico?

VI. Quo plura (pauciora) sunt puncta, in quibus cubi basis subjectum planum immediate contingit, eo cæteris paribus difficilius (facilior) cubi avulsio: quia contactus immediatus eorum in pluribus aut paucioribus punctis, intercipit maiorem minoremve partem virium columnæ E sublevantis cubum, & facilitantis ejus separationem. Hinc est, quod sphaera in plano longe facilius ad motum concitatur, quam ejusdem molis cubus, aut corpus aliud hedris planis vestitum: vix enim fieri potest, ut tale corpus subjectum planum non immediate tangat in aliqua superficiei basis suæ parte, atque tantundem columnæ E excludat; cum contra sphaera, unico in puncto planum contingens, in tota reliqua superficiei circumcirca accessum præbeat columnæ E, cujus impulsu, contra detrusionem oppositæ columnæ B, suffulciri & muniri potest. Videtur tamen adhuc alia & quidem præcipua subesse ratio, quare sphaera in plano facilius impellatur corpore anguloso; scilicet quia sphaera, in convolutione sua super plano, semper servat æquilibrium, non pronior in hanc partem, quæ a manu impellitur, quam in aliam; dum corpus angulosum non potest circa unum suorum laterum, tanquam circa axem, volvi, quin, ad primum manus impetum, æquilibrium suum amittat, atque præponderet in partem a manu impulsam; unde præter vires reliquas continuo opus est conatu ad impediendum, ne corpus angulosum relabatur. Addi quoque istis posset, quod sphaera, motu suæ convolutionis in plano, tantum fertur a latere ad latus, inter duo plana horizonti parallela; quoniam supremum superficiei sphaericæ punctum uno momento, non altius quam alio, supra planum horizontale eminet: motus vero cubi circa unum suorum laterum, tanquam circa axem voluti, non mere sit a latere ad latus, sed etiam ex imo sursum; quoniam latus oppositum a plano horizontali subinde altius assurgit: Jam vero, columna cubo perpendiculariter imminens motui sursum longe



longe insignius resistit, quam motui ad latus; unde multo major No. II.  
difficultas comitari debet cubi, quam sphaeræ impulsione.

VII. Corpus quodcunque, si concipiatur aeri undique expo- Cur cor-  
situm, omnique pondere suo exutum, minima vi in quamcun- pora æqui-  
que partem impelli poterit: cum enim hoc pacto, columnæ librata mo-  
omnes, quibus ambitur corpus, ad æquilibrium quasi sint re- veantur fa-  
ductæ, sic ut nulla altera fortius premat; sequitur, si minima cillime?  
vis accedat uni columnarum, hanc prævalituram alteri sibi op-  
positæ, atque ita corpus propulsuram. Hinc est, quod pila e-  
burnea, e filo perpendiculariter suspensa, atque ita quodam-  
modo gravitate sua privata, ab alia multo minore ad motum  
concitatur. Hinc etiam, quod navis, in aquis quiescens, solius  
manus impulsui obtemperat. Hinc iterum est, quod bilanx,  
in æquilibrio constituta, licet multis onerata centumpondiis, mi-  
nimo tamen impulsu quaquaversum moveri potest. Huc facit  
illud stupendæ molis saxum (quod, si bene memini, Lugduni  
Gallorum ostenditur) ita libratum, ut unius digiti impulsu mo-  
tum & agitationem concipiat. Omnia enim hæc corpora gravi-  
tate sua quasi orbata sunt, dum columnæ, quæ premunt sum-  
mam & imam eorum superficiem, ad æqualitatem virium redac-  
tæ sunt; in nave quidem ope aquæ lateralis, quæ fundum navis  
sublevans, ejus descendendi conatum oppositis viribus abolet;  
in balance vero & saxo, utralibet lanx vel saxi medietas alterius  
lancis vel saxi medietatis pondus contrario pondere destruit. Nul-  
lo ergo hæc corpora impelli debent negotio: sed tamen navis  
impulsu duntaxat laterali, non perpendiculari; quia non pos-  
set vel tantillo profundius demergi, quin altior fieret columna  
aquæ lateralis, atque ita navi præponderans, turbaret columna-  
rum æquilibrium: in saxo vero & balance, res indifferens est,  
& eadem facilitate in quamcunque partem impelluntur.

Illud tamen præcipue hic observatu dignum est, quod ani- Cur tamen  
madvertere solemus, istam facilitatem in impellendis tam vastæ minus faci-  
molis corporibus, licet æquilibratis, tantam non esse, quanta lius majo-  
sentitur in minorum corporum impulsione: persuadebit autem ri?  
forte sibi aliquis, id fieri non posse, nisi corpus per se aliquas

*Jac. Bernoulli Opera.*

S

ha-

No. II. haberet resistendi vires, easque, pro diversa molis quantitate; nunc majores, nunc minores. Verum ut aliam reddamus discriminis hujus in impellendis diversæ molis corporibus rationem, nullas statuendo in ipsis corporibus resistendi vires; supponamus, eandem semper in Universo conservari motus quantitatem, & proinde corpus impellens tantam motus sui perdere debere partem, quantam communicaverit corpori impulsio; communicare vero debere partem talem, ut ambo corpora post impulsum æquali celeritate ferantur, (quamvis harum regularum, præcise & in rigore sumtarum, veritatem nunc non examino:). suppositis autem istis, ratio discriminis est manifesta. Impellat digitus corpus aliquod 999<sup>ies</sup> se majus; transferet ergo illi, juxta regulam,  $\frac{999}{1000}$  partes sui motus, millesima tantum parte pro se retenta; quia illi nonaginti nonaginta novem gradus motus corpus, toties digito majus, non celerius movent, quam residuus in digito gradus movet ipsum digitum. Sed digitus amissis 999 motus sui partibus, non poterit amplius ea celeritate ferri, quæ ferebatur antea; & si, exempli causa, emensus est in aere uno pulsu arteriæ unam perticam, post impulsum corporis 999<sup>ies</sup> se majoris, eodem tempore millesimam tantum perticæ partem perreperet; atque ita, quo majus est impulsum corpus, eo majus quoque debet esse decrementum motus in digito, & consequenter incrementum tarditatis ejus. Hinc igitur est, quod inter duo corpora, licet æquilibrata, illud promotius & liberius moveri possit, quod minus est; ægrius vero & lentius, quod majus. Sed tædet me prolixitatis, quia spero attentum Lectorem, intellectis nostris hypothefibus, omnibus aliis circa hanc materiam oborientibus dubiis non difficulter satisfacturum.

Examen  
aliquot  
Experi-  
mentorū  
juxta Doc-  
trinam de  
Gravitate  
ætheris.

De Tubo  
inverso

Antequam tamen vela contrahamus, consultum erit, ut examinemus postliminio insigniora quædam experimenta, quæ vel ad confirmationem nostræ de ætheris gravitate doctrinæ facere, vel per eandem explicari commode poterunt; cum eorum alias solutio, illa ignorata aut insuper habita, vel obscura, vel difficilis, vel insufficiens merito habenda sit.

Illud quidem in rem meam vertere hic nolo, quod Exc.

BOY-

BOYLIO alio fine objecit LINUS, *Tract. de corporum inseparabilitate*, pag. 124. coll. cum pag. 31, de inverso scilicet Tubo, digito tam pertinaciter adhærente, ut ipse, cum incluso toto 29 $\frac{1}{2}$  digitorum argento, ac notabili præterea pondere adjuncto, possit sublevari, atque in aere pendulus a digito teneri: ubi dictus Auctor sibi persuadet, longe majus pondus hac ratione suspendi, quam externus aer atmosphæricus per suam gravitatem sustentare possit. Quod quidem si verum esset, nescio, annon potiori jure ætheris inde gravitatem elicerem, quam LINUS fabricatur funiculum suum. Sed, ut fatear quod res est, non existimandum, cylindrum atmosphæricum, quo sustentatur aggregatum ex vitro, pondere & mercurio, esse solum illum, qui respondet in latitudine cylindro mercuriali incluso; isto enim tanto crassior est concipiendus, quanto vitri crassities latitudinem cylindri mercurialis auxerit. Et quia vitrum mercurio in specie longe levius, nil mirum, si iste cylindri atmosphærici excessus, qui crassitie sua respondet crassitiei vitri, sufficiens sit sustentando tubo 29 $\frac{1}{2}$  digitis multo altiori, & notabili præterea ponderi. Quamvis interim non dubitandum sit, si pulpa digiti supremo tubi margini ita firmiter adaptari posset, ut materia subtili, vel omni, vel pleraque expulsa, digitus vitri marginem in tota illius superficie, aut magna saltem ejus parte, immediate contingeret, quod tum haud dubie longe majus a digito sublevandum foret pondus, quam a solo cylindro atmosphærico, aggregato vitri & mercurii respondente, sustentari posset.

Primum autem, quod favere nostræ videtur doctrinæ, experimentum est illud de duobus marmoribus, quæ si exacte polita seu complanata sint, sibi que superimposita, adeo pertinaciter sibi mutuo cohærere solent, ut ( quantum e Tentamine Boyliano colligere possum ) a pondere etiam multo majori, quam est similis columnæ atmosphæricæ pondus, divelli quandoque nequiverint. Narrat Illustris BOYLIIUS in *Tractatu contra LINUM ad experim.* 31, sibi marmorum fuisse par, quorum superius elevaverit inferius, gravatum aliquando plusquam 430 uncis; ( confer *Historiam Firmitatis* §. 16. ) idemque marmor in-

No. II.  
digito ad-  
hærente.

I. Expe-  
rim. de  
duobus  
marmori-  
bus in aere  
cohærenti-  
bus.

No. II. ferius, tum recipienti inclusum, una cum quatuor unciis sibi appensis, non omnino exæquasse pondus similis cylindri mercurialis longitudinis unius digiti. Quamvis autem ad calculum rite ineundum optandum foret, ut Auctor adjecisset pondus exactum; ita tamen conjecturare nobis licebit: Pondus marmoris inferioris duas vix excedere potuit uncias, adjice illis quatuor uncias appensas; eritque aggregatum lapidis & appensi ponderis sex unciarum, quæ non omnino exæquare debent pondus similis cylindri mercurialis altitudinis pollicaris: ponamus autem, majoris evidentiae gratia, illas semipollicari tantum mercurii cylindro æquiponderare; unde pollicaris mercurii cylindrus deprimet uncias 12, cylindrusque mercurialis integer 29½ digitorum, sive ei similis cylindrus atmosphæricus æquiponderabit unciis tantum 354; quare 430 uncia marmoris appensæ longe majus sunt pondus, quam quod sola atmosphæra sustentare potuisset: & cum nequeat concipi, qua ratione istud superpondium 76 unciarum a lapsu aliter præservari potuerit, præterquam ab aliqua materia ambiente; jure concludimus, hunc fuisse gravitatis ipsius ætheris seu materiae subtilis effectum.

II. Experim. de duobus marmoribus in evacuato recipienti coherentibus.

Alterum experimentum nobis suppeditabunt eadem duo marmora, inclusa nunc recipienti. Vid. Experim. 31, *Libri de novis experimentis*, ejusdemque defensionem in *Tractatu contra LINUM*. Postquam Celeb. Auctor professus esset, causam cohesionis marmorum in aere non aliam esse, quam quod inferior lapis sustentaretur ab aeris, seu gravitate, seu claterio; recte conclusit, si fieret ergo experimentum in occluso recipienti, fore ut, ejecta maxima per exhaustionem quantitate aeris & debilitato ejus claterio, inferior lapis necessario delaberetur. Sed re tentata, spem frustravit eventus: nam suspensa ibidem hæc duo marmora tam firmiter cohasere, ut nulla aeris exhaustionem inferius a superiori revelli potuerit, licet ad hoc efficiendum lapidi inferiori quatuor unciarum pondus fuerit appensum. Quo sane experimento ætheris seu materiae subtilis pressio clarissime evincitur: quid enim, aere exhausto atque excluso, connectet, quæso, marmora, nisi materiae subtilis, cui soli per poros vitri patet

patet accessus, ad marmora appulsio ? Non sine causa quidem  
 Exc. BOYLIIUS ( qui aliam, quam aeris atmosphærici gravi-  
 tatem hætenus videtur vel ignorasse, vel saltem non agnovisse )  
 aliam potius commodam responsionem amplectendam sibi duxit,  
 ut satisfaceret phænomeno, quam sententiam suam tam leviter  
 deferendam. Primo itaque confugit ad imperfectionem recipien-  
 tis, qua fieri potuerit, ut per minimam fissuram in eo latitan-  
 tem aer externus irrumperet : postmodum vero, in vindicatione  
 sua contra LINUM, aliam, cui præcipue insistit, responsionem  
 adjicit, putatque, aerem illum, qui post exhaustionem necessa-  
 rio semper in recipiente relinquitur, licet ejus elaterium per  
 magnam expansionem admodum fuerit debilitatum, sufficientem  
 tamen adhuc fuisse sustentando tantillo ponderi, quale est exi-  
 guum marmor cum 4 unciis.

Quicquid sit de conjectura ista Cl. Viri ; illud certum est ;  
 per paucissimas emboli depressiones aerem mirum in modum  
 rarefieri posse, ejusque vires debilitari, præsertim ubi scapus am-  
 plior, recipiensque angustius fuerit. Imo non tantum conjectu-  
 rare, ad quantum rarefactionis gradum aer singulis depressioni-  
 bus reducatur, sed & scientifice illud nosse licebit, comparatis  
 invicem scapi & recipientis cavitatibus : nam si scapus fuerit du-  
 plo recipiente amplior ; post primam emboli depressionem, aer  
 triplo fiet rarior, quia per scapum atque recipiens æqualiter se  
 expandens, triplo majorem quam antea occupabit locum ; post  
 secundam emboli detrusionem, nuncuplo ; post tertiam, 27plo ;  
 post quartam, 81plo. Adeo ut si supponamus, scapi ad reci-  
 pientis cavitatem, in Antlia Boyleana, in dicta ratione dupla se  
 habuisse ; sequeretur, post quartam jam emboli detrusionem ae-  
 rem eousque fuisse distentum, ut, vel ex ipsa Cl. BOYLII hy-  
 pothesi, non amplius par esse potuerit sustentando marmori cum  
 4 unciarum pondere : quamvis enim hoc aggregatum, referen-  
 te illo, non superarit tricesimam partem ponderis similis cylindri  
 mercurialis 29½ digitorum, imo etiamsi ne sexagesimam partem  
 superasset ; tale tamen fuisset ejus pondus, quod aer, plusquam  
 sexagecuplo aere naturali rarior, sustentare non potuisset ; eo



No. II. quod, juxta Boylianam pariter atque nostram hypothefin, pondera ab aere sustentabilia sint in ratione reciproca graduum rarefactionis illius.

Verum, quia non constat de amplitudine recipientis in dicto experimento Boyliano adhibiti, nec quousque aer ex illo exhaustus fuerit; frustra sane essem, si conjecturæ Cl. Viri plura reponerem. Medium tantum hic exponam, quo pacto idem experimentum effectui dandum sit, ut nullus a parte aeris suspitioni relinquatur locus. Aqua primum imple totum recipiens, ejusque claude orificium, imponendo operculum cum appensis marmoribus, illudque firmissime agglutinando, ne quid aeris irrepere possit: postmodum agitato embolo, exhausto e recipiente aquam, usque dum emergant marmora, quæ antea sub illa delituerant; quo facto nulla, quæ marmora comprimat, in suprema recipientis parte, præter subtilem, remanebit materia. Aer enim, si quis inter exhaustiendum ex aqua per bullulas emergit, tam exigui momenti est, si comparetur cum tota recipientis cavitate, per quam se expandit, ut per hanc immensam rarefactionem non possit non omnem sensibilem vim elasticam perdere: ut tamen hac ex parte eo tutior sis, poteris adhibere in experimentum aquam ab aere probe repurgatam. Sed ne ullum quoque periculum sit ab imperfectione recipientis; sume fistulam altera extremitate clausam, eamque aqua pariter impletam inverte, immergeque recipienti ante oclusum ejus orificium; tandem evacuetur maximam partem recipiens, usque dum aqua, uti dictum, subsederit infra marmora; quo facto, si aquam in fistula pariter descendisse observabis, adeo ut ejus superficies cum superficie aquæ extra fistulam, in eodem horizontali reperiatur plano; infallibili indicio concludes, nihil irrepsisse aeris, quod sustentare posset marmor; cum si, vel minimum irrepsisset, illud potiori jure aquam leviolem deberet in fistulam impellere. Ubi vero contigerit aliquando, ut superficies liquoris in fistula, altius hæreat superficie aquæ extra fistulam; continuabis tam diu exercere embolum, donec utraque sit in eadem proxime altitudine.

Ad-



Administrato sic rite experimento, conjicio, imo causæ meæ No. II.  
 fiducia fretus audacter assevero, fore ut, omni licet aere manifeste hic excluso, marmora non secus coharere pergant, atque tum, cum aere adhuc undique cincta erant, dummodo ita exquisitè sint complanata, ut contactus eorum immediatus fiat, non in uno aut altero tantum puncto, sed quoad sat magnam superficierum partem. Eo vehementius autem hujus experimenti successum videre exopto, quo evidentius inde sequuturum prævideo infallibile argumentum Gravitatis ætheris: ubi nostra sententia hoc insuper, præ negativa, gaudet privilegio, quod utcumque sors tulerit, vel ceciderit eventus, nihil erit quo aperte refelli, sed multa quibus indubie astrui poterit: sive enim ceciderint marmora, suspicio erit, ea non exactissime fuisse complanata, nec proin sese immediate tetigisse: sin vero per momentum cohaerint, certissimum habebimus pressionis materiæ subtilis argumentum. Utque plene in hac sententia confirmemur, suspendamus in recipienti, loco duorum marmorum, simplex frustum metalli alicujus ponderosi; cum enim certum nobis sit & indubitatum, hujus metalli partes coharere, non aliter ac marmora, vi pressionis fluidi externi ambientis; hinc facile experiemur, an pressio hæc proficiscatur a solo aere, an simul etiam a materia subtili: nam si a solo aere, post unam vel alteram emboli depressionem, metallum in frustra collabatur: hunc autem eventum quis expectet?

Tertium experimentum, quod crucem hætenus fixit Scripto-  
 ribus Hydrostaticorum, & cui ex principiis nostris lucem affer-  
 re tentabimus, nobis rursus suppeditatur ab Illustrissimo B O Y-  
 L I O, in Libro ejus *de novis experimentis*, estque ordine deci-  
 mum octavum, cujus summa hæc est: Collocavit Auctor, tem-  
 pore hyemali, in quadam fenestra, tubum in quo ad consuetam  
 usque stationem descenderat mercurius, factaque deinde, per  
 aliquot hebdomadas, quotidiana observatione, deprehendit ar-  
 gentum, ( licet aliquando languido motu imitaretur ascensum &  
 descensum aquæ in thermoscopio, nempe ascendendo aliquantulum  
 tempore frigido, & descendendo calidiori,) subinde tamen  
 con-

III. Expe-  
 rim. de a-  
 nomalia  
 ascensus &  
 descensus  
 Barometri.

No. II. contrarium plane fecisse, ita ut, frigidissima aura, notabiliter magis descenderet, quam alio tempore longe mitiori. Ad quod sane experimentum non possunt non obmutescere, quicumque aeris atmosphærici gravitatem unicam suspensionis liquorum causam profitentur: quid enim dicerent? esse forte aerem hyeme leviores factum, hinc descendere mercurium: sed quare non semper, aura existente frigidiuscula, descenderet? si vero aer tempore hyemali gravior & densior sit, oportet ut mercurium tum altius impellat in tubum: cur ergo, frigidissimo tempore, subsidit humiliter? Quem nodum ipse Cl. BOYLIUS, cum solvere non posset, secare maluit, atque occultis aeris mutationibus, cum apertis non liceret, hanc varietatem ascripsit. Notandumque, omnes jam Philosophos aeris Gravitationem & Levitatem non spectare, ut qualitates dependentes ab ejus Densitate vel Raritate; sed ut qualitates aliis principiis adhuc incognitis ortum debentes: unde rogati, quando aer sit gravissimus, respondebunt, non præcise tum, quando frigore maxime est condensatus, sed quando pluribus vaporibus & exhalationibus, (quarum magna subinde, nobis non animadvertentibus, e terra affurgat copia,) aer noster abundat, quando venti solito fortius aera commovent, & alia id genus. Hæc vero an ita se habeant, necne, non inquiri; illud tantum existimo, quod quamdiu ex notis philosophari possumus, ad ignotas & occultas aeris mutationes non sit recurrendum. Videntur autem talia quædam in hypothesis nostra occurrere vestigia, quibus ratio manifesta redditur irregularis istius ascensus & descensus mercurii in barometro: unde, repudiatis occultis aeris alterationibus, merito nostris tam diu acquiescimus hac de re cogitatis, donec vel experientia ea falsitatis convincat, vel quid melius adinveniatur.

Considerandum itaque primo, densitatem vel raritatem atmosphære nullam, vel exiguam mutationem inducere posse in ejus pondus: quantum enim ponderis incrementum ei accedit hyeme per densitatem, tantundem fere patitur decrementi ab ejus humilitate, & quanto æstate redditur a raritate levior, tanto vicissim, altitudine raritatem compensante, evadit ponderosior:

sior: perinde uti lana, vel spongia, compressa non plus ponderat, quam eadem distenta & dilatata, propterea quod eadem materiae quantitas, ibi quidem sub minori, hic sub majori volumine continetur.

Ut aliquid tamen largiamur; supponamus, atmosphæram tantillo ponderosiores reddi hyeme, quam æstate; & nobis porro in memoriam revocemus, quæ superius dicta sunt de pressione materiae subtilis, quæ diversimode diversis anni tempestatibus afficiatur, atque æstate vehementius agitetur & vibretur versus Terram, quam hyeme; consequenter fortius tum premat super argento in vase, atque decrementum gravitatis atmosphæricæ aliquo modo compenset. Quamvis autem hæc materia subtilis, omni tempore tubum penetrans, non minus premere debere videatur super mercurium in tubo suspensum, quam super restagnantem in vasculo; unde fieret, ut una pressio alteram plane tolleret, & aboleret: cogitandum tamen, illam materiam subtilem, quæ incumbit argento restagnanti, subinde illud nonnihil fortius sursum impellere in tubum, quam materia, incumbens argento in tubo, illud deorsum premit; hancque differentiam majorem esse tempore calidiori, quando globuli tubum ingredienti, ob vehementissimam sui agitationem ad ejus latera allidunt, multumque de suo motu perdunt, quam frigidiori, ubi propter motum languidiorem directius per vitri poros tendunt, & intra fere ac extra æqualibus viribus mercurium premunt. Ergo duo pugnancia principia, e quibus irregularis illa barometri mutatio ortum suum, me iudice, habet. Tempore frigidiori, mercurius in tubum assurgere debet altius, propter majus atmosphærae pondus; idem tamen etiam debet subsidere humilior, quod materia subtilis directius intrans tubum, minus perdat de motu suo, adeoque fortius mercurium premat deorsum: utrum ergo assurgat vel subsadat, hoc dependet a sola prævalentia alterutrius pressiois; nempe tum ascendet mercurius, quando incrementum ponderis atmosphærici, (quo mercurius pellitur sursum,) superat incrementum pressiois materiae subtilis in tubo (qua premitur argentum deorsum); & vicissim tum descendet,

*Jacobi Bernoulli Opera.*

T

cum

No. II. cum incrementum prius exceditur a posteriori; quod non nisi fit maximo ingruente frigore, ubi globuli directius, quam alio tempore tepidiori, tubum ingredientes, omnem fere suum motum & vim deprimendi retinent.

An eadem  
anomaliam  
locum et-  
iam ha-  
beat in  
Thermo-  
metro?

Sed objicis, quare in Thermoscopio, \* nunquam id observatur, ut tempore calidiori ascendat liquor, frigidiori descendat; cum materia subtilis eodem modo debeat affici penetrando istos tubos, quo afficitur penetrando tubos barometrorum. Resp. Imo etiam anomaliam hæc deprehenduntur quandoque in thermometris: Hinc monet R O H O L T U S, *Tractat. Physica, part. prim. cap. 23. §. 41*, nos posse decipi, si ex sola inspectione thermometri vellemus semper judicare de calore aeris; posse enim fieri, ut accedente majori aeri gravitate, liquor impellatur in tubum altius, atque ita majus præfagiat frigus, quamvis interea idem possit in aere manere caloris gradus. Ita quoque mihi retulit Cl. V O L D E R U S, sibi observatum aliquando fuisse circa duo thermoscopia, quorum unum utrinque sigillatum erat, alterum infima sua extremitate cum aere externo correspondebat, quod videlicet eodem die æstivo liquor in utroque thermoscopio ascenderet; notum autem est, solius thermoscopii utrinque sigillati genium esse, ut liquor in eo æstate ascendat, reliqui vero naturam esse, ut liquor in eo æstate deprimatur. Causam ergo anomaliam istius adjecit hanc fuisse, quod gravitas aeris externi solito fuerit major, adeoque aeri superius incluso impedito fuerit, ne per calorem sese dilatando, liquorem deprimeret. Secundum nos vero respondendum esset, ideo ascendisse liquorem, quia materia subtilis, solito concitior, non potuerit tubum penetrare, citra magnum virium suarum in tubo decrementum; cum vero materia subtilis externa, omni sua agitatione, citra obstaculum, liquorem in tubum intruderet, interna vero non nisi languide deprimeret, non poterat non ad ascensum cogi liquor.

Caterum etiamsi nullæ observarentur in thermometris ejusmodi irregularitates, id minime mirum nobis videri deberet; cum plane alia sit causa ascensus & descensus liquoris in thermometro,

\* nimirum *Drebbeliano*.

quam

quam mercurii in barometro : nec enim credendum est, quando in illo, tempore calidiori, spiritus vini descendit, id inde esse, quod pondus liquoris inclusi jam evaserit majus pondere atmosphæræ magnopere per calorem rarefactæ; cum quantumcunque rarefactus fuerit aer atmosphæricus, sufficiens tamen adhuc sit, non solum sustentando tantillo cylindro liquoris, sed illi etiam ad summitatem vitri intrudendo, nisi id impediret aer inclusus resistantia sua passiva. Immediata ergo descensus liquoris causa est, quod, rarefacto per æstatis calorem aere externo, internus, juxta leges elaterii superius statuminatas, subinde quoque dilatari debeat, donec cum externo eandem circiter acquirat laxitatem seu consistentiam; quod fieri nequit, nisi majorem occupando locum, liquorem deprimat: uti e converso; condensato hyeme aere externo, aer inclusus necessario quoque condensandus est ad eum usque densitatis gradum, qui resistendo par sit externæ pressioni; quod cum fieri nequeat, nisi minorem occupando locum, consequens est, ut liquor ab aere externo sursum trudi debeat in locum, quem deseruit aer inclusus, nequicquam obstante exiguo augmento virium, quod materiæ subtili forte accessit ad deprimendum liquorem, per liberiores in tubum ingressum. Adde quod quamvis differentia pressioni materiæ subtilis impeditæ in tubo, & non impeditæ extra tubum, in mercurio alicujus sit momenti; illa tamen in spiritu vini minus debet esse sensibilis, ob amplitudinem pororum, qua fit ut pleraque materia subtilis perfluat, minima ejus parte in superficie liquoris premente. Quanquam autem hæ duæ rationes sufficientes forte esse possent abolendæ differentiæ pressioni materiæ subtilis, atque eximendo thermometra inde natæ irregularitati apparenti; est tamen tertia adhuc consideranda circumstantia, quæ vicissim hanc anomaliam maximopere iterum promovere videtur, videlicet insignis spiritus vini in thermometris adhiberi soliti levitas, respectu mercurii in barometris adhibiti; qua fit, ut minima variatio pressioni materiæ subtilis aliam & aliam, in liquore thermometri, altitudinem debeat conspicuam reddere; quæ interea differentia in liquore adeo ponde-

No. II. roso barometri omnino foret insensibilis. Sed de his plus quam satis.

IV. Expe- Ut denique manifestum fiat, quousque, in nostra hypothese, rim. de progre-  
duobus he- progre-  
misphæriis to & ultimo specimine examinabimus celebre Experimentum  
evacuatis, Consulis illius Magdeburgensis de duobus Hemisphæriis, quæ si-  
firmissime bi invicem imposita, atque interjecta cera conglutinata, facili  
sibi cohæ- quidem negotio dirimuntur, dum aere adhuc plena sunt; sed,  
rentibus. educto ex sua cavitae aere, tanta vi sibi invicem cohærere de-  
prehenduntur, ut, pro varia eorundem latitudine, notabilis  
quantitas equorum, vel appensorum ponderum, requiratur ad ea  
avellenda.

Hujus phænomeni causa, ut melius percipiatur ex mente Auctorum, qui de illo scripsere; concipiamus superius hemisphærium ex unco suspensum, atque cavitatem hemisphæriorum primo aere vacuum; non difficulter quidem intelligemus, qua ratione inferius superiori debeat firmissime agglutinari; quandoquidem externa ejus superficies exposita est toti columnæ atmosphæricæ laterali, a qua sursum impellitur contra superius hemisphærium; dum interim interna superficies nulla pressione contraria afficitur, neque a columna imminente superiori hemisphærio, utpote cujus tota vis terminatur in illud hemisphærium, seu in uncum illud sustentant; neque ab aliqua materia intra sphæram, quæ, educto aere, nulla est nisi subtilis. Sed si porro aer hemisphæriis restituatur; quare adeo facile divelluntur a se mutuo? nunquid eandem omnino sustinet pressionem externa inferioris hemisphærii superficies, dum interior libera quoque manet a pressione columnæ perpendicularis? Ergo dum hæc pari modo se habent, ut antea, evidens quidem esse putabimus, avulsionis facilitatem proficisci a solo aere hemisphæriis incluso; id quod aliter fieri nequit, quam si concedatur, hunc aerem inclusum vim aeris externi, comprimantis hemisphæria, æquali vi & conatu reprimere, atque inferius hemisphærium tantundem deorsum trudere, quantum idem a columna laterali sursum impellitur: Huic enim consequens est, hoc in rerum statu, ad se-  
pa-



parationem efficiendam nihil aliud requiri, quam ut parvula ea, No. II.  
quæ per ceram est, connexionis vis & efficacia, superetur vincaturve.

Veruntamen, præterquam quod non explicant, in quo consistat hæc in cera connectendi vis & efficacia; planum quoque facere deberent, quomodo concipienda sit ista tantilli aeris inclusi vis, quæ paria facere possit cum gravitate & mole immensa aeris externi; quod dum facere conantur, fateor me, quæsum ingenii tarditate, illorum mentem vel non satis assequi, vel sane ipsos valde obscuros, circa hanc rem, fovisse hætenus conceptus.

Aliorum  
explicatio  
insufficiens.

Respondent enim aliqui, illam vim deprimendi hemisphærium proficisci ab aeris inclusi elaterio, quod æquipolleat gravitati totius atmosphæræ: Sed quid intelligunt obsecro per hoc elaterium? anne vim illam, quam habet aer inclusus, ad majus spatium sese dilatandi, atque ita repellendi a se hemisphærium? si sic; quid manifestius, quam sublatum iri hanc separandi hemisphæria facilitatem, non tantum evacuatis omnino hemisphæriis, sed substituto solummodo in aeris locum alio corpore, nulla tali sese dilatandi vi prædito? Agedum ergo, repleantur hemisphæria aqua, vel alio quodam liquore, quem omni elaterio destitutum esse in confesso est apud omnes: critne qui dubitet illa, eadem adhuc prorsus facilitate, si non majore, avulsum iri? ego quidem nullus dubito.

Alii existimant, satis sese mentem suam explicuisse dicendo, aerem, ex arcta sui inter hemisphæria compressione, tantam nascisci vim; quia hæc sit naturæ lex, ut quo quid arctiori loco constrictum & constipatum est, eo intensiorem & violentiorem adhibeat erumpendi & enitendi conatum. Verum, confundunt isti perpetuo Inclusionem cum Compressione; quasi vero aer propterea evadat compressior, quia exigua ejus moles sphæræ huic inclusa est: equidem si major aeriarum particularum numerus sphæræ isti intrusus foret, quam solet contineri sub æquali spatio extra sphæram; tum non dubitarem, aerem inclusum compressum dicere: sed quia non major aeris quantitas huic ca-

No. II. vitati sphaericæ inclusa est, quam solet contineri sub æquali volumine sub dio ( quod nemo, ut opinor, inficiabitur ) ; nulla ratio est, cur hic aer inclusus externo aere compressior dicatur : perinde ut triginta homines in conclavi, cujus pavimenti area est triginta pedum quadratorum, non magis sese compressos sentiunt, quam sese sentirent in latissimo campo, in turba aliquot millenorum, quorum unusquisque non nisi unius pedis quadrati spatium occuparet. Sed etiamsi tandem concederetur, duplo, triplo plus aeris infartum esse sphaeræ, quam possit contineri in æquali spatio sub dio ; sequeretur, si vires premendi æstimandæ sint e gradibus compressionis, vires aeris inclusi ad summum viribus duplæ vel triplæ molis aeræ pares esse posse ; tantum abesset, ut tantilla quantitas immensam atmosphaeræ molem exæquaret. Imo, si rem quis examinet, putaret potius, externum aerem incluso compressiorem dici debere, quod ille undique sustineat pressionem totius atmosphaeræ, a qua tamen alter lateribus sphaeræ immunis redditur ; ad minimum ea parte, qua contiguus est hemisphaerio suspenso, utpote quod in se terminat omnem columnæ sibi incumbentis pressionem.

Nonnulli denique mentem suam ita explicant, ut putent, non necessum quidem esse, ut aer magis sit compressus intra, quam extra sphaeram ; sed sufficere, ut æqualis utrobique sit compressionis. Existimant enim, proprie loquendo, nullam partem aeris agere in sphaeram, nisi quæ eam tangit proxime ; hanc tamen eo agere efficacius, quo a mole incumbentis aeris validius comprimitur : unde sequatur, si parvula aeris quantitas aliunde, absque pondere incumbente, æque possit compressa reddi, atque reddi alias solet per hoc atmosphaeræ pondus ; hunc aerem, licet in minori copia, quia tamen æque compressus supponitur per inclusionem in sphaeram, ac si omne totius atmosphaeræ pondus sustineret, æquali vi acturum in ipsam sphaeram. Verum, perpetua involutam adhuc sentio homonymia vocem Compressionis : Si enim hæc vox talem tantum in nobis formet conceptum, ut illa dici debeant æque, duplo, triplo compressiora, quorum æquales massæ, æquale, duplo, triplo minus spa-

spatium occupant. ( alium autem clarum conceptum hujus vocis non habeo ); tum falsissimum est, efficaciam alicujus corporis in aliud, quod immediate tangit, æstimandam esse ex solo gradu compressionis illius, nulla habita ratione illius ponderis, quod ipsum adjuvat. Sume enim in manum libram ferri, ferroque superimpone aliam libram plumbi: si solum ferrum, quod manum immediate ferit, in eam agere censendum esset; sequeretur, per hanc plumbi impositionem jam duplo magis compressum iri ferrum, id est, ad duplo minus volumen redactum, quod manus jam duplo majorem pressionem persentiscat; aut certe, si ferrum eandem servat extensionis quantitatem, manum non majore pressione nunc debere affici, quam afficiebatur antea, cum solum ferrum ei incumbebat. Nec tantum in duris, sed & in liquidis ita concludere liceret, fore nimirum, ut pes cubicus aquæ duplo magis comprimatur per alium sibi superimpositum, quod jam duplo magis ponderet; vel certe, ut ambo pedes simul sumti non plus ponderent uno solo, eo quod inferior pes per superioris incumbentiam, fatentibus omnibus, sensibiliter non magis comprimatur; quorum tamen utrumque perabsurdum. Imo, si efficacia pressionis alicujus corporis, non ex incumbente pondere æstimanda sit, sed ex illius compressione tantum; sequitur, si, loco aeris inclusi, hemisphæria aqua impleantur ( qui liquor aere multo densior & compressior est, utpote multo majorem terrestris materiæ copiam sub æquali volumine complectens ), hemisphæria, a sola aqua, longe majore violentia separatum iri, quam ab aere ambiente connectuntur; qui effectus contrarius plane foret illius, qui, juxta illa quæ supra dicta sunt, futurus esset, si res per elaterium conficeretur. Si vero tandem velint hi Auctores, gradus diversos compressionis alicujus corporis non æstimandos esse ex amplitudine majoris vel minoris spatii, quod ab illo occupatur; aliunde sane æstimari non poterunt, quam ex majori vel minori pondere illi incumbente; unde si quis existimaret aerem, absque ullo pondere incumbente, aliunde posse comprimi, ille plane contradictoria & *absurda* conciperet.

No. II. In hoc denique omnes deceptos esse animadverto, quod solum aerem hemisphæriorum cavitati inclusum considerarint, tanquam unicam facilis divulsionis, uti ejus exhaustionem firmæ connexionis causam; quam tamen non nisi ut necessarium ejus antecedens, siue causam sine qua non, respicio; existimans, præcipuum utriusque phænomeni momentum situm esse in illo, quod contingit circa hemisphæriorum oras vel margines, quibus connexa sibi sunt, non circa cavitatem, qua jam separata sunt a se invicem.

Genuina  
Phæno-  
meni causa  
evolvitur.  
Fig. 25.

Ut ergo hujus experimenti genuinam causam distincte cognoscamus; considerabimus, quid in toto ejus decursu circa hemisphæria contingat. Sumuntur duo hemisphæria, aere primo plena, A & B, quorum superius ita imponitur inferiori, ut oris suis, seu marginibus, cera si vis illitis, sibi mutuo respondeant; ubi, qui vel leviter animum adverterit, facile perspiciet fieri plane non posse, ut ita arcte se excipiant, quin necessario magna copia aeris, latitudine limborum *a b*, circumcirca intercepta relinquatur. Quamvis enim hemisphæria postea manu validissime comprimantur; imo etiamsi, remota manu, tota cylindri atmosphærici C pressio in hemisphærium A jam sese reapse effundat; tota tamen hac pressione nequit effici ut, pauxillo illo aeris *a b* extruso, arctius coeant hemisphæria: quo enim concederet hæc aeris portio? extra, vel intra sphæram? sed illinc stipata est alia columna atmosphærica D, a qua non minori vi repellitur, quam extruditur a columna C; hinc vero impedita ab ipso aere sphære incluso A & B, qui cum sit æqualis consistentiæ cum exteriori, & suffultus lateribus hemisphæriorum, per resistantiam suam passivam totius columnæ C pressionem eludit, cavens hoc pacto ne, per ingressum hujus aeris, arctioremque hemisphæriorum conclusionem, ad majorem quam exterior densitatem redigi possit, juxta leges resistantiæ passivæ aeris initio stabilitas.

Jam vero hemisphæriorum commissuras cera probe supponamus obturatas, hemisphæriumque superius A, suspensum ex uno *c*; quid fiet? erit quidem columna lateralis E, quæ sursum im-

impellet hemisphærium B; sed portionem aeris interceptam inter juncturas *a b*, ob resistantiam ejus passivam, non magis expellere potis erit, quam antea columna C deprimens hemisphærium superius: interea tamen cohærebunt hemisphæria, eo quod, obstante cera, nihil sit quod deprimat inferius; quamvis enim aer columnæ D omni nisu sese intrudere conetur per poros ceræ, nihil tamen efficiet, quamdiu iidem pori ab æquivalente pressione columnæ E angustantur: interim evidens est, hoc in rerum statu, ad avellenda hemisphæria nihil aliud requiri, quam ut, appenso tantillo pondere inferiori hemisphærio, debilitetur pressio columnæ E; hoc enim facto, columna D, quæ jam alteri E prævalet, nullo negotio dilatabit ceræ poros, satis alias per se laxos, atque ita transitum per eos sibi parabit: ista autem perrupta macerie, statim acquirit communicationem cum aere intra sphæræ commissuras cavitatemque latitante, cum quo, junctis viribus, in inferius hemisphærium agit, illudque deprimat facile. Unde liquet, ejus avulsionem minime proficisci, ut vulgo creditur, ab aere cavitati sphæræ incluso, in quantum per se solus spectatur, sed quatenus tota atmosphæræ mole stipatus est.

No.II.

Fingamus jam, antlia applicata, evacuari e cavitare hemisphæriorum aerem; quid fiet? illæ particulæ aeris, quæ hætenus latitarant intra eorum commissuras, cum, ea parte qua cavitatem sphæræ respiciunt, a nulla jam suffultæ sint materia, non amplius resistendo erunt pressioni columnæ E; quare iis in cavitatem compulsis (in quam insuper vi elaterii sui sponte se expandunt, per regulam nostram nonam) propius coire hemisphæria, atque arctius sibi jungi necesse est; nulla, inter eorum commissuras *a b*, mediante amplius particula aeris: (ut videre licet in *fig. 26.*) quod & sensuum testimonio cuivis patere potest; quotiescunque e recipiente, aut alio vase, exhauritur aer, videmus ceram, inter partes vasis qua sibi committuntur, magna copia, extra oras veluti ebullire, atque partes vasis propius coire; uti solent, cum duo asseres, interjecto corpore aliquo molli, admodum valide comprimuntur; quod manifestum præ-

Fig. 26.

Jac. Bernoulli Opera.

V

bet

No. II. bet indicium, latitasse aliquid antea inter partium vasis juncturas; quod earum arctiorem compressionem impediabat, siquidem columnæ aeris non minorem super partes vasis pressionem exercebant antea, quam postmodum cum evacuari coeptum est. Ex-

Fig. 16. hausto itaque aere, superius hemisphærium ex unco *c* suspensum fingamus; erit columna E, quæ sursum premet hemisphærium inferius, & quia nulli alii columnæ patet accessus ad superficies interiores hemisphæriorum, ob immediatum eorum contactum; adeo valide sibi conglutinabuntur, ut ad ea divellenda tantum ponderis inferiori appendendum sit, quantum æquivalet pressioni columnæ comprimentis E. Experientia autem constat, ad sexcentas vel septingentas libras ei citra lapsum appendi posse, diametro hemisphæriorum existente vix octo digitorum. Cæterum, quamvis isti ponderi sustentando sufficiens forte possit esse columna similis atmosphærica E, uti supputanti constabit; non tamen inferendum, ætheri in columna E contento nullas hic esse connectendi partes; sed hoc tantum, superficies limborum, seu marginum in hemisphæriis, nunquam adeo exquisite posse lævigari, quin in iis plurimæ hinc inde relinquuntur asperitates & cavitates, quibus fiat, ut hemisphæria sibi imposita necessario plurimis dehiscant rimulis *i, i, i*; per quas dum aer crassior columnæ D irrupere nequit, æther tamen illi permixtus facile irrepere, ætherisque pressionem in columna E irritam reddere possit. Ubi enim hæ rimulæ tolluntur, quod fiet, si vel ferrumentur hemisphæria, vel hermetice claudantur, id est, si loco utriusque hemisphærii fiat una sphaera cava, sine comparatione majora ferent pondera; quod nemo, ut opinor, inficiabitur.

Ex iis demum, quæ dicta sunt, liquet, evacuationem aeris e cavitate hemisphæriorum non esse proximam causam connexionis eorum; eandem tamen requiri, ut antecedens necessarium, ad eliciendas particulas aeris ex illorum commissuris, inter quas latuerant; inque hoc consistere præcipuum connexionis nervum: unde existimo, si post exhaustionem reintromittatur aer, satis valide cohesura adhuc hemisphæria, si non tanta pertinacia quan-

ta



ta cohærent omnino vacua, longe tamen majore, quam si No. II.  
nunquam evacuata fuissent; ea videlicet quæ effici potest a pres-  
sione cylindri atmosphærici excavati, cujus orbis latitudo res-  
pondet latitudini superficiæ orbicularis, qua hemisphæria sibi  
connexa sunt: uti si plurima marmora complanata, quorum bi-  
na sibi imposita, in orbem ita disponantur, ut locus medius con-  
cedatur aeri; non minus sibi cohærebunt, quam si locus inter-  
medius supponeretur omnino aere vacuus.

Antequam Dissertationi finem imponam, placet hic, quæ in- Quare in  
fistulis gra-  
cilioribus  
liquor in-  
ternus  
semper sit  
nonnihil  
altior ex-  
terno?  
ter scribendum incidit, subnectere explicationem phænomeni  
alicujus hydrostatici; quod quamvis ab instituto nostro alienum,  
ob materiæ tamen affinitatem non difficulter hic tolerabit Lec-  
tor; vel eo quoque nomine sibi gratum futurum, quod ejus so-  
lutio non facile occurrit apud Hydrostaticorum Scriptores, qui  
de eo differendi occasionem subinde declinare solent. Est autem  
talc: *Observatur in Fistulis gracilioribus utrinque patulis, una-  
que sua extremitate perpendiculariter sub aquam demersis, superfi-  
ciem aque intra fistulam semper nonnihil altiore esse ea, quæ est  
extra fistulam;prehenditurque, hanc altitudinum differentiam  
cum fistula gracilitate augeri. Quæritur, quæ sit hujus rei ratio?*  
Nob. ROHOLTUS *Physic. Part. prim. cap. 22. §. 85*, conji-  
cit, aeris particulas in tubis gracilioribus difficulter sese hinc in-  
de convolvere & commovere (*détourner*), impeditasque non sat  
exercere posse viriūm ad deprimendum sufficienter liquorem.  
Sed commodum est, ita ex quolibet quidlibet struere, aerisque  
motum & agitationem pro lubitu intendere & remittere. Nu-  
per, quo arctiori incarcerationatus erat aer loco, eo majores, jux-  
ta hunc Philosophum, exerere conveniebat vires ad detrudendum  
mercurium; nunc vero, dum gracili fistulæ inclusus est, sibi  
ipse debet esse impedimento; ibi in angustia vires assumpsit, hic  
propter angustiam vires perdit, languet, torpet: ubinam vero  
nunc aeris elater? an ærugine confectus? quidni domicilii sui  
angustia pertæsus intensius nunc furit, humiliorque deprimit a-  
quam, ut nuper mercurium? Caterum non opus etiam est, ut  
aeris particulæ in tubis gracilioribus libertatem habeant sese con-

No. II. volvendi in quascunque partes, ad deprimendam solummodo aquam; sufficit ut motum suum gravitatis, qui sit secundum lineam perpendicularem, servant illibatum, is autem motus in tubis etiam gracillimis non impeditur: Nulla ergo ROHOLTII responsio. Quæ aliorum sit de hoc Phænomeno sententia, nescio: nec eam pando.

Certum autem esse puto, rationem, cur summa superficies cujusque liquoris ad horizontem parallela sit, nullibi altior, nullibi depressior, hanc esse, quod in omnibus suis partibus a pondere incumbentis atmospheræ prematur æqualiter; utpote quæ supponitur esse substantiæ homogeneæ quoad gravitatem, omnibusque dictæ superficiei partibus æquali ubique altitudine incumbere. Quotiescunque ergo contingit, ut una partium superficiei altera existat altior, humiliorve, statim cogitabimus, earum pressioni mutationem aliquam inductam esse; illamque majus sibi incumbens habere pondus, quæ depressior existit reliquis; minore vero pressione affici, quæ cæteris altior extat. Unde, quoniam subinde animadverti solet, liquorem intra fistulam nonnihil altiore esse liquore extra fistulam; concludemus, alterutro in loco mutationem contigisse, pressionemque vel extra tubum adauctam, vel intra illum imminutam fuisse. Quoniam vero superficies aquæ externæ non videtur ullum pressionis augmentum pati posse ab interpositione fistulæ; relinquitur, ut omnis mutatio contingat circa eam superficiei partem, quæ fistulæ lateribus inclusa, partem pressionis amittere, atque onere allevata suo altius assurgere debet; quod sic concipio. Sit *abcd*, Fistula cylindrica immersa superficiei aquæ stagnantis *ed*, cui insistit alius præterea cylindrus similis atmospheræ *efgh*. Fingamus autem, utriusque diametrum in se recipere certum numerum particularum aeriarum, v. g. septem, ita ut septem tales particule (quas sphericas nunc esse suppono) in directum positæ exhauriant cylindrorum latitudinem; notabimusque, rarissimum esse continens, si globuli isti ita sint dispositi, ut extremi præcise reddant tubi latera, atque omnes septem sine obstaculo in ejus cavitate admittantur (uti fit in serie globulorum *i/j*;) plerunque enim,

Fig. 27.

enim, imo semper continget, ut summi cylindrorum margines utrinque primum & octavum excipientes, non nisi sex intermediis transitum præbeant. Quod & intelligendum de quavis alia assignabili serie globulorum, quorum perpetuo bini extremi in cylindrorum margines incidere subsumi debent. Hinc etenim fiet, ut totus ille globulorum orbis, qui circumferentiam supremi orificii fistulæ occupat, cum tota globulorum catena perpendiculariter sibi imminente  $am$ ,  $bn$ , omnem suam pressionem terminet in summitate laterum fistulæ, neque possit pertingere ad liquorem subiectum  $qr$ , qui proinde ea tantum pressione afficitur, quæ proficisci potest a cylindro aërio, diametrum  $op$ , sex duntaxat globulorum, obtinente. Aliter vero se res habet in cylindro aërio  $efgh$ , extra fistulam assumpto in alia quadam parte superficiæ stagnantis aquæ; ubi extremi globuli ab ejus lateribus  $ge$ , &  $hf$ , quæ pure sunt imaginaria, non impediuntur, quin libere defluant, & tota sua latitudine super liquore subiecto gravitent. Cui consequens est, ut liquor extra fistulam tanto majore pressione afficiatur, quam qui intra fistulæ latera conclusus est, quanto numerus globulorum illi incumbentium excedit numerum globulorum super hoc prementium: unde liquor, ab externa pressione prævalente, semper nonnihil altius impellendus in tubum. Notabimus autem, hanc differentiam insensibilem esse debere in tubis laxioris diametri, propter extremam exiguitatem particularum aëriarum; & contra, quo strictiores sunt fistulæ, eo notabiliorem debere conspici diversitatem; eo quod portio aeris a marginibus tubi impedita, ad reliquam, cujus pressio super liquorem non impeditur, majorem habet rationem in angustioribus, quam in latioribus; id quod docebit calculus. Sit igitur primo cylindrus aërius externus, sive fistula diametri (ut ita dicam) *septemglobularis*, cylindrusque internus, dempto uno, qui a vitri margine intercipitur, æstimetur *sex globulorum* in diametro: capiet proinde illius basis  $38\frac{1}{2}$  hujus  $28\frac{1}{2}$  globulos quadratos (sit venia dicto;) totidem enim, non plures, recipiunt ob spatia triangularia inter globulos necessario relinquenda, quot reciperent quadrata, quorum singula la-

No. II. tera æqualia forent globuli diametro. Erit itaque differentia utriusque  $10\frac{3}{4}$  globulorum, quos basis cylindri externi plus recipit, quam basis interni; adeo ut ille plusquam quarta sui parte fortius premat isto: Sit vero jam cylindrus externus, uti & fistula, duplo latior, nempe 14 globulorum; internus autem, uno globulo in diametro sua diminutus, 13 globulorum: illius basis area erit 154, hujus  $13\frac{1}{4}$  differentia  $21\frac{3}{4}$  globul. quadr. adeo ut pressio illius (quæ æstimatur ex numero globulorum) vix octava sui parte fortior nunc sit pressione hujus: unde patet, quod jam dictum fuit, differentiam pressionis, adeoque & altitudinis liquorum intra & extra fistulam, longe minorem debere esse in fistulis latioribus, majorem autem in strictioribus. Taceo nunc, quod ex eodem fundamento sequatur, cæteris paribus, liquores leviores gravioribus altius debere attolli, ea proportionem, quæ est inter specificas ipsorum levitates. Cur vero argenti vivi superficies, in fistulis etiam gracillimis, non tantum non elevatior sit, sed & depressior superficie argenti extra fistulam, mox disquirendi dabitur occasio.

Vana spes  
motus per-  
petui.

Prætereundum hic non est, multos fuisse, qui aquæ ascensum in gracilioribus fistulis observantes, sese vana spe lactarunt motus alicujus perpetui, ob non comprehensam veram phænomeni rationem. Videtur equidem, prima fronte, si fistula gracilior altitudinis tantillo minoris, quam est illa, ad quam aqua in fistula assurgere posset, aquæ sit immersa; tum aquam in illa ascensuram usque ad summum fistulæ orificium, ibique sese exoneraturam in vasculum, indeque reascensuram in fistulam, & sic motum perpetuum producturam. Sed qui phænomeni nostri causam perceperit, facile hujus conjecturæ vanitatem deteget: observabit enim, postquam aqua ad summum fistulæ orificium pervenerit, illam offendere globulos aërios margini fistulæ circumfusus, a quorum antea pressione immunis erat; atque ita nunc toti latitudini cylindri aërii expositam, tantundem ab illo repelli, & ab exitu e fistula coerceri debere, quantum a cylindro externo sursum impellitur, atque ad ascensum sollicitatur.

Diffi-

Difficultas interim non contemnenda sese offert circa allegatam phænomeni nostri rationem: Quamvis enim, sic cogitaret aliquis, cylindrus aerius *ghcf*, secundum totam sui latitudinem, subjectum liquorem *ef* premat; ista tamen pressio non tota derivatur in tubum, sed quoad partem infringitur; quia globuli aquei *s t* non poterunt ita accurate in tubum defluere, quin extremi illorum, *s* & *t*, marginibus tubi implicentur, eorumque proinde pressio ob eandem rationem inefficax reddatur, ob quam globulorum acriorum, *a* & *b*, pressio intercepta fuit; quodque, de una serie globulorum aqueorum *s t* hic dictum, pariter de omnibus aliis intelligendum. Videtur ergo, cum pressio desuper, & pressio ex imo sursum, parte aliqua incrustatæ & debilitatæ sint, nullam adhuc rationem esse, cur hæc illi prævaleat, liquoremque altius in tubum impellat.

Cui objectioni ut satisfiat; ratio tantum adinvenienda est, quare pressio globulorum aqueorum ad tubum allidentium nullum debeat pati detrimentum. Ratio autem ista poterit esse, quod particulae aqueæ sint volubiliores, flexibiliores, atque magis lubricæ ipsis particulis aeris; quo fiat, ut difficillime marginibus tubi detineantur, sed prompte intra ejus latera gliscant, atque ita totam tubi cavitatem pressione sua adimpleant: si contra aeris particulae supponantur rigidiores, quæ non ita facile gliscere possint juxta fistulæ latera; evidens est, illarum summo tubi margini semel implicatarum pressionem perpetuo manere inefficacem. Possent quoque adjicere, particulas aqueas esse subtiliores & exiliores ipsis particulis acriis; hinc fieri, ut quamvis duæ extremæ particulae aqueæ, *s* & *t*, a margine fistulæ intercipientur, non tanta pressionis ex imo sursum profectæ pars inefficax reddatur, quantam perdit pressio desuper, propter impeditas grossiores aeris particulas. Id vero neminem offendat, quod corpuscula aquea pono volubilia & exilia ipsis corpusculis acriis; postquam Cl. BOYLEUS variis demonstravit experimentis, aquam penetrare poros & foraminula, ipsi acri omnino impervia, vid. *Experim. 36. Libri de nov. experim.*

In-

No. II.

Fig. 27.

No. II. Intellectis istis, facile divinare licet rationem, quare superficies mercurii in fistulis gracilioribus sit vicissim semper depressior superficie ejus extra fistulas: nam cum contrariorum sit contraria ratio, sufficit supponere, particulas mercurii esse grossiores particulis aeris; hinc enim fiet, ut extremis, *s* & *t*, tubi margini implicatis, plus patiatur decrementi pressio mercurii ex imo sursum, quam pressio aeris desuper; unde ab hac prævalente necessario detrudetur humilior.

Evidens quoque ratio est, quare superficies aquæ, in fistula *qr*, debeat esse concava, id est, depressior in medio, altior circa latera; nimirum quia medium tantum hujus superficiiei pressionem aeris desuper exponitur, dum latera ob impeditas in margine tubi aeris particulas ab hac pressione liberantur. Ob similem rationem superficies mercurii, in fistula *qr*, debebit esse convexa, id est, altior in medio, depressior circa latera; quoniam corpusculorum mercurialium *st* sola intermedia libere mercurium sursum premere possunt; dum extrema quælibet, a tubi margine impedita, nullam in illum pressionem exercent: hinc superficies *qr* necessario tumidior erit in medio, quam circa latera. Non nescio, alias adhuc dari solere horum phænomenorum rationes; sed fieri potest, ut una alteram non tam destruat, quam adjuvet.

Fig. 27.

Fig. 28.

Artificium  
mensuran-  
di particu-  
las aeris.

Magis autem forsan quis mirabitur, si artificium hic detexero, quo pacto particularum aeriarum magnitudo, juxta hypothesin nostram, investigari possit, ex cognita sola fistulæ latitudine, & altitudine inclusæ aquæ, qua supra aquam stagnantem eminet. Reperti sunt, qui muscis pedicas injecerunt, qui acari nervos fibrasve in numerato habere putant; sed elephantes sunt hæc animalcula, si comparentur cum corpusculis, quorum mensuram, quis credat, ad decempedam hic exhibere tentabimus. Si suppono in calculo omnimodam flexibilitatem particularum aquæ, qua pressio earum a margine inferioris orificii fistulæ nullatenus impediatur: si suppono item, a margine superioris orificii in quibuslibet fistulis unius præcise globuli aerii pressionem intercipi; fateor hæc incerta esse, sed talia, quæ a mente humana



humana sciri prorsus nequeunt ; unde sufficit in hac incertitudine progredi, quousque licet, cæteraque cogitandum : No. II.

*Esse aliquid prodire tenus, si non datur ultra.*

Ponamus itaque pro *diametro fistula* . . . . .  $a$ .

Pro *altitudine aqua in fistula, supra superficiem aqua restag-*  
*nantis in vase* . . . . .  $b$ .

Pro *altitudine similis cylindri aquei, æquiponderantis toti*  
*cylindro atmospherico* . . . . .  $c$ .

Pro *incognita diametro globuli aerii* . . . . .  $x$ .

Erit, demto uno globulo, *diameter cylindri prementis su-*  
*per liquorem in fistula* . . . . .  $a - x$ .

*Area totius orificii fistula* . . . . .  $\frac{1}{4} a^2$ .

*Area basis cylindri prementis in fistula.*  $\frac{1}{4} a^2 - \frac{1}{4} a x + \frac{1}{4} x^2$

Hac ab illa subducta, remanet pro *orbiculari illa portio-*  
*ne aeris, cujus pressio per appulsum ad tubi latera inefficax*  
*reddita fuit* . . . . .  $\frac{1}{4} a x - \frac{1}{4} x^2$

Jam, cum cylindrus totus atmosphericus, respondens cylindro fistulæ, ad cylindrum illum orbicularem atmosphericum inefficacem ( pro quibus, quia sunt ejusdem altitudinis, eorum tantum bases assumemus ) eandem debet habere rationem, quam habet cylindrus totus aqueus, ad parvum cylindrum aquæ in fistula suspensum, ( pro quibus, ob similitudinem itidem, tantum altitudines assumimus ) ut attendenti constabit, erit, Ut  $\frac{1}{4} a^2$  ad  $\frac{1}{4} a x - \frac{1}{4} x^2$  ita  $c$  ad  $b$  : & proportionem reducta ad æqualitatem,  $\frac{1}{4} a^2 b = \frac{1}{4} a x c - \frac{1}{4} x^2 c$ , sive  $a a b = 2 a x c - x x c$ , translatisque in alteram partem sub contrario signo quantitibus  $x x c$ , &  $a a b$ ; erit  $x x c = 2 a x c - a a b$  : factaque divisione per  $c$ , fiet  $x x = 2 a x - a a b : c$  &  $x = a - \sqrt{a a - a a b : c}$  Unde regula talis :

*Si parallelepipedum contentum sub quadrato diametri fistula, & altitudine aqua in illa, dividatur per altitudinem integri cylindri aquei ; quotiensque subtrahatur a quadrato diametri fistula ; residui vero latus quadratum ab ipsa diametro fistula : indigabit reliquum diametrum globuli unius aerii.*

Jac. Bernoulli Opera.

X

Qua-

No. II.  
Magnitu-  
do particu-  
læ aeris.

Quare si pollice diviso in 100000 partes, seu scrupulos, orificium fistulæ in diametro supponatur continere octavam pollicis partem, id est, 12500 scrupulos; altitudo vero cylindri aquei in illa suspensi deprehensa fuerit dimidii pollicis, seu 50000 scrupul. altitudo vero integri cylindri aquei sit 33 pedum, i. e. pollicum 396, aut numero rotundo 400, sive scrupulorum 40000000, reperietur globuli aerei diameter quam proxime 8 scrupulorum, adeo ut constituat  $\frac{1}{12500}$  partem unius digiti. Non omittendum mihi autem est, in calculo supponi, globulos immediate se tangere; sed quia verosimile est, particulas aerias omnes esse a se invicem discretas, interspersa magna adhuc inter illas copia materiæ subtilis; hinc credendum est, repertam illam magnitudinem non tam metiri diametrum unius globuli, quam vero distantiam a centro unius globuli ad centrum globuli proximi, in qua distantia etiam materia subtilior comprehensa; unde ipsæ aeris particulæ assignata distantia longe adhuc minores concipiendæ: quantæ autem præcise sint, cognoscemus, si rationem quantitatis aeris ad quantitatem materiæ subtilis compertam habeamus; recordor autem, nos illam jam in superioribus, occasione data, detexisse, deprehendisseque, inter duo quævis corpuscula aëria quatuor æquales materiæ subtilis portiones esse interjectas; unde, hac ratione, globulus aërius assignata magnitudine quinquies evadet minor, constituetque non nisi  $\frac{1}{62500}$  pollicis unius partem.

Supra  
pag. 95.

Fig. 27.

Velim quoque observari, etiamsi particulæ aeris alterius forte supponantur figuræ, hac suppositione nihil detractum iri nostro calculo: si concipiantur enim per modum exiguorum cylindrorum, qui axiculis suis ad perpendicularum erectis ad fistulam appellant (qualis cylindrus depictus in *fig. 27*, lit. *u*,); tum quod modo dictum de globulis, nunc intelligendum tantum erit de crassitie cylindri, seu de distantia inter axiculos duorum proximorum cylindrorum. Et si cylindri isti quacunque inclinatione, imo transversis etiam axiculis fistulæ occurrant, (ut in *fig. 29*. & *30*), salvum tamen manebit ex hypothese nostra phænomenum, nempe aquam altius impulsam iri in strictioribus quam latioribus fistulis; eo quod multo majorem

Fig. 29.  
& 30.

ta-

talium cylindrorum numerum respective ab illarum, quam harum lateribus intercipi necesse est. Repræsentent enim circuli duo A, & B, suprema orificia fistularum inæqualis diametri; applicentur in utroque circumcirca isti cylindri transversis suis axiculis *ab*, ita ut repræsentent chordas arcuum, quæ determinabunt limites, quousque cylindri aerii impune premere possunt; illorum enim tantum pressio efficax esse potest, qui intra figuram polygonam circulo mediantibus chordis inscriptam includuntur, dum illi, qui circuli segmentis intercepti sunt, lateribus fistularum incumbunt, atque inutiles redduntur; horum autem numerus longe major est in strictiore, quam ampliore fistula; quia multo majora segmenta abscinduntur in minori circulo per quascunque chordas, quam per æquales chordas in majori; quod vel ex oculari figurarum inspectione absque ulteriori calculo patescit.

Atque ista sunt, quæ impræsentiarum de instituto nostro dicta sufficiant: Examinavimus primo varias attractionis species; eas per pulsionem explicando, notavimus, in attractione baculi, connexionem partium illius non sufficienter explicari per uncinulos, vel quietem, sed recurrendum esse necessario ad pressionem alicujus materiæ externæ ambientis baculum; hinc parallelismum institimus inter cohæsionem particularum duri corporis, & suspensionem liquorum in tubis, gravitatem aeris utriusque causam asserentes. Qua occasione, in prolixam excutrimus digressionem, exponendo quæ sit natura & causa gravitatis, quid aeris elaterium, quid ejus item resistentia passiva, atque utriusque leges statuminando, per quas experimentorum aeris gravitatem apparenter impugnantium rationes reddere conati fuimus. Cum vero observaremus, aerem atmosphæricum non sufficiens habere pondus ad connectendas seu sustentandas partes longissimarum catenarum; exinde in cogitationem hanc incidimus, ætherem quoque ipsum sua præditum esse gravitate; quod paradoxum porro ex natura ipsius gravitatis fluere, atque per descensum aquæ in ocluso recipiente manifeste demonstrari monuimus. Stabilita sic ætheris gravitate, plures enodavimus quæstiones;

Recapitulatio.

Nc. II. paucisque regulis novæ cujusdam & absolutioris Mechanicæ fundamenta jecimus; tandemque fecimus periculum, hac nostra methodo & hypothesi, solvendi maxime insignia experimenta, quorum rationes hætenus non usque adeo in propatulo fuerunt.

Atque hanc Ætheris sive Gravitatem, sive Pressionem, sive arctam Compactionem aut Constipationem mavis, qua omni vacuo excluso partes ejus intime sibi junctæ hærent, incumbunt, & incumbendo premunt, existimo, non tantum Mechanicæ legibus optime convenire, sed & cum mirabili hujus Universi structura, necessario plane nexu, illigatam esse; sine qua si esset mundus, solidissima quæque corpora dissipata conspicerentur, brachia nobis deciderent ex humeris, manus a brachiis; digiti a manibus, articuli e digitis &c. omniaque denique corpora scopæ forent, ut loquuntur, dissolutæ.

Si in Experimentis hinc inde a me examinatis aliquando suppositiones feci, vel dubitanter loquutus sum; sciat Lector Benevolus, ea ab aliis accepta, nec mihi ipsi tentata esse, qui satis doleo, quod alienis tantum hic cernere cogor oculis, dum peregrinanti, nec locus, nec occasio, nec vires illa propriis subjiciendi oculis suppetunt. Si in ratiocinationum, qua usus sum, serie, præter spem meam, hallucinationem deprehendat; rogatur enixe, ut paralogismos, vel ore, vel scripto ostendat, & meliora erudiri cupientem instruere non dedignetur, nec invidus sibi soli sapiat. Inveniet me non præfractum, non contumacem; sed docilem, sed ingenuum, sed gratum. Veritatem in Antiquis & Modernis veneror; nullius autoritate moveor; errores aliorum modeste indicandi licentiam mihi sumo, quia ita mecum agi desidero. Hæc sola veræ sapientiæ via est, ad quam sectandam, ad quam scrutandam homines facti sumus.

---

**I**N Systemate meo Cometarum nuper impresso, annexa fuere ad calcem duo Problemata: Animadverto autem, in priori nonnullos offendisse, quod in ejus constructione supposuerim  
Tri-

Trisectionem anguli; & quod pro datis & quæsitis, angulos, No. II. non lineas rectas, contra morem Analystarum, assumerim; quare ut me explicem, sequentia hic adjungere necessum duxi: I<sup>o</sup>. Si supposui trisectionem arcus, nihil supposui, cujus constructio non sit inventa, si non per lineas rectas & circulos, saltem per sectiones conicas; qualis, omnium consensu, non minus geometrica censenda, quam illa quæ fit per lineas simpliciores. II<sup>o</sup>. Etiam si non esset inventa, maneret tamen sua demonstrationi veritas & evidentia; alias e numero demonstrationum rejicienda quoque esset illa, quæ probat, rectangulum sub semidiametro & semiperipheria æquale esse circulo; quod tale rectangulum construere nequeat: sic quæ ARCHIMEDES demonstravit de tangente spiralis, & in universum pleræque illæ, quibus de curvis proprietates demonstrantur, e demonstrationum censu essent arcendæ; quia talia supponunt, quæ construere nequeunt. Itaque III<sup>o</sup>. in demonstrationibus, non constructionis, sed ratiocinii *axiomaticæ*, & unius ex altero evidens deductio spectanda; & si quando in problematis constructione occurrat aliquid factu impossibile, illud ad minimum per modum theorematis enunciari & demonstrari tuto poterit. IV<sup>o</sup>. Quod pro quantitibus, tum notis, tum ignotis, angulos, non lineas rectas, assumerim; id inde factum, quia integrum esse duxi, viam quamlibet eligere, qua in quæsitæ cognitionem commodiosissime devenitur; id quod hic præstitum: nam cognitis, in triangulo *mci*, latere *ci*, & angulis *c*, & *i*; non potest non dari *mi*, ejusque punctum *m*. Ratio autem, cur Geometræ in solvendis problematis lineas rectas, quam angulos, in usum adhibere maluerint, est quod persuasi fuerint, angulos non posse pro æquationis tenore in quascunque partes geometricè dividi instar linearum rectarum; unde illorum constructio redderetur impossibilis: nam alias si in problemate solvendo præscirem fore, ut inciderem in bisectionem vel quadrisectionem anguli; qualis tum foret necessitas, ut per lineas rectas rem conficerem, ubi idem longe commodius per angulos obtineri potest? cum ergo angulos, nostro seculo, non tantum bifariam & quadrifariam,

Vide Fig.  
4. Tab. II.  
No. II.

No. II. sed & trifariam, imo quintufariam secare didicerimus, idque constructione vere geometrica; nullam video necessitatem, quæ nos in resolutione problematum perpetuo ad lineas rectas astringat. *V<sup>o</sup>*. Sed ut sine ulterioribus ambagibus rem totam adaperiam, non me latere poterat, in tribus illis problematis, quæ Auctor loco ibi citato proponit, arcus trisectionem & inventionem duarum continue proportionalium inter duas datas involvi; nullum tamen alium in finem rem per angulos hic expedire malui, quam ut, per inventam æquationem, quod Auctor dissimulavit tacite in apricum producerem; significaremque quæ sit hujus problematis cum trisectione anguli affinitas; & quod nemo illius constructionem per circulos & lineas rectas unquam feliciter expedire possit, quin eadem opera trisectionem anguli invenerit, quamvis forte ipse primo nesciat, sibi hujus inventionis laudem deberi. Nam si trifariam dividendus esset arcus  $hg$ , ita id construeretur: Ducta diametro  $gc$ , bisecetur arcus  $hc$ , in  $o$ ; ductaque diametro  $oe$ , trajiciatur per illam (ducendo non nisi rectas lineas & circulos, si possibile sit) recta  $cr$ , ita ut pars  $rm$  sit æqualis radio: dico, rectam  $cr$  abscindere  $hr$ , tertiam partem arcus  $hg$ : cujus demonstratio per eadem vestigia, sed retrogrado ordine, incedit.

Alterum Problema fuit Astronomicum, cujus analysin, quæ ob angustiam spatii illinc; rescanda erat, hic subnectere consultum duximus:

Inspecto schemate ibi depicto *Fig. 5. Tab. II.* inque illo Triangulis  $abc$ , &  $cde$ , ponamus

Pro Sinu Toto . . . . .  $a$ .

Pro Sinu  $ab$ , seu altitudinis Solis . . . . .  $b$ .

Pro Sinu  $cd$ , seu elapsi temporis a momento observationis  
ad occasum Solis. . . . .  $c$ .

Pro Sinu  $ac$ , seu declinationis Solis quæsitæ . . . . .  $x$ .

Et quoniam, subtracto quadrato sinus cujuscunque a quadrato sinus totius, relinquitur quadratum sinus complementi, qui est ad ipsum sinum rectum arcus, ut radius ad illius arcus tangentem, invenietur hoc beneficio

*Tan.*



*Tangens*  $a c$ , seu *declinationis Solis* . . .  $x a : \sqrt{(a a - x x)}$  No. II.

Jam vero in Triangulo  $a b c$ , Ut sinus declinationis Solis  $x$ , est ad sin. tot.  $a$ , ita sinus altitudinis Solis  $b$ , est ad sinum ang.  $a c b$ , seu elevationis poli, qui proinde erit . . .  $a b : x$ .

Iterum in altero Triangulo  $c d e$ , Ut sinus elapsi temporis a momento observationis ad occasum Solis  $c$ , est ad sin. tot.  $a$ , ita tangens declinationis Solis  $x a : \sqrt{(a a - x x)}$  est ad tangentem ang.  $d c e$ , seu complem. elev. poli, quæ proinde erit . . .  $x a a : \sqrt{(a a c c - x x c c)}$

Nunc, ut ad æquationem deveniamus; observandum, nos reperisse diversis operationibus Sinum Elevationis poli, & Tangentem complementi ejus; quare superest tantum, ut unum quoque eliciatur ex altero, hoc fine, ut alterutra harum quantitarum duobus modis possit exprimi, in quo consistit æquatio: Itaque cum sinus elevationis poli repertus sit  $a b : x$ , invenietur sinus complementi ejus  $\sqrt{(a a - a a b b : x x)}$ : tangens vero complementi  $\sqrt{(a a x x - a a b b : b)}$ . Quæ cum, alia modo via, reperta fuerit  $x a a : \sqrt{(a a c c - x x c c)}$ ; habebimus igitur æquationem inter  $x a a : \sqrt{(a a c c - x x c c)}$  &  $\sqrt{(a a x x - a a b b)} : b$ ; ad quam reducendam fiat multiplicatio per crucem, ut sit  $a a b x \equiv (\sqrt{a^4 c c x x - a a c c x^2 - a^4 b b c c + a a b b c c x x})$ ; deinde ad tollendum signum radicale, multiplicetur utrumque membrum æquationis quadrate, eritque

$$a^4 b b x x \equiv a^4 c c x x - a a c c x^2 - a^4 b b c c + a a b b c c x x.$$

Quantitates  $a a c c x^2$  &  $a^4 b b x x$ , transponantur sub contrario signo, ut quantitas incognita plurimarum dimensionum ab una parte extet sola, fietque

$$a a c c x^2 \equiv a^4 c c x x + a a b b c c x x - a^4 b b x x - a^4 b b c c;$$

Facta denique utrinque divisione per  $a a c c$ , habebitur

$$x^2 \equiv a a x x + b b x x - a a b b x x : c c - a a b b. \text{ Ubi patet, etiam si quantitas ignota ad quatuor dimensiones ascendat, problema tamen tantummodo esse planum, propter defectum cubi quantitatis incognitæ, adeoque solvendum esse more problematum duarum tantum dimensionum. Unde Radix æquationis erit } \\ x = \sqrt{\frac{1}{2} a a + \frac{1}{2} b b - \frac{1}{2} a a b b : c c + \sqrt{(\frac{1}{4} a^4 + \frac{1}{4} b^4 - \frac{1}{2} a a b b - \frac{1}{2} a^4 b b : c c - \frac{1}{2} a a b^2 : c c^2 + \frac{1}{4} a^4 b^2 : c^2)}}. \text{ Ut}$$

No. II. Ut tandem calculum applicemus ad speciale exemplum nobis  
positum, assumamus Sinum totum  $a$ , partium 10000  
eritque Sinus altitudinis Solis  $b$ , quæ ponitur 12 graduum 2079  
Sinus elapsi temporis inter observationem & Solis occasum,  $c$ ,  
horæ scil. unius, & 12 minut. quæ in æquatore gradus faciunt  
18 . . . . . 3090

Quibus positis calculo deprehendemus porro pro

$$4A^4 \cdot \cdot \cdot = 2500000000000000$$

4670441815520

$$\frac{1}{2}a^4b^4:c^4 = 51259637176985$$

summa sign. +. . . = 3016970078992505

$$\frac{1}{2} aabb \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot = 2161120\{00000000$$

$$\frac{1}{4}a^4bb:cc = 2263403713827882$$

$$aab^4 : cc = 97829763314592$$

summa fig. — . . . = 2577345527142474

Summa signorum minus subtracta a summa signorum plus re-  
linquit . . . . . 439624551850031

cujus Rad. quadr.      2      2      2      2      2      20967226

Iterum  $\frac{1}{2} \text{ aa}$       :      :      :      :      = 5000000

2161120

summa. = 52161120

$$\text{Subtr. } aabb : cc \quad = 22634037$$

resid. = 29527083

Nunc quoniam *Æquatio* nostra duas admittit radices, huic residuo radix nuper extracta semel addatur, semel ab illo subtrahatur.

$$\begin{array}{r}
 \text{Add.} \\
 29527083 \\
 20967226 \\
 \hline
 50494309 \\
 \text{Radix :} \\
 \times \quad 7105 \overline{) 13384}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{Subtr.} \\ 29527083 \\ 20967126 \\ \hline 8559857 \\ \text{Radix :} \\ x = 2925 \frac{4233}{3857} \end{array}$$

In-

Invenimus ergo pro  $x$ , seu Sinu declinationis Solis quæsitæ, duos numeros 7105, & 2925: illius arcus in canone reperitur 45 gr. 16½ min. hujus 17 gr. 1 min. ubi notandum, priorem radicem ex accidenti falsam esse, eo quod maxima Solis declinatio 23½ gradus nunquam excedat; sola igitur altera (quæ est 17 gr. 1 min.) quæstioni satisfacit: hac autem data, uti & altitudine Solis in Triang. *abc*, vulgari Trigonometria innotescet angulus elevationis poli *acb*; si fiat, Ut sinus declinat. Solis (17 gr. 1 min.) ad sinum totum, ita sinus altitudinis Solis (12 grad.) ad sinum elevat. poli, quæ reperietur 45 gr. 16½ min. Ubi notatu dignum, elevationem poli & declinationem Solis reciproce se hic habere; adeo ut ad satisfaciendum problemati gemino modo responderi posset, nimirum observationem institutam esse, vel sub latitudine 45 gr. 16½ min. Sole declinationem obtinente 17 gr. 1 min. vel etiam sub latitudine 17 gr. 1 min. Solis declinatione vicissim existente 45 gr. 16½ min. si modo possibile esset, ut unquam tanta existeret.

No. II.



11

1. *Chlorophyll a* and *Chlorophyll b* content of the leaves of the plants were determined by the method of Arnon and Whistler (1940).

# NOUVELLE MACHINE POUR RESPIRER SOUS L'EAU,

Tirée du Livre récemment venu d'Italie,  
DE MOTU ANIMALIUM,  
*composé par*

J. ALPHONSE BORELLI.

**L'**Art de respirer sous l'eau étant d'une nécessité absolue pour dé- Journal des Sça- vans 1682. 18e. Jour- nal, du 6. Juill. p. 215. Edit. de Paris, &c. Edit. de Holl.  
couvrir ce que la nature produit de singulier dans le sein de la  
Mer, & pour retirer de les abîmes ce que les écueils & les tem-  
pêtes y ont fait perdre, c'est donner au Public un secours très  
considérable que de trouver une invention si importante. Plusieurs per-  
sonnes y ont travaillé; & nous avons expliqué au long, dans deux de nos  
Journaux de l'Année 1678, l'invention de la cloche, dont on s'est sou-  
vent servi pour ce sujet avec succès. Celle-ci est encore mieux ima-  
ginée, & des personnes intelligentes qui l'ont examinée mûrement,  
prétendent même qu'il sera bien difficile d'en trouver à l'avenir de plus  
parfaite. C'est au savant JEAN ALPHONSE BORELLI que nous  
sommes redevables de cette découverte. Comme son érudition & ses  
Ecrits lui ont acquis un rang glorieux entre les Savans, ce seroit dé-  
rober quelque chose de sa gloire, de lui refuser dans le Journal l'Eloge  
qu'il mérite; mais comme la description de cette machine nous mène assez  
loin dans celui-ci, nous le réservons pour un de nos premiers Journaux.

Cette Machine consiste en un vaisseau de cuivre en forme de  
vesse de deux piés de diamètre, comme B M H C, dans lequel  
un homme puisse loger sa tête A par l'ouverture B C. Ce vaisseau doit  
être affermi sur les épaules par un collier de cuivre B C, sur lequel on  
lie, par les tours redoublés d'une petite corde bien tissée, le collet d'un  
Pantalon de peau impénétrable à l'eau & à l'air, qui puisse couvrir exac-  
tement toutes les parties du corps qui ne sont pas couvertes par le vais-  
seau,

No. III. seau, ou casque, qui ne sert qu'à la tête. Un homme ainsi revêtu ; étant plongé dans l'eau, y pourra vivre pendant plusieurs heures, respirant l'air contenu dans la vessie B M H C, pourvu qu'il ait soin de le renouveler de tems en tems ; comme nous dirons ensuite.

Il faut avoir pour cette machine un tuyau de cuivre I Q K L, long de trois piés, & courbé, avec une bourse de cuir capable de tenir près de chopine, telle que le point K la représente, attachée à la partie basse de la courbure. Sa matière doit avoir les mêmes conditions que le Pantalon, & une communication avec le tuyau, de telle manière que l'air, y étant une fois entré, en puisse librement sortir pour se rendre dans le casque par L. Il faut que l'autre bout I soit assez long, & recourbé, pour le pouvoir mettre à la bouche, afin de rejeter par là l'air qu'on a attiré dans ses poulmons par le nez. Cet air, passant par ce tuyau, perd la chaleur qu'il avoit acquise dans les poulmons, & se refroidit ensuite ; parce que pour respirer, l'on attire l'air par le nez, & qu'en le rejetant par la bouche dans le tuyau I Q K L, il arrive que le même air n'entre que long-tems après dans les poulmons, & se refroidissant en passant par le tuyau, les vapeurs qui le suivent se condensent, & se résolvent en liqueur dans la bourse K ; & ainsi cet air rentre dans le casque, non seulement refroidi, mais encore purifié de l'infection qu'il avoit contractée dans les poulmons.

Pour pouvoir renouveler l'air contenu dans le casque, il faut faire le tuyau O M P, recourbé en P, avec un robinet en O, comme l'on en voit un en N : Ce tuyau doit être soudé en M au Casque, ainsi qu'à l'égard du tuyau N. Celui qui se servira de cette invention, sentant que l'air du casque a besoin d'être renouvelé, s'élèvera au dessus de l'eau, jusques à ce que le casque se trouve dans l'air. Pour lors ouvrant les deux robinets O & N, il attirera l'air autant qu'il lui sera possible, & le rejettera par le tuyau P M O ; & dans ce moment l'air, par une circulation naturelle, entrera par N, pour occuper dans le casque la place que l'autre air vient de quitter. Ces fortes respirations étant répétées, & l'air respiré étant poussé hors de ce casque par le tuyau P M O, ( dont la partie recourbée P doit être mise à la bouche à chaque fois ) dans très peu de tems cet air se trouvera propre à la respiration : après quoi l'on fermera les robinets O, N, pour retourner au fond de l'eau, ce qui se fait de la manière suivante.

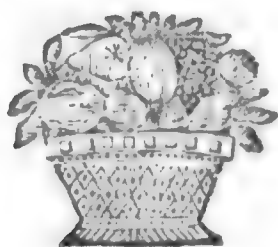
Il faut avoir une seringue de cuivre Z R S, dont la concavité soit égale à un pié cubique. Elle doit être entièrement fermée par le bout S, & ouverte en Z R, afin que le piston T V y puisse entrer librement. A l'axe du piston doit être le cric V X, dont le pignon Z, avec sa manivelle Y, soit à l'extrémité de la seringue, qu'on attachera au ceinturon D, de la manière qu'on porte les épées. La longueur & le diamètre de la se-



seringue peuvent être à discrétion , pourvu que la concavité puisse contenir un pié cubique d'air. No. III.

Toutes choses étant ainsi préparées ; supposons qu'un homme avec tout cet appareil ait moins de pesanteur spécifique qu'un égal volume d'eau, de telle manière que, lorsqu'il s'y est plongé , on voye encore au dehors une partie du casque M G ; si on lui ajoute quelques pièces de plomb , on pourra rendre sa pesanteur spécifique égale à celle d'un semblable volume d'eau , & faire en sorte que l'on ne voye que le sommet du casque G. Pour lors cet homme tournant la Manivelle Y , d'Y en Z, le Piston T V comprimera l'air  $\alpha$  , & s'approchera du fond S. Dans ce moment l'eau venant à occuper sa place , le volume de la seringue & du piston sera moindre qu'auparavant ; c'est pourquoi toute la masse de l'homme & de ses machines, occupera un moindre espace dans l'eau qu'au commencement , ce qui augmentera la pesanteur spécifique. Que si l'on continue à tourner la manivelle Y, le piston T s'approchera encore plus de S , & l'homme devenant plus pesant en espèce que l'eau , il descendra lentement au fond ; d'où il remontera à la surface de l'eau , en tirant le piston T vers Z R , par des raisons contraires.

Mais il faut se souvenir de laisser une ouverture au devant du casque pour y mettre une forte glace , dont les bords seront collés avec de la chaux vive & du blanc d'œuf , pour empêcher que l'eau n'entre par les jointures , & par ce moyen on pourra voir clair au fond & au milieu de l'eau. Cette glace est exprimée dans la figure en P 123. On pourroit aussi ajouter aux piés des nageoires comme celles des canards , afin de se conduire plus aisément , comme on peut le voir dans la figure.





N°. IV.

## EXAMEN DE LA MACHINE

POUR RESPIRER SOUS L'EAU,

DU Sr. BORELLI.

*Proposée dans le Journal du 6. Juillet de l'année dernière 1682, tiré d'une Lettre du Sr. BERNOULLI écrite de Bâle à l'Auteur du Journal, & conçue à peu près en ces termes.*

*Journal  
des Sça-  
vans. 1683.  
21. Jour-  
nal du 16.  
Août. p.  
250. Ed. de  
Paris & p.  
278. Ed. de  
Holl.  
Atta Erud.  
Lips. 1683.  
Dec. p. 553.*

**L** Es personnes intelligentes qui ont jugé qu'il étoit difficile de trouver une machine plus parfaite, ne l'ont pas examinée assez mûrement. En voici les raisons.

L'homme qui plonge dans l'eau armé d'un casque, comme il paroît dans la figure, étant en cet état à une profondeur un peu considérable sous l'eau, y souffriroit la plus grande torture du monde, à cause que sa tête ne soutiendrait que la pression élastique de l'air naturel renfermé dans le casque, pendant que le reste de son corps seroit exposé non seulement à une pression équivalente de l'Atmosphère, mais aussi à la pesanteur d'une colonne d'eau d'autant plus haute que la profondeur seroit plus grande; ce qui feroit sortir avec violence le sang de tout le corps par les narines, les oreilles, & la bouche, & enfler horriblement la tête beaucoup plus que la chair ne s'enfle dans les ventouses. Je soutiens même, que lors que le casque sera à la profondeur de 31 piés, laquelle est requise pour faire que la pression du corps soit double de celle de la tête, la douleur sera tout à fait insupportable.

Mais ce n'est pas seulement la douleur qui fait ici toute la peine: il y a encore d'autres tourmens, C'est que pour faire enfoncer l'homme avec un casque de deux piés de diamètre, il fau-

faudroit lui attacher un poids de 200 livres : Et bien qu'en cet No. IV. état l'homme demeureroit suspendu entre deux eaux, n'ayant ni plus ni moins de pesanteur spécifique qu'un égal volume d'eau ; si est-ce que le casque tendroit toujours à monter avec une force de 200 livres, pendant que le plomb, qui fait le contrepoids, le traineroit vers le fond avec pareille force : ce qui lui déchireroit les membres & l'étrangleroit misérablement. Il est vrai qu'on pourroit prévenir en partie cet inconvénient, en attachant le contrepoids au casque même, au lieu de l'attacher à l'homme. Mais on ne sauroit l'éviter tout à fait, puisque l'homme seroit toujours trainé en bas ou en haut, à mesure qu'il avanceroit ou retireroit le piston de la seringue.

Ce n'est pas encore le seul embarras. Je ne parle pas de celui que causeroit une seringue, dont la concavité contient un pié cubique ; car sa longueur étant de deux piés, le diamètre aura 9½ pouces ; & celle-là étant prise de 3 piés, la largeur aura près de 8 pouces. Je laisse à juger si le piston sauroit boucher une seringue d'une telle largeur aussi exactement qu'il le faut pour empêcher l'eau d'y entrer peu à peu. Je dis encore que si la bourse K étoit de cuir, comme la fait Mr. BORELLI, la pression prédominante de dehors ne trouvant pas assez de résistance au dedans de la bourse, en chasseroit tout l'air dans le casque, & le comprimeroit de telle sorte qu'il n'y pourroit plus passer le moindre atome d'air.

Mais je veux qu'on puisse remédier à tous ces défauts, la principale difficulté que j'ai touchée, & qui concerne l'inégalité des pressions dedans & dehors le casque, demeure toujours. Car enfin je puis faire en général un tel raisonnement. Pour respirer sous l'eau, il faut, ou que tout le corps humain soit enfermé dans un vase & environné d'air, ou qu'une partie soit dedans & l'autre dehors. Tout le corps n'y peut pas être renfermé, à cause qu'il seroit inutile au fond de la mer, ne pouvant obtenir la fin pour laquelle on s'y plonge : si donc il y a une partie du corps qui soit hors du vase, il faudra nécessairement, pour éviter la douleur qui accompagne l'inégale pression,  
ou

No. IV. ou qu'il y ait quelque chose qui défende cette partie, qui sort hors du vase, du surplus de la pression de dehors ( par exemple une espèce de cuirasse qui couvre entièrement cette partie, & qui non seulement ait assez de dureté pour résister au poids de l'eau, malgré sa figure irrégulière, mais qui soit en même tems assez souple & flexible, pour donner moyen par là au moins de manier le piston à travers, & de travailler au fond de la mer; ce qui est une chose absolument impossible ): ou bien il faudra qu'on s'avise d'un moyen de renforcer la pression de dedans, ce qui ne se peut faire que par la condensation de l'air, en faisant faire le vase, au lieu de cuivre, d'un cuir mol & tendre, qui puisse se serrer, & céder à la pression du dehors; car par ce moyen l'air qui est dedans, se réduisant peu à peu en un moindre volume, prendroit d'autant plus de force que le vase descendroit plus bas. Le mal en ceci est que la seringue ne pourroit plus servir alors, pour hausser & baisser selon le besoin, à cause que le vase, aiant perdu par sa contraction, à la profondeur d'environ 30 piés, plus de deux piés cubiques de son volume, le plongeur auroit beau retirer le piston jusqu'au sommet de la seringue, & regagner un pié; il demeureroit entièrement enseveli sous l'eau.

Outre tout cela, cette machine n'auroit point d'avantage par dessus la cloche, étant assujettie à la même difficulté qui accompagne la respiration dans l'air condensé; & d'ailleurs on peut adapter le tuyau L, & la bourse K, aussi bien à la cloche qu'à ce casque: de sorte qu'après tout, il faut toujours en revenir là. D'où je conclus que la machine ne vaut absolument rien.



No. V.



No. V.

# MACHINE POUR ELEVER LES EAUX,

*De l'Invention de Mr. L. C. D. O.*

**C**ette Machine, qui est une espèce de Balance, comme l'on voit assez par la figure, est fort simple. L'on peut par son moyen élever l'eau à quelque hauteur que ce puisse être, parce que l'on n'aura toujours que le seul poids de l'eau à élever, & cela se fera toujours sans frottement. *Journal des Savans 1682. 9e Journal du 30. Mars p. 107. Ed. de Paris, p. 132. Edit. de Holl.*

A, est une pièce de charpente élevée perpendiculairement, de 20 piés de hauteur, ou plus, selon le besoin; elle est retenue dans cet état, & fortifiée par des arboutans qu'on ne représente pas ici, parce que cela n'est pas de la machine. Dans les points D D d'enhaut & d'enbas sont suspendus en équilibre deux balanciers, où les chassis B, & C, sont attachés en égale distance des points D, D, pour les tenir en équilibre. Aux chassis B & C, sont attachés de deux en deux piés des baquets en forme d'échelle, comme il paroît aux nombres 1, 2, 3, 4, &c. A chaque extrémité des bras du balancier supérieur, qui sont plus longs que ceux d'enbas, est attachée une tringle de fer en charnière, avec laquelle, en faisant baisser alternativement de chaque côté les bras du balancier, on fait jouer toute la machine de cette sorte.

Lorsqu'en tirant la tringle E, l'on fait baisser le chassis B, le baquet inférieur puise dans l'eau, & se remplit. Tirant ensuite la tringle F, on fait baisser le chassis C, & hausser le chassis B; & en même tems que le baquet 20 puise dans l'eau, & s'en remplit, le baquet 1 se décharge de la sienne dans le baquet 19, & ainsi consécutivement; de sorte que si en abaissant la verge E, l'on fait remplir d'eau pour la deuxième fois le baquet 1, pour lors le chassis C s'élevant fait verser le baquet 20 dans le baquet 2, & le baquet 19 dans le baquet 3. Enfin tous les baquets de la machine s'emplissent de cette sorte, si bien qu'il y a toujours un chassis qui puise par le bas, & un autre qui jette par enhaut l'eau d'un de ces baquets dans le réservoir.

Les 4 petites croix qui se voient au bas de la figure sont les limites  
*Jac. Bernoulli Opera.* Z du

No. V. du mouvement alternatif qu'ont les chassis, & en marquent toute l'étendue, c'est-à-dire que les balanciers ne lèvent jamais plus haut, & ne baissent pas plus bas, que d'une croix à l'autre; & c'est dans ce mouvement que les deux chassis s'approchent, les baquets se remplissent, ou se déchargent de leur eau, les uns dans les autres.

Comme la nouveauté de cette machine, & les grands avantages qu'on prétend que le Public en peut recevoir, lui ont attiré selon la coutume, avec l'applaudissement de plusieurs personnes, la censure de quelques Critiques; l'Auteur a écrit un petit Livre, dans lequel il prouve qu'elle a toutes les perfections essentielles pour l'élévation des eaux; comme la solidité, la durée, l'avantage de fournir une grande abondance d'eau, & de l'élever à quelle hauteur on veut; enfin une extrême facilité, puis qu'elle n'a que le seul poids de l'eau à élever, sans danger d'aucun frottement étranger: ce qui manque dans les pompes, chaînes sans fin, chapelets, & autres inventions usitées.

No. VI.

**D O U T E S**  
**D U S r. B E R N O U L L I,**  
 S U R L A  
**M A C H I N E H Y D R A U L I Q U E,**  
*Dont il a été parlé dans le IX. Journal de*  
*l'année dernière.*

*Journal  
des Sça-  
vans 1683.  
22. Journal.  
du 19. Nov.  
p. 321. Ed.  
de Paris &  
pag. 360.  
Ed. de Hol.*

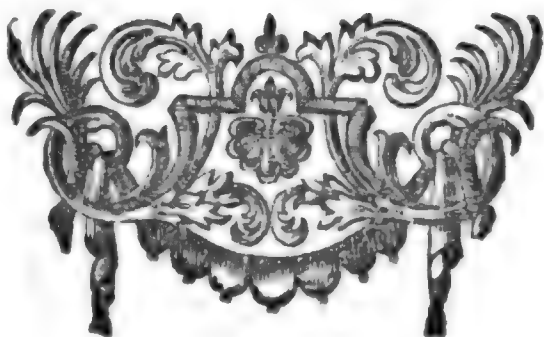
**L**A situation des baquets, dont cette Machine est composée, fait le principal doute de cet Auteur: car s'ils doivent être attachés à angles droits, & immobiles à l'égard des chassis B' & C, il ne voit pas qu'ils se puissent décharger les uns dans les autres; soit que leurs côtés fussent tous d'une même hauteur, soit que ceux qui sont tournés vers la pièce de charpente

DD,



D, D, fussent plus bas que les autres: puisqu'en ce dernier cas, No. VI. les baquets 1, & 20, se déchargeroient en l'air, avant que les balanciers fussent derechef de niveau; au lieu que dans le premier, ces baquets ne se déchargeroient point du tout, ayant toujours leurs surfaces d'enhaut horizontales.

Outre cela la facilité d'élever l'eau de cette manière, ne lui paroît pas si grande, que l'on pourroit penser; puisque tous les baquets d'un côté sont remplis, pendant que tous ceux de l'autre sont vuides, & qu'il y a toujours beaucoup de frottement aux axes D, D.





Nº. VII.

CENTUM  
POSITIONUM PHILOSOPHICARUM  
CENTO,

*Quem*

Ad diem XV Januarii M. DC. LXXXIV.

*Speciminis loco excutiendum*  
offert

JACOBUS BERNOULLI, L. A. M.

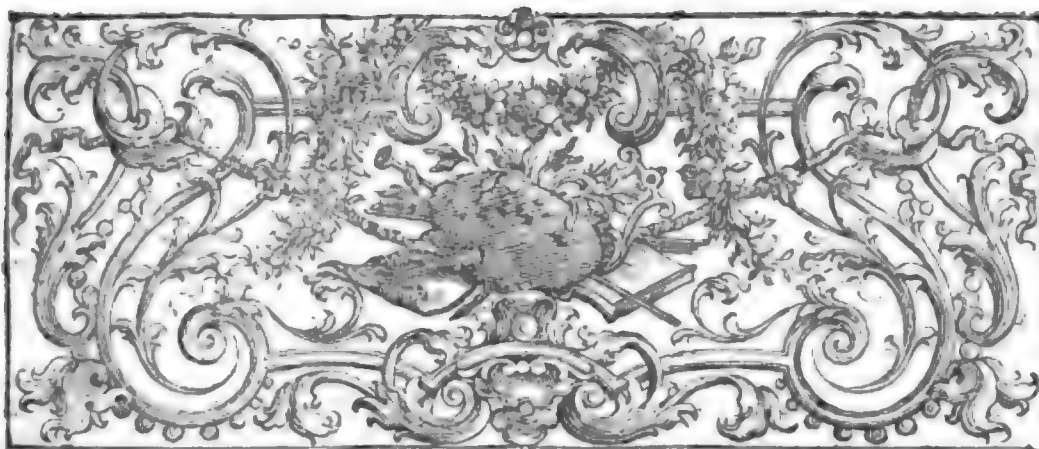
---

Editum primo

BASILEÆ

1684.





# CENTUM POSITIONUM PHILOSOPHICARUM CENTO.

---

## THESES LOGICÆ.

### I.

QUOD figura, situs, motus est corpori, illud. Ideæ sunt animæ. No. VII.

### II.

Et ut corpus non potest se determinare ad certam figuram, nisi occasione alterius corporis; ita nec mens sponte in se excitat ideas; sed eæ in mente successive eliciuntur objectu corporum (saltem ideæ rerum corporalium).

### III.

Atque hætenus nihil est in intellectu, quod non prius fuerit in sensu.

### IV. Cum

No. VII.

IV.

Cum autem Universalia a parte rei neque existant, neque sensus feriant, sed sola singularia; sequitur mentem primario percipere singularia.

V.

Objectum singulare corporeum ita perceptum vocatur *Imago*; ipsa perceptio *Imaginatio*.

VI.

Hæc autem imago eo distinctior est, quo pauciores in objecto partes, seu respectus, seorsim intueor; adeoque punctum imaginor distinctissime, lineam distinctius superficie, hanc corpore, lineam rectam circulari, triangulum polygono, circulum parabola, &c. Quo vero magis composita est idea alicujus rei, id est, quo plures includit respectus, eo confusius & difficilius rem imaginor; donec multitudine rerum comprehendendarum ita obruatur imaginatio, ut vacillet primo, tandem omnino labet. Sic octogonum, octaedrum difficulter, chiliogonum, icosædram nullo modo imaginari possumus.

VII.

Universalia non imaginamur immediate: non enim imaginor figuram planam, rectilineam, triangulum, isopleuron; sed isopleuron, cujus latus tot vel tot pedum &c.

VIII.

Cum Universalia apprehendere putamus conceptu puro; vel sola eorum nomina concipimus, vel singularia imaginamur, abstrahendo.

IX.

Item singularium valde compositorum, vel nuda nomina concipimus, vel imaginamur eorum partem, multiplicando.

X.

Conceptus ergo Universalium est imaginatio cum abstractione: Singularium compositorum, imaginatio cum multiplicatione.

XI. De-



X I.

No. VII.

Demonstrationes affectionum fiunt tantum circa singularia, sed redduntur universales, in quantum mens abstrahit ab illo, quod pecificat, vel individuat objectum.

X I I.

Quo quid magis compositum est, eo minus habet extensionis.

X I I I.

*Lur, statur* &c. sunt themata complexa.

X I V.

Si ab idea alicujus objecti, id, per quod in ultimo suo esse constituitur, abstraho; quod reliquum est, dicitur prioris ideæ *Genus*; quod abstractum est, *Differentia*: si quæ attributa alia deprehenduntur necessario nexu cum differentia coherere, illa vocantur *Propria*; reliqua quæ non necessario coherent, *Accidentia*.

X V.

Ergo *Propria* secundi, & quarti modi hujus tantum loci sunt; reliqua pertinent ad *Accidentia*.

X V I.

Exemplo res illustrabitur: *Circulus* per æqualitatem radiorum in esse suo completo constituitur; quare hæc æqualitas est ejus *differentia*: qua abstracta, remanet pro *genere* Figura plana curvilinea: quod vero ordinatim applicata sit media proportionalis inter diametri segmenta, est proprium quarti modi: quod quadrata ordinatim applicatarum sint in ratione rectangulorum sub segmentis diametri contentorum, est proprium secundi modi; cum & competat Ellipsi.

X V I I.

Homo non est species specialissima; nec circuli omnes sunt ejusdem speciei.

X V I I I.

Cum mens; in re confusus concepta, distincte considerat id, quod commune habet cum aliis, & id, per quod ab iisdem discrepat, definit rem.

*Jac. Bernoulli Opera,*

A a

X I X. Si

No. VII.

## XIX.

Si rei distincte conceptæ nomen imponit, dicitur *Nomenclatio*; si nomini significationem tribuit, est *Definitio nominis*.

## XX.

In omni Definitione nominis, genus subintelligitur, & quod expressum est, meram continet differentiam: plerumque enim toto genere differunt Definitum & Definitio.

## XXI.

Omnis Definitio rei fit per genus summum, & differentias subalternas.

## XXII.

Ad Propositionem universalem parum refert, sive subiectum ad multa, sive ad pauca se extendat; modo de omnibus sub se contentis sumatur: Hinc singularis habetur pro universali, quia eo ipso quo subiectum singulare est, sumitur in tota sua latitudine.

## XXIII.

Universalitas propositionum est, vel *metaphysica*; eaque vel absolute talis, ut, *Omnis homo vivit*, vel cum exceptione, ut, *Omnis homo est bipes*; quia, præter naturæ cursum, dari potest homo quadrupes: vel *moralis*, ut, *Omnes quæ sua sunt quarunt*; quia plerique hoc faciunt. Quædam propositiones sunt *universales generice* tantum, cum subiectum distribuitur duntaxat in genera singulorum; ut; *Omne animal fuit in Arca Noe*, &c. Quædam sunt *universales restrictivæ*, catenus saltem, quatenus subiectum restrictum est per partem attributi, ut, *Omnes* (sc. qui vivificabuntur) *in Christo vivificabuntur*, I. Cor. XV. 22. Utrobique sufficere potest *universalitas quadam moralis*, ut ibi: *Christus in se suscepit omnes languores*, id est, non præcise singula, sed præcipua morborum genera: hic: *Helvetii sunt boni milites*, sensus est, Helvetii qui sunt milites, plerumque sunt boni milites, &c.

## XXIV.

Propositiones indefinitæ, sive in materia necessaria, sive contingente, respondent universalibus. In materia enim contingente, propositio est, vel moraliter universalis, ut; *Matres amant liberos suos*, vel metaphysice universalis; sed falsa, ut, *Homines sunt nigri, corvi albi*, &c.

XXV. No.

## XXV.

No. VII.

Nomina collectiva in subiecto faciunt propositionem singularem.

## XXVI.

Præter propositiones compositas, in quibus plura sunt subiecta, vel attributa, aliæ dantur enunciationes *complexæ*, quæ propriè unum tantum habent subiectum & prædicatum, sed quorum alterutrum, vel utrumque, est terminus complexus cui aliæ propositiones includuntur, quas vocamus *incidentes*.

## XXVII.

Inter has, & principales, hæc differentia: quod hæ primario intenduntur, illæ ut propositiones jam antea factæ, sed conceptæ ut simplices ideæ.

## XXVIII.

Si additiones, quæ terminum faciunt complexum, restrictiones sint; nolim inde facere propositionem incidentem; sed saltem quando sunt explicationes: cum enim restringunt subiectum, non possunt de illo, qua tali, vere prædicari.

## XXIX.

Non omnes enunciationes copulativæ sunt affirmativæ, nec omnes disjunctivæ negativæ.

## XXX.

Quæritur quodnam sit subiectum in his & similibus propositionibus? *Non dantur ubique homines albi, corvi nigri, Leones, Rhinocerotes, &c.*

## XXXI.

Tres propositiones in Syllogismo, quoad quantitatem & qualitatem, non nisi decies variare possunt; quod sic demonstratur. Combinandi ars docet, quatuor vocalium A, E, I, O, ternas, sexages quater disponi posse diversimode: vel enim singulæ ponuntur ter, unde exurgunt 4 primæ mutationes, A A A. &c: vel singulæ bis, cum una reliquarum; id est, cum præter illam quæ bis ponitur, tres sint, illarum autem quæ bis poni possunt, sint quatuor, poterunt omnes quatuor, ter quater, id est, duodecies diversimode jungi; cumque tertia vocali bis repetitæ ita possit adjungi, ut vel ultimum, vel medium, vel primum loca obti-

A a 2

neat,

No. VII. neat, ut : AAE. AEA. EAA. &c. prodibunt in universum terduodecim, id est, 36 diversi disponendi modi: vel denique singulæ semel tantum accipiuntur una cum binis reliquarum, quopactō non nisi quater combinari queunt, nempe AEI, AEO, AIO, EIO, sed in singulis harum combinationum vocales sexies locum mutare possunt, veluti in prima, AEI, AIE, EAI, EIA, IAE, IEA; adeoque in omnibus 4 combinationibus vicies quater: qui modi, cum prioribus 4, & 36 juncti producunt summam 64. (*Vid. seq. Tabellam.*)

1. AAA	5. AAE *	23. IIA +	41. AEI —	
2. EEE +	6. aea —	24. iai	42. aie *	
3. III +	7. eaa —	25. aii	43. cai —	
4. OOO +	8. AAI	26. IIE +	44. cia —	
	9. aia —	27. ici —	45. iae *	
	10. iaa —	28. eii —	46. ica —	
	11. AAO *	29. IIO +	47. AEO (	1. AAA
	12. aoa —	30. ioi +	48. aoc —	2. AAI
	13. oaa —	31. oii +	49. cao	3. EAE
	14. EEA +	32. OOA +	50. eoa +	4. AEE
	15. eae	33. oao	51. oae —	5. IAI
	16. aee	34. aoo	52. oca —	6. AI
	17. EEI +	35. OOE +	53. AIO *	7. OAO
	18. eie —	36. oeo +	54. aoi —	8. AIO
	19. iee —	37. eoo +	55. iao *	9. EAO
	20. EEO +	38. OOI +	56. ioa +	10. EIO
	21. eoe +	39. oio +	57. oai —	
	22. oie +	40. ioo +	58. oia *	
			59. EIO	
			60. eoi +	
			61. ieo §	
			62. ioe +	
			63. oei +	
			64. oie +	

XXXII. Ho-

## XXXII.

No. VII.

Horum modorum excluduntur 28, hoc signo + notati, per quintam & sextam legem generalem syllog. *Ex duabus negantibus vel particularibus nihil concluditur* : 6, hoc signo \* conspicui, quod *ex duabus affirmantibus non possit concludi negative* : 18, transversa virgula insigniti, per 7<sup>am</sup>. legem generalem syllogismorum, *Conclusio debet sequi partem debiliorem* : Unus, videlicet I E O, signo § affectus, propterea quod, *conclusionem existente negata, major nunquam potest esse particularis affirmans*. Unus denique nempe A E O, hoc caractere (conspicuus, ideo quia A, E, semper concludere possunt generaliter. Summa ergo modorum inutilium est 54, qua subtracta de 64, remanent pro utilibus non nisi 10. Q E D. (*Vid. columnam § Tabella.*)

## XXXIII.

Horum decem modorum quintus & septimus e prima figura excluduntur, per primam legem specialem; quartus & octavus per secundam; secundus & nonus per hanc legem generalem, quod minor terminus semper est in conclusione, sicut in præmissis: Restant ergo hi soli quatuor, A A A, E A E, A I I, E I O. E secunda figura exulant iterum quintus & septimus per primam legem specialem; primus, secundus, & sextus, per secundam legem specialem; nonus, ob eandem rationem, ob quam excluditur e prima: Remanent igitur soli hi quatuor E A E, A E E, A O O, E I O. E tertia rejiciuntur quartus & octavus per primam legem specialem; primus, & tertius per secundam legem specialem; unde relinquuntur soli isti sex, A A I, I A I, A I E, O A O, E A O E I O, Q. E. D.

## XXXIV.

Modi indirecti primæ figuræ in *Fapesmo*, *Frisesmo*, sunt quartæ figuræ in *Fespamo* & *Fresison*.

## THESES ORATORIÆ.

## XXXV.

Si Rhetorica ab Oratoria separanda, quidni & Logica docens ab utente, & Mathesis abstracta a concreta? pertinet enim Mathesis abstracta non minus ad Philosophiam Organicam, ac Rhetorica & Logica docens.

## XXXVI.

Professor Oratoriæ Orator esse nequit.

## XXXVII.

Hæc definitio Oratoris; *Orator est vir bonus dicendi peritus*; similis est huic, *Sutor est vir bonus, calceamenta conficiendi peritus.*

## XXXVIII.

Mallem quoque Rhetorem & Oratorem distinguere, ut Sutorem theoreticum & practicum, qua ut Medicum Theoreticum & Practicum.

## XXXIX.

Non datur perfectus Orator.

## XL.

Ad perfectum enim Oratorem requiritur ut omnis eruditionis *ἐγκυκλοπαιδείαν* possideat.

## XLI.

Quia objectum illius est τὸ ἕκαστον.

## XLII.

Ut defectui tamen cognitionis humanæ quodammodo succurrerent, excogitarunt methodum inveniendi argumenta ad differendam de quavis re, per *locos communes*, de quibus agitur in parte Logicæ, dicta Topica.

## XLIII.

Qua de methodo, utut sua non destituatur utilitate, scite quidam



dam dixit, artem esse differendi absque judicio de rebus, quas No. VII. ignoramus.

## XLIV.

Ministri Verbi Dei sunt Oratores sacri.

## XLV.

Plura dantur, quam tria causarum genera.

## XLVI.

Plus ad encomium personæ conferet, si loco humili, Parentibus obscuris natam esse dicas.

## XLVII.

Tropus nunquam est in copula.

## XLVIII.

Omnis enunciatio impropria, etsi videatur simplex, est complexa.

## XLIX.

Id præcipue curet Orator, ut perspicue dicat; qui secus enim faciunt, non persuadere, sed admirationi esse Auditoribus cupiunt.

## L.

Importuni blateronis, non eloquentis, characterem prodit, qui quid dicat parum curat, dummodo copiose & ornate dicat; optime enim AUGUSTINUS, *Nullo modo mihi sonat diserte quod dicitur inepte.*

## LI.

Memoria potior est Rhetoricæ pars, quam Inventio, & Pronunciatio.

## LII.

Dantur plura, quam quinque Troporum genera.

THE

No. VII.

## THESES MISCELLANÆ.

## L I I I.

Quibusdam rebus nomina etiam *purè* indita sunt.

## L I V.

*Multa tibi habeo dicere*, Latinissime dicitur.

## L V.

In voce *lebendig* media correpta est, quamvis in istis *beständig*, *verständlich*, *inwendig*, *auswendig*, *unbändig* &c. producat.

## L V I.

Quod Gallorum prosodia quantitates negligat, id imperfectionis illius est argumentum; quid enim turpius isto lambico: *Un fidèle Chrétien donnera tout pour Dieu*. In vernacula, id vitii, ne in pueris quidem, ferendum amplius est.

## L V I I.

Spiritus operantur tantum volendo.

## L V I I I.

Corpus æque agit in animam, atque anima in corpus.

## L I X.

Voluptas est summum hominis bonum.

## L X.

Retentiones mentales, & æquivocationes Jesuiticas toto corde detestamur.

## L X I.

Execramur etiam calumnias & obreptiones, ceu pestilentissimum in civili societate virus.

## L X I I.

Quæritur quo loco habeamus illud vitium, quo quis, in conscientia de propriis convictus meritis, ambit munus, atque interium certo certius prævidens, male consultum iri publico, si aliter

ter sibi præferatur; malis artibus, cum aliter nequeat, sese in No. VII. illud intrudere conatur? Resp. ponimus in genere mendacii officiosi.

## LXIII.

Omnia corpora sunt entia per aggregationem, & homo quidem potius, quam acervus lapidum.

## LXIV.

Fieri non tantum potest, ut idem numero resurgat Petrus; sed etiam, ut potior sit inter Petrum hujus & illius sæculi identitas numerica, quam hic esse solet inter Petrum senem, & Petrum juvenem.

## LXV.

CARTESIUM circa *demonstrationem existentie Dei, Mundi infinitatem, regulas motus, causam cohesionis corporum, naturam reflexionis & refractionis &c.* hallucinatum esse, omnino mihi persuadeo.

## LXVI.

Phyfica est pars specialis Matheseos.

## LXVII.

Nullum corpus, per se, & sua natura durum est: imo omne corpus.

## LXVIII.

Ignis non magis calore præditus est, quam acus dolore.

## LXIX.

Nulla datur attractio, vel suctio, quæ non possit explicari per pulsionem.

## LXX.

Helleboro opus habet, qui, visis nostris experimentis, de aeris gravitate dubitare adhuc audent. Quin totus aer globum terraqueum ambiens, minimum ponderat 6, 687, 360, 000, 000, 000, libras, id est, centenariorum plus quam sexagies sexies mille millionum milliones.

## LXXI.

Lacrymæ Hollandicæ Phænomenon, nec aeri, nec ætheri tribuendum videtur.

*Jac. Bernoulli Opera.*

Bb

LXXII. Na.

No. VII.

## LXXII.

Naturam Gubernaculi primus explicui in Dissert. mea de Grav. Æth. p. 60. sqq.

## LXXIII.

Machina BORELLI respirationi sub aqua inserviens, atque in *Ephem. Erud. Gall.* descripta ad d. 6. Julii 1682, nullius est momenti, ob rationes quas Ephemeridibus an. 1683 inseri curavi.

## LXXIV.

Qui ad quæstionem : *Cur anser ostium horrei, quantumvis altum, intrans caput demittat?* acute sibi respondere videntur, *Quia anser est; Anseres sunt.*

## LXXV.

Rota Basiliensis a desideratissimo nostro populari Dn. JEREMIA MITZIO p. m. inventa, atque in SCHOTTI *Technica Curiosa* p. 409. descripta, quamvis optatum non habuerit successum, spem tamen motus alicujus perpetui pure artificialis non exiguam facit.

## LXXVI.

Majus est minus, & minus majus, si cætera sint paria.

## LXXVII.

Linea recta potest dari rectior.

## LXXVIII.

A puncto ad punctum aliquando plures dantur viæ brevissimæ.

## LXXIX.

Unius lineæ, infinitæ dari possunt perpendiculares, in idem illius punctum incidentes.

## LXXX.

Unicum circuli centrum est, quamvis plura sint puncta a quibus ductæ rectæ ad circumferentiam sunt æquales.

## LXXXI.

Circulus infinita capit maxima, sed unum minimum.

## LXXXII. An:

LXXXII.

No. VII.

Angulus contactus, vel nullus est, vel est compages infinito-  
rum angulorum rectilincorum.

LXXXIII.

Figurarum Isoperimetrarum una, altera infinities major esse  
potest.

LXXXIV.

Continens semper majus, semper minus : aliquando majus,  
aliquando minus : imo nunquam majus, nec minus est contento.

LXXXV.

Non in omni triangulo tres anguli sunt duobus rectis æquales.

LXXXVI.

Ex unica statione non datur mensio.

LXXXVII.

Titius agrum suum triangularem, cujus unum latus est 50,  
alterum itidem 50, tertium 60 perticarum, alio Sempronii com-  
mutat, cujus unum latus est 50, alterum 50, tertium vero 80  
pertic. Dico commutationem esse justam.

LXXXVIII.

Compendium nostrum Geometriæ paralogismum committit in  
bisectione rectæ *Part. 2. C. 2. prop. 2.* ubi sumit quod proban-  
dum erat. Pariter HEINLINUS ἀγιομετρίτος est, *Geom. Part. V.*  
*probl. 21.*

LXXXIX.

Circuli quadratura nondum inventa est; non vero hanc ob ra-  
tionem, quod curvi ad rectum non detur proportio: revera enim  
& lineæ curvæ inventus ἰσθυσμός, & figuræ curvilinæ πλατυσμός.

X C.

Copernicani Solem sentiunt moveri, Terram quiescere: Ptole-  
maici contra. Cæterum incredibilis rapiditas, quæ, in hypothefi  
Ptolemaica, Fixis adscribenda est, non est sufficiens argumen-  
tum mittendi nuntium huic hypothefi.

Bb 2

XCI. Sol-

No. VII.

## XCI.

Sol dum accedit ad nos, recedit a nobis; eodemque tempore ascendit & descendit.

## XCII.

Si obliquitas Eclipticæ esset 90 gr. dies sub nostra elevatione foret continuus unius mensis & dimid. Sub ipsis autem polis æstus esset longe intolerabilior eo, qui nunc æquatorem infestat.

## XCIII.

Fieri potest, ut incolis Zonæ torridæ Sol, per sat multos annos, non fiat verticalis.

## XCIV.

Terra non est figuræ ellipticæ.

## XCV.

Non dantur Antipodes.

## XCVI.

Periodus Juliana tanti non est, quin illa Chronologi carere potuissent. Pro investigando autem anno currente periodi Julianæ, talem inveni methodum: Datum numerum cycli Solis duc in 4845, Lunæ in 4200, Indictionis in 6916; summamque trium productorum divide per completam Periodum Jul. 7980. Residuum indicabit annum ejus currentem.

## XCVII.

Magnitudines æquales, si inæquales appareant, in Perspectiva non semper per inæquales repræsentandæ.

## XCVIII.

Mathesis tantæ est præstantiæ, ut ejus usus latissime ad omnia opificia, ne ipsa quidem sartoria, vel sutoria excepta, se extendat; sic ut mirari satis nequeam, cur scientiarum utilissima tam paucos inveniat cultores.

## XCIX.

Sic Analysin, seu Algebram speciosam, ejusque applicandæ artificium qui norit, totum secretum nostratis cujusdam in fabricandis stateris non difficulter deteger. Datis enim cylindricæ vel prismaticæ stateræ brachio breviori,  $a$ ; longiori,  $b$ ; distantia puncti



puncti applicationis majorum onerum ab hypomochlio,  $c$ ; sacomate No. VII. brachii longioris æquipondium faciente cum onere explorando,  $d$ ; minimo onere explorando,  $e$ ; maximo,  $f$ ; distantia sacomatis ab hypomochlio æquiponderantis oneri maximo,  $g$ ; minimo,  $h$ ; & differentia inter duo onera majora vel minora,  $p$ . Quærentur pondus jugi,  $x$ ; distantia puncti applicationis minorum onerum ab hypomochlio,  $y$ ; divisiones brachii longioris respondentes differentiæ  $p$  duorum onerum majorum,  $z$ ; eidem differentiæ duorum minorum,  $\S$ . Totum autem mysterium in his latet æquationibus;  $x = (2acf + 2bcf - 2adg - 2bdg) : (bb - aa)$ ,  $y = (dh + cf - dg) : e$ ,  $z = cp : d$ ,  $\S = (dhp + cfp - dgp) : de$ . Estque  $y : e = \S : z$ . (\*).

C.

Ad complendam centuriam, Cl. Dnn. Competitoribus sequens problema algebraice solvendum & construendum propono: Datis duabus pilis in mensa tudicularia; impellere unam in latus mensæ, ut post 2, 3, &c. reflexiones (*bricolles*) impingat in alteram: inven-

B b 3

nien-

(\*) Sit AB [Tab. X. b. pag. 326. No. 7.] jugum stateræ, cujus hypomochlium K; sitque brachium brevius KA =  $a$ , longius KB =  $b$ . Applicentur puncto C, cujus distantia ab hypom. CK =  $c$ , pondus F =  $f$ ; & puncto G, cujus distantia GK =  $g$ , sacoma D =  $d$ : erit, per notissimam Staticæ legem momentum ponderis F [ $cf$ ] plus momento brachii KA [ $\frac{1}{2}aax : (a+b)$ ], posito nempe  $x$  pondere jugi] æquale momento sacomatis D [ $dg$ ] plus momento brachii KB [ $\frac{1}{2}bbx : (a+b)$ ]. Unde deducitur  $x = (2acf + 2bcf - 2adg - 2bdg) : (bb - aa)$ , &  $\frac{1}{2}(bb - aa)x : (a+b) = cf - dg$ . Nunc, e puncto Y, cujus distantia YK =  $y$ , suspendatur pondus minus E =  $e$ , quocum sit in æquilibrio sacoma D [ $d$ ] suspensum ex H, cujus distantia HK =  $h$ ; erit, ut supra,  $ey + \frac{1}{2}aax : (a+b) = hd + \frac{1}{2}bbx : (a+b)$ ; seu

$ey = hd + \frac{1}{2}(bb - aa)x : (a+b) = hd + cf - dg$ , atque  $y = (hd + cf - dg) : e$ . Minuatur pondus F quantitate  $p$ , ut sit nunc  $f - p$ , & ejus momentum erit  $cf - cp$ . Transeat, æquilibrii servandi gratia, sacoma D ex G in g, positoque Gg =  $z$  vel Kg =  $g - z$ , momentum sacomatis erit  $dg - dz$ , sic ut, additis brachiorum momentis, habeatur hæc æquatio  $cf - cp + \frac{1}{2}aax : (a+b) = dg - dz + \frac{1}{2}bbx : (a+b)$  vel  $cf - dg + \frac{1}{2}(aa - bb)x : (a+b) [= 0] = cp - dz$  aut  $z = cp : d$ . Quod si pondus E [ $e$ ] minutum posuissemus eadem quantitate  $p$ , & sacoma D ad hypomochlium accessisset distantia Hh =  $\S$ , pariter invenissemus  $ey - py + \frac{1}{2}aax : (a+b) = dh - d\S + \frac{1}{2}bbx : (a+b)$ ; unde fit  $\S = py : d = (dhp + cfp - dgp) : de$ , &  $\S : z = \frac{p y}{d} : \frac{cp}{d} = y : e$ .

No. VII. niendum sit punctum incidentiæ in latere mensæ? Resp. (\*).

(\*) Id plurimis effici potest modis. Hunc accipe. Sit A pila impellenda, B ferienda; LC, DH latera mensæ. His normalem age DC per B, & sumta CE = BC & DG = DE, atque CK = CG, & sic deinceps; si vis pilam B post unam reflexionem ferire, impelle pilam A secundum AE; si post duas secundum AG; si post tres, secundum AK, &c. Demonstrationem, quæ facillima est,

omittimus.

Si sit A pila ferienda, B mittenda, erunt F, I, N, &c. puncta incidentiæ, pro una, duabus, tribus, &c. reflexionibus; ac si vocetur BC = b, DC = d, demissæ ex A normales in latus CL = a, in transversalem CD = c, erit CF = bc : (a + b); CI = bc : (a - b + 2d); CN = bc : (a + b + 2d); C &c. = bc : (a - b + 3d) &c. uti facile patet.

## No. VIII.

### RELATIO

#### *De Controversia quæ hætenus*

*inter Dn. HUGENIUM & Dn. CATELANUM agitur,*

#### *De Centro Oscillationis :*

*Collecta ex Ephemeridibus Gallicis.*

**ABa Erud.** **C**larissimus HUGENIUS in illius Tractatus, quem de *Pendulo* inscripsit; **Lips. 1684.** Parte IV, fundamenti loco, cui totum systema de Centro Oscillationis inædificet, hanc regulam posuit: „ Si pendulum, e pluribus ponderibus „ compositum, atque e quiete dimissum, partem quamcunque oscillationis „ integræ confecerit; atque inde porro intelligantur singula ejus pondera „ relicto communi vinculo, celeritates acquisitas sursum convertere, ac quo „ usque possunt ascendere; hoc facto, centrum gravitatis ex omnibus compositæ ad eandem altitudinem reversum erit, quam ante inceptam oscillationem obtinebat. Eam propositionem, anno 1681, in *Dtario Gallico*, *mensæ Decembri*, aggressus est Dn. CATELANUS, Mathematicus Parisiensis; atque, ut parum firmam probaret, ostendit, cum pendulum e duobus ponderibus compositum descendit, altitudines, e quibus pondera connexa delabuntur, proportionales esse celeritatibus acquisitis; sed cum pondera, occurso plani resistentis separata, iterum ascendunt, altitudi-

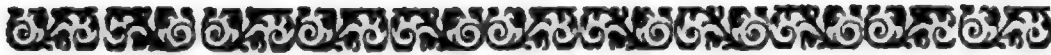
nes.

nes illas, ad quas perveniunt, se habere ut quadrata celeritatum acquisi- No.VIII.  
tarum. Quæ duæ summæ sane differentes, ut videntur, si per nume-  
rum ponderum divisæ fuerint, altitudinem ad quam centrum gravitatis  
commune ascendit, differre demonstrabunt ab ea, unde initio descende-  
rat. Cui objectioni Dn. HUGENIUS in *Ephemeridibus* itidem *Gallicis*,  
*mensæ Junio, Anni 1682*, breviter respondit; negando, summam illam  
altitudinum, quas CATELANUS differentes esse supposuerat, revera  
tales inveniri: neque enim sequi, altitudines duas, quas inter non est  
ea proportio quæ inter duas alias, necessario summam ab harum summa  
differentem efficere. *Mensæ Junio, Anni 1682* excepit CATELANUS,  
se non ignorare, quod quatuor magnitudines inæquales efficere duas  
summas æquales valeant; sed hoc solum se concludere, quod HUGENII  
propositio generalis vera esse non possit, nisi pars æqualis toti statuatur.  
Affirmat „ celeritatem totalem penduli compositi, quæ inter partes di-  
„ stributa sit proportionaliter ad arcus, quos ipsæ describunt, semper  
„ æqualem esse summæ celeritatum, quas eandem partes acquisivissent,  
„ si una ab altera fuisset sejuncta, & omnes separatim ex iisdem altitudi-  
„ nibus, & in eadem distantia ab axe descendissent. Hoc & aliis non-  
nullis, de quibus ante dixerat, suppositis, controversiæ statum ad hanc  
propositionem redire scribit: „ si habeantur duæ magnitudines inæ-  
„ quales  $aa$  &  $bb$ , summa radicum ipsarum  $a+b$ , & quadrata partium  
„ illius summæ, quæ sint proportionales dictis magnitudinibus, quæque  
„ adeo pro communi denominatore habeant  $aa+bb$ , & pro numerato-  
„ ribus differentibus  $a^3+aab$  &  $b^3+abb$ ; ostendere, quod summa  
„ harum duarum magnitudinum, quæ altitudines, unde duo pondera æ-  
„ qualia uni pendulo alligata demittuntur, repræsentant, non possit esse  
„ æqualis summæ quadratorum illarum partium, quæ altitudines exhibent,  
„ ad quas duo pondera, postquam percussione facta fuerint sejuncta, re-  
„ deunt, nisi minor harum magnitudinum  $aa$  &  $bb$ , sit æqualis majori;  
„ hoc est, quia istæ magnitudines in quæstione proposita semper inæqua-  
„ les sunt, nisi pars æque magna sit ac totum. „ Atque ut intelligere-  
tur, quod antea HUGENIO objecerat CATELANUS, id omnino  
cum his, quæ modo ex ipso recensuimus, congruere, eodemque collima-  
re, primam objectionem, anno 1681 factam, recudi, eidemque lineolas  
quasdam, prius omittas, adjici curavit. HUGENIUS, post duorum  
fere annorum silentium, exceptioni novæ satisfacere, monentibus amicis,  
in *Ephemeridibus Gallicis 3. Julii præsentis anni* voluit, ne victas dedisse  
manus videretur.

Propositionem ergo, ad quam statum controversiæ CATELANUS redu-  
xerat, primum terminis Algebraicis, paulisper clarius, ac a CATELANO  
factum fuerat, repetit, deinde Algebra hic opus non esse innuens, nume-  
ris

No. VIII. ris eandem offert : „ Ponatur, inquit,  $aa$  æquale esse 1, &  $bb$  æquale „ 4; summa radicum  $a + b$  sunt 3, & partes proportionales hujus sum- „ mæ sunt  $\frac{1}{3}$  &  $\frac{1}{3}$  : faciunt enim junctim  $\frac{2}{3}$ , quod est 3, & sunt inter se „ ut 1 ad 4. Quadrata earumdem partium sunt  $\frac{1}{9}$ , &  $\frac{16}{9}$ . Hoc igitur „ solum restaret demonstrandum, quod scilicet summa 1 & 4, non sit æ- „ qualis summæ, quæ prodit ex  $\frac{1}{9}$  &  $\frac{16}{9}$ , sive quod 5 non sint æqua- „ lia  $6\frac{2}{3}$ ; id quod sane per se clarum est. Negat autem HUGENIUS in hac propositione quadrata ipsarum  $(a^3 + aab) : (aa + bb)$  &  $(b^3 + abb) : (aa + bb)$  sive  $\frac{1}{3}$  &  $\frac{16}{9}$ , ad repræsentandas altitudines, ad quas pondera sejuncta redierint, recte assumi. Et porro illud falsum esse, quod de celeritate totali penduli CATELANUS supposuerat, ostendit e principio Mechanico, vi cujus centrum gravitatis non ascendit altius, quam antea fuerat delapsum. Est & alia HUGENIO cum CATELANO controversia, circa generalem regulam, quam de centro oscillationis sive agitationis CATELANUS proposuerat : sed eam ne plura cumulemus, impræsentiarum dimittimus. Antequam vero HUGENIUS ad CATELANI exceptionem alteram responderet, suscepit in se Dn. BERNOULLI Basileensis HUGENII causam, eamque contra CATELANUM defendendam sumpsit. Ejus verba quoniam, quæ hactenus in lite Clarissimorum virorum diximus, plurimum illustrent, huc integra appone- re ex *Ephemeridibus Gallicis die 24. April. 1684.* visum fuit.



N<sup>o</sup>. IX.

# EXTRAIT D'UNE LETTRE

DU Sr. BERNOULLI,

*Ecrîte de Bâle à l'Auteur du Journal, sur le  
démêlé de Mr. l'Abbé CATELAN, avec Mr.  
HUGENS, touchant le Centre d'Oscillation.*

N'ayant pas encore remarqué que Mr. HUGENS ait ré-  
pondu à la replique de Mr. l'Abbé CATELAN, que  
vous avez inférée dans vos Journaux de 1682, touchant sa prin-  
cipale proposition du centre d'oscillation; je crois que vous ne  
trouverez pas mauvais que je vous écrive un mot, pour sa jus-  
tification.

*Journal  
des Sça-  
vans 1684.  
12. Journal  
du 24. Avr.  
p. 142. Ed.  
de Paris &c  
pag. 157.  
Ed. de Hol.*

Tout le discours de Mr. CATELAN ne tend qu'à prouver  
que la somme des racines de deux grandeurs quelconques ne peut  
être coupée en deux parties, en sorte qu'elles soient proportionnelles  
aux grandeurs données, & que la somme de leurs quarrés soit éga-  
le à celle de ces mêmes grandeurs: ce qui ne lui est pas contes-  
té par Mr. HUGENS, qui soutient seulement que la somme de  
ces deux grandeurs peut bien être égale à la somme de deux au-  
tres, qui ne sont que proportionnelles aux quarrés des dites parties;  
ce qui est aussi très vrai. Et pour vous montrer que la dispute  
ne revient qu'à cela, je me servirai du même exemple de deux  
poids égaux, en rendant ces vérités abstraites plus sensibles par  
les nombres.

Soient A & B, deux corps suspendus à l'axe D, l'un à la  
Jac. Bernoulli Opera, C c di-

- No. IX. distance quatre fois plus grande que l'autre : ainsi si la hauteur perpendiculaire  $BI$ , d'où descend le Corps  $B$ , en décrivant l'arc  $BG$ , est posée de quatre piés, l'autre  $AH$ , d'où tombe le corps  $A$ , sera d'un pié. Les vitesses donc qu'ils acquerront en tombant séparément, étant comme les racines de ces hauteurs, seront en raison de 2 à 1 : la somme 3, qui marque la vitesse totale du pendule, étant partagée proportionnellement aux hauteurs, ou aux arcs  $BG$ , &  $AF$ , donne les degrés de vitesse qu'obtiennent les poids lors qu'ils tombent conjointement sur la planche  $DG$ , savoir  $\frac{1}{3}$  &  $\frac{2}{3}$ , les quarrés desquels sont  $\frac{1}{9}$  &  $\frac{4}{9}$ , dont la somme est assurément différente de celle des hauteurs d'où les poids sont descendus ; mais ces quarrés ne marquent que la proportion des hauteurs,  $OM$ , &  $NL$ , auxquelles montent les poids après la rencontre de la planche, & non pas les hauteurs mêmes ; lesquelles peuvent bien être en raison de  $\frac{1}{16}$  à  $\frac{1}{9}$ , c'est-à-dire, de 16 à 9, sans que leur somme laisse pour cela d'être égale à 3, qui est celle des hauteurs  $IB$ , &  $AH$ , d'où les mêmes poids sont descendus ; car si je fais la hauteur  $OM$  de  $4\frac{1}{16}$  piés, l'autre  $NL$  de  $\frac{1}{9}$  ;  $OM$  sera à  $NL$ , comme 16 à 1, &  $OM + NL$  sera égal à  $BI + AH$ , & par conséquent le centre de pesanteur commun des poids  $A$ ,  $B$ , montés en  $L$ ,  $M$ , sera à même hauteur qu'il étoit devant que le balancement fût commencé ; ce qui paroît facilement par l'inspection de la figure : car le poids  $M$ , étant autant au dessus de la ligne horizontale  $BD$ , que  $L$  en est au dessous, savoir de  $\frac{1}{16}$  parties d'un pié, il s'ensuit que dans les triangles semblables  $MPQ$ , &  $LQR$ , les côtés  $MQ$ , &  $QL$  sont égaux, c'est-à-dire, que le milieu de la ligne  $ML$ , qui joint les deux poids, se trouve dans l'intersection de la ligne horizontale. Voilà, Monsieur, ce que j'avois à vous dire sur ce sujet.

No. X.





N<sup>o</sup>. X.

# R E P O N S E

D E

MR. L'ABBE' CATELAN,

*à la Lettre de*

MR. B E R N O U L L I ,

*Sur son démêlé avec MR. HUGENS touchant  
le Centre de Balancement,*

*insérée dans le XII. Journal de  
cette année 1684.*

**P**OUR répondre à cette lettre, je répéterai le même exemple dont Mr. BERNOULLI se sert contre moi, d'un pendule composé de deux poids égaux, suspendus par un même axe, à un centre commun, qui soit quatre fois plus éloigné de l'un que de l'autre; en sorte que les hauteurs perpendiculaires, d'où ils descendent, soient comme 1 à 4.

Nous sommes d'accord sur la proportion de ces hauteurs, & de la somme des vitesses que ces poids acquerroient, s'ils tomboient, séparément, de ces hauteurs: mais nous ne convenons pas ensuite dans l'expression de ces hauteurs, par rapport à une certaine partie d'espace, qu'on doit prendre pour leur commune mesure, & concevoir comme l'unité à leur égard.

Je prétens, selon tous ceux qui ont écrit avant moi sur de semblables questions, que les véritables nombres, qui doivent servir à exprimer les hauteurs, sont les quarrés mêmes des nombres exposans des vitesses,

C c 2

toutes

*Journal  
des Sça-  
vans. 1684.  
27. Jour-  
nal du 11.  
Sept. p.  
313. Ed. de  
Paris & p.  
361. Ed. de  
Holl.*

No. X. toutes les fois qu'il n'y a de proportions données entre les unes & les autres, que celle qui nous est connue en général par l'expérience.

Or selon mon expression, il est évident que 9 fois & 144 fois la 25 partie d'un pié; c'est à dire, six piés, un pouce, cinq lignes, & & quelque chose davantage, n'étant pas la même grandeur qu'un pié & quatre piés, ou cinq piés, la somme des hauteurs où les poids montent dans l'exemple proposé, n'est pas égale à celles des hauteurs d'où ils descendent; contre ce que Mr. HUGENS avance dans la proposition générale qui sert de principe à son Traité des Centres de balancement.

Mr. BERNOULLI répond à cette objection; que les quarrés des nombres, qui expriment les vitesses des poids, ne marquent que la proportion des hauteurs, auxquelles ils montent après leur séparation, & non pas les hauteurs mêmes, qui peuvent bien être en raison de  $\frac{144}{25}$ , &  $\frac{9}{25}$ , sans que leur somme laisse pour cela d'être égale à 5, qui est celle des hauteurs d'où les poids sont descendus, étant unis dans un même pendule; car les hauteurs, où ils remontent étant séparés, sont selon lui  $4\frac{12}{25}$ , &  $\frac{1}{25}$ , qui font ensemble 5, aussi bien que les nombres 1 & 4, exposans des premières hauteurs.

La Replique est facile. Je demande à Mr. BERNOULLI, qui prétend qu'on ne doit avoir ici égard qu'à la proportion des quarrés des nombres exposans des vitesses, par quelles loix du mouvement, & par quel principe de mécanique, les poids dont il est question remonteront plutôt aux hauteurs qu'il marque, & qui l'accroissent, qu'à leurs proportions  $5\frac{12}{25}$  &  $\frac{1}{25}$  dont la somme est 6, ou bien à  $3\frac{12}{25}$  &  $\frac{1}{25}$  dont la somme est 4, ou à une infinité d'autres semblables qui ont entr'elles la même proportion de  $\frac{144}{25}$  &  $\frac{9}{25}$ , mais qui donnent la hauteur du centre de pesanteur remonté plus grande, ou plus petite à l'infini, que celle d'où l'on suppose qu'il soit descendu? Certainement ces poids ne remonteront pas à toutes sortes de hauteurs, proportionnelles aux quarrés des vitesses qu'ils ont acquises en descendant; puisque leur pesanteur ralentit par degrés, & détruit à la fin ces vitesses, avec lesquelles ils sont réfléchis. Qu'arrivera-t-il donc alors? Je le demande à Mr. BERNOULLI? La Nature, incertaine par elle-même de ce qu'elle doit faire en cette occasion, se déterminera-t-elle enfin à agir dans ces poids selon sa volonté? Il me permettra d'en douter, jusqu'à ce qu'il nous en donne de bonnes preuves, tirées des principes de la Physique. Et cependant je crois pouvoir conclure, que les raisons, qu'il apporte ici en faveur de Mr. HUGENS, ne servent qu'à confirmer, que sa proposition générale & fondamentale des centres de balancement, n'est ni si bonne, ni si incontestable qu'il le pense.

Voyez N°. XXIII.

N°. XI.

# NOUVELLE MACHINE POUR PESER L'AIR,

*inventée par*

*le Sr. B E R N O U L L I ,*

*Mathématicien de Basle, & envoyée à l'Auteur du Journal.*

**D**E toutes les diverses manières de peser l'air, qu'on nous a données jusqu'ici, celle de Mr. B O Y L E est sans doute la plus estimée, comme étant la plus exacte. Il prend des phioles, ou bouteilles de verre, de la grosseur d'un œuf ou d'un ballon, avec un col fort menu, qu'il fait sceler hermétiquement au moment qu'elles sortent de la fournaise. Les ayant laissé refroidir, il les pèse dans une balance très juste. Il en rompt ensuite le bout ; donnant par là moyen à l'air d'y entrer. Après cela, il les pèse derechef avec le bout rompu, & trouve ainsi le poids de l'air qui y est entré.

On peut se servir plusieurs fois pour cet effet d'une même phiole, sans la sceler hermétiquement, si après en avoir chassé l'air, par la chaleur d'une braize, on en bouche l'ouverture seulement avec de la cire ; après quoi on la pèse, & puis on perce la cire avec une épingle, pour la repeser encore. J'ai laissé quelquefois ces phioles 4 ou 5 mois, ainsi bouchées avec de la cire, après lesquels je m'en servois encore avec le même succès.

Cependant il est aisé de remarquer, que cette manière de peser l'air a trois défauts considérables. Car 1°. il ne peut y avoir

No. XI. aucune exactitude, en pesant une aussi petite portion d'air, que sauroient contenir de semblables phioles ; d'autant plus que, dans l'examen des petites choses, une différence imperceptible peut souvent causer une erreur fort notable dans la proportion.

Mais si, pour éviter ce défaut, on choisit un plus grand verre, l'on se jette dans un autre inconvénient, qui est que la balance étant trop chargée par la pesanteur de la phiole, elle ne tourne plus aussi librement qu'il faudroit qu'elle tournât, pour marquer jusqu'à la moindre différence du poids : Ensorte que Mr. BOYLE ne gagne guères, quand pour faire remarquer la justesse de sa balance, il dit que la quarantième partie d'un grain lui faisoit perdre l'équilibre : car ce n'est pas à dire, qu'elle doive être aussi juste, après l'avoir chargée de la bouteille ; ayant trouvé par expérience, que si la dixième partie d'un grain suffit pour faire pancher sensiblement d'un côté un trébuchet d'orfèvre qui n'est pas chargé, il faut pour le moins ajouter, à l'un de ses bassins, dix, ou douze grains, pour le faire pancher comme auparavant, lors même que chaque bassin n'est chargé que d'une once, ou de deux.

Le 3<sup>e</sup>. défaut est encore plus considérable que les deux autres ; en ce qu'en cette manière on ne peut connoître, quelle quantité d'air a été chassée hors de la phiole ; ce qu'il faut pourtant savoir pour trouver la juste proportion de sa pesanteur à celle des autres corps.

Pour remédier donc à tous les inconvéniens qui peuvent arriver là-dessus, il faut venir à ce problème qui peut tenir lieu de paradoxe, savoir de trouver moien de peser un fort grand volume d'air, à une balance très déliée & très fine, sans que le vase contenant cet air empêche, par sa pesanteur, que la balance ne tourne aussi librement, que si elle n'étoit point du tout chargée, & sans que l'évacuation du vase cause aucune altération dans le vase même.

Pour résoudre en un mot ce Problème, il ne faut que peser un grand récipient dans l'eau ; puis en ayant tiré l'air, par le moien de la machine du vuide, le peser derechef. Comme cette  
ma-

manière est très simple, & très aisée, il y a lieu de s'étonner No. XI. que Mr. BOYLE, qui savoit bien que les corps perdoient leur pesanteur dans l'eau, & qui n'ignoroit pas l'usage de la Machine du vuide, ne s'en soit jamais avisé. Mais pour en faire l'expérience, avec toutes les précautions nécessaires, il faut observer ce qui suit.

Il faut prendre d'abord un Récipient A, des plus grands qui se puissent faire, & souder à son goulet une clé de robinet B, avec son tuyau C. On entoure ensuite le récipient, au dessous de son goulet, d'un cercle, ou anneau de fer D, bien large, & dont les bords soient retroussés en haut, pour empêcher que ce que l'on y met n'en puisse tomber facilement. Aux 4 cotés opposés de ce cercle, on attache des lames de fer E E, assez épaisses, qui se croisent au bas du récipient, pour y recevoir le crochet du bassin F, dans lequel on mettra du poids autant qu'on le jugera nécessaire pour faire enfoncer le récipient dans l'eau. Il vaut mieux toutefois y en mettre trop peu que trop, parce qu'il sera plus aisé d'en ajouter que d'en ôter.

Cela fait, il faut plonger le récipient avec tout cet appareil dans le tonneau renversé G, qui est presque rempli d'eau : puis aiant passé trois fils de soie dans les petites anses *aa*, qui sont autour du tuyau du robinet immédiatement au dessus de la clé, il en faut attacher le bout au bras d'un trébuchet bien subtil & bien juste, & à l'autre bras le bassinet H, dans lequel on ne mettra qu'autant de poids que vous jugerez à peu près nécessaire, pour contrepeser le seul air du récipient ; c'est à dire, 4 ou 6 dragmes, ou une once, suivant la capacité du récipient : après quoi, l'on achevera de mettre du poids autour du cercle D, pour faire enfoncer le récipient avec son robinet, jusqu'à ce qu'il soit tout couvert d'eau, & parfaitement en équilibre avec le contrepoids du bassinet H. Ensuite de cela, il faut lever, avec deux doigts, tout doucement le récipient, pour faire sortir l'ouverture du tuyau C, hors de l'eau jusqu'en C ; puis ayant succé, à travers un chalumeau, l'eau contenue dans la concavité du robinet, & l'ayant bien essuyé par dedans, de peur qu'en ouvrant le robinet il

**No. XI.** il ne tombe quelque goutte dans le récipient ; il en faut tirer l'air ; autant que l'on peut , par le moien de la pompe I ; & afin qu'il ne soit pas nécessaire de changer la situation perpendiculaire , ni du récipient , ni de la pompe , on peut se servir du Syphon recourbé K , attaché d'un côté avec de la cire au robinet du récipient , & de l'autre à celui de la pompe.

Ayant tiré l'air , il faut tourner la clé du robinet , détacher le Syphon K , & racler toute la cire du bout du robinet C ; mais quand il en resteroit quelque peu , on ne doit pas penser que cela apporte du changement au poids du récipient , selon tout le poids de cette masse au dessus de celui d'un égal volume d'eau ; & l'excès ne sauroit aller à la centième partie d'un grain ; la différence des pesanteurs spécifiques de l'eau & de la cire étant très petite.

Après cela , il faut plonger le récipient sous l'eau du tonneau , & ôter du contrepoids H , jusqu'à-ce que le reste se mette derechef parfaitement en équilibre avec le récipient. Ainsi ce que vous aurez ôté marquera le poids de l'air , qui a été tiré hors du récipient. Enfin il faudra tirer tout le récipient hors du tonneau , & l'ayant délivré de l'embarras du cercle D , des lames E , & du bassin F , l'y replonger le goulet devant ; ayant soin que la concavité du robinet C se remplisse d'eau ; puis tournant la clé , on laissera monter l'eau , qui remplira l'espace qu'avoit occupé l'air tiré , & se mettra au dessous de la surface extérieure du tonneau. C'est pourquoi il faut plonger plus bas le récipient , jusqu'à-ce que l'eau vienne par dedans à niveau avec celle de dehors ; autrement l'eau , qui entre dans le récipient , ne sauroit exactement remplir l'espace qu'avoit occupé l'air tiré ; puisqu'elle en seroit empêchée par l'air qui y est resté , qui seroit rarefié , un peu davantage qu'il ne l'est dans son état naturel ; comme savent ceux qui entendent les loix de la vertu élastique de l'air.

L'eau du récipient ainsi de niveau avec celle du tonneau ; on doit tourner la clé du robinet ; puis tirer le récipient hors du tonneau , le bien essuyer par dehors ; le peser , avec l'eau renfermée , dans une balance exacte , proportionnée à ce poids ; & enfin



enfin le peser encore vuide , pour trouver le poids de l'eau qu'on No. XI.  
aura jettée , qu'il faut comparer avec ce qu'on avoit ôté du con-  
trepoids H , pour avoir l'exakte proportion de la pesanteur spé-  
cifique de l'air à celle de l'eau.

On peut objecter, que cette manière de peser l'air n'est pas si  
exakte qu'elle pourroit sembler d'abord, en ce que l'eau du ton-  
neau, résistant beaucoup au balancement du récipient, empêche  
que le trébuchet ne tourne assez librement pour marquer les moindres  
différences des poids, quoique d'ailleurs il ne soit chargé que  
très peu. A cela Mr. BERNOULLI répond, qu'à la vérité, en cet  
état, pour faire perdre l'équilibre au trébuchet, il faut ajouter plus  
de poids au bassin H, qu'il ne faudroit, si ce qui contrepèse à ce  
bassin étoit dans l'air; mais il croit aussi, qu'il ne faut pas tant  
pour vaincre la résistance de l'eau, & pour faire hausser & baisser  
sensiblement le récipient, qu'il faudroit pour vaincre le frottement  
de l'axe, que causeroit la pesanteur d'un tel récipient, si on le pe-  
soit dans l'air, à une balance plus forte & capable de soutenir ce  
poids sans plier: Ainsi cette manière de peser l'air du récipient  
à un trébuchet dans l'eau est toujours plus exakte, que celle de  
le faire dans l'air à une balance plus grossière.

## N°. XII.

PROBLEME PROPOSÉ<sup>1</sup>

Par Mr. BERNOULLI, *Mathématicien de Basle.*

Ayant pris un Arc AB, [Tab. X. b. N°. 12] qui soit une partie aliquo-  
te quelconque de la circonférence; [comme un arc de 30, 45, 60 degrés ou autre] mener de son extrémité B, une ligne BC, sur  
quelque point du Diamètre AD, hors le centre, en sorte qu'on  
puisse démontrer que le segment ACB, est commensurable au  
Cercle.

*Ce Problème est d'autant plus considérable, que s'il étoit une fois ré-*

Jac. Bernoulli Opera.

D d

*solu,*

*Journal  
des Savans  
1685. 16.  
Journal du  
14. Mai p.  
206. Ed de  
Paris, pag.  
262. Ed. de  
Holl.*

No. XII. *solu*, on auroit bientôt la quadrature du Cercle \*.

\* Soit mené le raion BK, & BL le sinus de l'arc AB. Puisque AB est partie aliquote de la circonférence, le secteur AKB est partie aliquote du cercle, & lui est commensurable. Si ACB est aussi commensurable au cercle, le triangle BKC lui est donc commensurable, & le raport de  $\frac{1}{2}BL \times KC$  [ mesure du triangle ] à  $ABD \times$

AK [ mesure du cercle ] est donné. Mais AB étant partie aliquote de la circonférence, le raport de son sinus BL au raion AK est donné. Donc aussi le raport de KC à ABD sera donné. Mais la droite KC seroit donnée, par la résolution du Problème. Donc la demi-circonférence ABD seroit donnée; & partant la Quadrature du Cercle.



No. XIII.

EXAMEN DE LA MANIERE

DE PESER L'AIR DANS UNE VESSIE,

*Envoyé à Mr. l'Abbé DE LA ROQUE,*

*Par Mr. BERNOULLI, Mathématicien  
de Basse,*

*en ces termes.*

*Journal  
des Savans  
1685. 19.  
Journal du  
18. Juin p.  
241. Ed. de  
Paris. pag.  
304. Ed. de  
Holl.*

**A**VANT de vous avoir envoyé cette nouvelle Machine pour peser l'air, dont vous avez fait part au Public dans votre Journal, j'en avois examiné avec soin les manières ordinaires; entr'autres celle de le faire dans une vessie, dont RICCIOLI, Mr. STURM d'Altorf, & plusieurs autres ont fait l'essai, & que Mr. BOYLE même semble vouloir soutenir dans les *Prolegomènes* de ses *Paradoxes hydrostatiques*. Après l'approbation de tant de savans hommes, on sera surpris d'apprendre

dre que , suivant les principes hydrostatiques , une vessie ne doit No. XIII.  
peser ni plus , ni moins , quand elle est enflée , que quand elle  
est vuide , supposé même que l'air ait de la pesanteur.

Il est visible qu'une phiole remplie d'eau ne pèse pas davantage dans le bassin d'une balance , que si cette eau étoit répandue dans le bassin , & que la phiole fût mise auprès : il en est presque de même d'une vessie enflée , dont on exprime l'air ; d'autant qu'à mesure qu'elle se réduit en un moindre volume , elle cède par sa contraction à l'air , qui en sort , autant d'espace qu'il en avoit occupé auparavant dans la vessie , si bien qu'il pèse , avant & après , la même quantité d'air sur le bassin. Et afin qu'on ne s'imagine pas qu'il en soit autrement , lors qu'on a suspendu la vessie au bras de la balance , ou au dessous du bassin , que lors qu'elle est couchée dessus ; figurez-vous , en tout cas , une colonne perpendiculaire d'air , qui renferme en soi cette vessie suspendue , & une autre colonne purement d'air , de pareille hauteur & grosseur , à côté , qui tâche de soulever la première.

Il est constant selon les principes hydrostatiques , que la vessie , quoi qu'elle soit accompagnée de tout le poids de la colonne qui la renferme , ne doit faire baisser le bras de la balance , qu'avec la force qui correspond à l'excès du poids , dont la substance de la vessie surpasse celle d'un égal volume d'air : en sorte qu'il ne faut charger l'autre bras , que d'autant de poids qu'il faut pour contrebalancer ce seul excès ; soit que la vessie soit enflée , ou qu'elle soit vuide d'air : parce que tout l'air de la colonne , tant dehors que dedans la vessie , est empêché de faire son effet : par autant d'air de la colonne qui est à côté.

Pour voir si la raison s'accorderoit avec l'expérience , je pris une vessie de porc , que j'enflai d'air naturel , par le moyen d'un soufflet , plutôt qu'avec la bouche , dont le souffle est rempli de beaucoup de parties aqueuses ; puis laissant le col de la vessie ouvert , pour être assuré , par la communication de l'air enfermé avec l'extérieur , qu'il n'est pas plus comprimé que celui-ci ; j'attachai cette vessie , avec une feuille de papier , au bras d'une balance très exacte , & la pesai. Ensuite j'en exprimai l'air , pre-

No. XIII. nant entre les doigts ce papier, afin qu'il ne restât point de graisse aux doigts, & la repesai encore. Moyennant cela, je trouvai, qu'à la vérité la vessie pesoit deux grains moins qu'elle ne pesoit auparavant; mais cette différence étoit trop petite, pour croire qu'elle marquât le poids de l'air qui en étoit sorti: d'autant que je jugeai, par la comparaison de la capacité de cette vessie à celle d'une phiole de verre dont j'avois pesé l'air, que la vessie en devoit contenir, pour le moins, 14 ou 16 grains. D'où je conclus, que ces deux grains de différence ne procédoient que des exhalaisons, dont le dedans de la vessie est toujours rempli, & qui s'échappent, de compagnie avec l'air, lors qu'on l'exprime; témoin la mauvaise odeur qu'on sent alors, en y approchant le nez. Pour voir encore plus clairement que ce n'étoit pas l'air que j'avois pesé, je remplis la vessie une deuxième fois avec le soufflet; mais bien loin que son poids augmentât par là, je le trouvai diminué encore plus d'un grain; ce que je crois provenir, de ce qu'il se détache toujours, tant par le maniement de la vessie, que par le vent que cause le soufflet, quelques petites parties grasses & volatiles, qui s'évaporent en l'air.

On connoit aisément par ce que je viens de dire, pourquoi ceux qui se servent de cette manière de peser l'air, ont été obligés de lui attribuer beaucoup moins de pesanteur qu'il n'en a en effet; vû que le P. RICCIOLI le fait dix mille fois plus léger que l'eau, & Mr. BOYLE, suivant l'expérience qu'il a faite avec une vessie, est contraint de l'estimer du moins 7500 fois plus léger que l'eau.

Il est donc constant, que ceux qui prétendent peser l'air, dans un Vase, qui ne retient pas, avant & après l'évacuation, la même quantité d'extension, se trompent assurément, sans en excepter même ARISTOTE, qui a été de ce nombre.

No. XIV.

N<sup>o</sup>. XIV.

P R O B L E M E  
P R O P O S E ' P A R  
M<sup>R</sup>. B E R N O U L L I  
*Mathématicien de la Ville de Basle.*

**A** & B jouent avec un dez, à condition que celui qui jette le premier as aura gagné. A joue une fois, puis B une fois ; après A joue deux fois de suite, puis B deux fois, puis A 3 fois de suite, & B aussi 3 fois, &c.

Ou bien, A joue une fois, puis B deux fois de suite, puis A trois fois de suite, puis B quatre fois, &c. jusqu'à ce que l'un d'eux gagne.

On demande la raison de leur sort ?

*Voyez ci-après N<sup>o</sup>. XL.*

*Journal  
des Sca-  
vans 1685.  
25. Jour-  
nal, du 26.  
Août. p.  
314. Ed. de  
Paris. pag.  
406. Ed. de  
Holl.*

N<sup>o</sup>. XV.

E X T R A I T D ' U N E  
L E T T R E  
D E M<sup>r</sup>. B E R N O U L L I.

**M**ONSIEUR BERNOLLI nous écrit de Basle en Suisse, que le Samedi 18 Août dernier, il arriva dans cette Ville une chose assez surprenante. Il y a, dans la cave d'une maison, une source d'eau vive, entourée d'un en-

D d 3

clos

*Journal  
des Sca-  
vans 1685.  
29. Journal  
du 17. Sepr.  
p. 361. Ed.*

No. XIII. clos quarré, de la hauteur de sept piés , & de la largeur d'environ quatre. L'eau est conduite par des tuyaux de bois à une fontaine publique, qui est à quelque cent pas de là , dans le marché aux poissons. Ces tuyaux reçoivent en chemin l'eau d'une autre source qui est plus élevée ; & afin que cette eau , au lieu de couler vers la fontaine , ne regorge vers l'enclos , quand l'eau est basse , & ne passe par l'orifice du tuyau , comme il est souvent arrivé dans les grandes sécheresses , l'homme , qui en a le soin , a accoutumé de boucher cet orifice avec une grosse cheville de chêne : ce qu'il fit aussi , il y a deux mois , que l'eau de la source se trouvoit au dessous de l'orifice : L'ayant voulu déboucher , le jour ci-dessus , parce que l'eau passoit la hauteur de cet orifice d'un bon demi-pié , à peine eut-il frappé deux ou trois fois sur le bouchon , qu'il sauta avec une telle violence , qu'il eût infailliblement tué ce Fontenier , s'il l'eût touché , étant poussé par une flamme de feu , qui sortit en même tems avec un furieux éclat. Cette flamme lui brula les cheveux , les poils de la barbe , & ses habits ; éteignit sa chandele , nagea quelque tems sur l'eau avec sifflement , & remplit tout l'enclos , & toute la cave d'une fumée épaisse , qui pensa le suffoquer , aiant été trouvé à demi-mort , & avec plusieurs marques de brulure au visage , par le Maître du Logis , qui y survint.



No. XVI.



N<sup>o</sup>. XVI.

# EXTRAIT D'UNE LETTRE

DE M<sup>r</sup>. B E R N O U L L I ,*Ecrîte de Bâle à l'Auteur du Journal ,*

concernant

*La manière d'apprendre les Mathématiques aux  
Aveugles.*

**L**A manière dont nous avons dit autrefois que l'on avoit Journal des Sçavans 1685. 31. Journal du 19. Nov. p. 386. Ed. de Par. p. 498. Ed. de Hol. appris à écrire à une fille aveugle de Genève \*, a donné lieu à M<sup>r</sup>. B E R N O U L L I de nous écrire depuis peu là-dessus. Il nous marque, que ce que nous en aprit alors M<sup>r</sup>. S P O N , sur ce qu'on lui en avoit écrit, n'est pas tout à fait le même que ce qui fut exécuté dans cette rencontre. Il est d'autant plus croyable, que c'est lui même, qui enseigna à cette Fille à former les premiers traits de l'écriture. Cependant voici comment il pense qu'il lui seroit aisé de lui montrer & à toute sorte d'autres aveugles, l'Arithmétique, la Géométrie, l'Algèbre, & par conséquent toutes les Mathématiques.

Comme la quantité, qui en est l'objet, est exprimée, dans ces sciences, par des caractères qu'on peut aussi bien apercevoir par l'attouchement que par la vue; il lui seroit faire, dit-il, plusieurs morceaux de bois de la grosseur des Parallelepipedes de N E P E R , afin que le chiffre gravé sur la base de chacun, pût être

\* Mlle. Esther Eliz. DE WALDEIRCH.

tre

**No. XVI.** tre senti & distingué avec les doigts. Ces morceaux de bois seroient gardés en dix laiettes, ou petites cellules, séparées suivant le nombre des chiffres. On auroit, outre cela, un treillis, composé comme les Casses de lettres d'Imprimerie, de plusieurs rangs distingués, ou plusieurs cassetins, qui ne pourroient contenir qu'un seul de ces parallelepipedes : & c'est dans ces cassetins, ou cellules (dont les premières vers la droite signiferoient les nombres simples, les suivantes vers la gauche leurs dizaines, les troisièmes leurs centaines, & ainsi des autres,) que la personne aveugle placeroit chaque chiffre, de même que nous avons accoutumé de les écrire sur du papier.

Pour ce qui est de la Géometrie ; il dit qu'il lui feroit sentir par l'ouverture d'un compas, ou de deux règles jointes par un bout avec une cheville, les différences de tous les angles, & tout ce qui en dépend ; pourvû qu'elle eût d'ailleurs assez de capacité pour le comprendre.

Il ajoute, sur le chapitre de la Demoiselle de Geneve, une chose qui mérite bien de n'être pas oubliée. C'est que sur ce qu'il demandoit quelquefois à cette fille, si elle ne rêvoit point en dormant, comme nous, & s'il ne lui paroissoit point d'images, ou de phantasmes ; elle lui répondit qu'elle ne savoit ce que c'étoit que ces sortes d'images ; mais que quelquefois en dormant, il lui sembloit qu'elle manioit les objets, de même qu'elle faisoit en veillant.



**No. XVII.**

Nº. XVII.

PARALLELISMUS  
RATIOCINII LOGICI  
E T

ALGEBRAICI,

*Quem,*

*Una cum Theſibus Miſcellaneis ,  
Defendendum ſuſcepit.*

Par Fratrum

JACOBUS & JOANNES BERNOULLI,

Ille Præſidis, Hic Reſpondentis  
vices agens.

*Ad diem 9 Septembris Anni M. DC. LXXXV.*

---

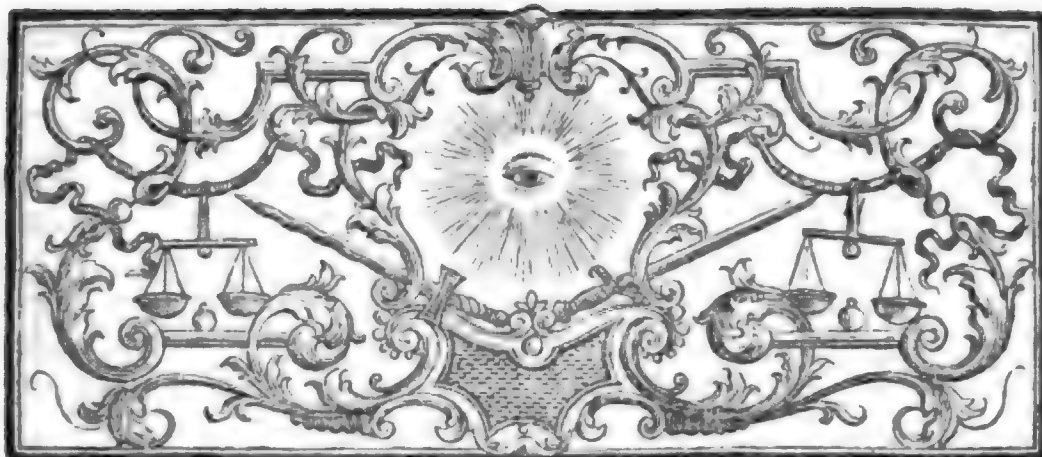
---

Editum primo

B A S I L E Æ

1685.





# PARALLELISMUS RATIOCINII LOGICI ET ALGEBRAICI.

I.



DE Æ rerum, de quibus judicare & ratioci- No. XVII.  
nari docet Logica, Vocibus, quales sunt, *Ho-  
mo, Equus, Petrus*, &c: Ideæ quantitatum,  
quarum proportionem inter se contemplari  
docet Mathesis, Literis Alphabeti, *a, b, c,*  
*x, y, z*, &c. significari solent.

II.

Quoniam enim ideæ mentis, quandoque  
vultu gestibusque, quod mutis ordinarium; & quantitates lineis,  
quod Geometris usitatum est, exprimi solcant; idque naturæ rei  
convenientius sit, attentionemque magis juvet: satius tamen est  
vocibus quam gestibus, literis quam lineis, id fieri; cum hæc signa

E c 3

ut-

No. XVII. utut magis arbitraria, longe clarius, distinctius & expeditius signatum suum repræsentent.

### I I I.

Quoniam autem, in discursu algebraico mediocri, longe major vis mentis requiritur, quam in ratiociniis vulgaribus, etiam difficillimis; hinc ideæ rerum integris quidem vocibus denotari solent: at pro quantitibus singulis unica adhibenda Alphabeti literula; quod ad ideas, quantum fieri potest, in compendium redigendas, atque capacitatem mentis mirifice extendendam, aptissime conducit.

### I V.

Ut cujuslibet rei idea peculiari indigitatur voce, quæ ad illam solam significandam adhibetur; ita quælibet quantitas, in præsentis negotio, peculiari charactere insignitur; quod tamen non impedit, quo minus iste character in alio diversam significet.

### V.

Cum plurium rerum ideæ componuntur, absque vel affirmatione vel negatione, id fit vocula  $\&$ , ut *Virtus & Eruditio*: Cum plurium quantitatum ideæ componuntur, citra comparisonem, id fit signo  $+$ , ut  $a + b$ .

### V I.

Si a conceptu ideæ magis compositæ conceptum minus compositæ auferas, relinquitur prioris differentia; ita, quia in conceptu hominis, præter animalitatem, involvitur rationalitas, sequitur, ablato animalitatis conceptu, relinqui rationalitatem, seu differentiam. Pariter si a quantitate majore subtrahatur minor, relinquitur utriusque differentia; quæ indigitatur signo  $-$ , ut  $a - b$  significat differentiam inter  $a$  &  $b$ .

### V I I.

Cum duæ ideæ, inter quas convenientiam, identitatemve, aut disconvenientiam, vel diversitatem deprehendit mens, affirmantur vel negantur de se invicem, mediantibus particulis *est*, vel *non est*; dicitur *Enunciatio*, ut *Homo est animal*, *Homo non est brutum*.



*tum.* Cum duæ quantitates, inter quas æqualitatem percipit No.XVII. mens, junguntur signo æqualitatis  $=$ , dicitur *Æquatio*, ut  $a = b$ ; at inæqualitatem denotant hæc signa  $<$  &  $>$ , ut  $a < b$ , vel  $a > b$ .

## VIII.

Quoniam hic comparisonem instituimus inter convenientiam duarum rerum, & æqualitatem duarum quantitatum; apprime observanda est diversitas utrinque intercedens, quæ magnam huic negotio lucem affundet. Ut una quantitas dici possit *æqualis* alteri, debet communis mensura, illis eodem vicium numero applicata, utramque exhaurire; ita linea recta decem pedum, & curva pedum toridem dici solent *æquales*, quia pes decies applicatus, vel decempeda utrique semel applicata, eas accurate exhaurit. At ad hoc ut unum dicatur *esse* alterum, sufficit (qui linguarum genius est) si communis quasi mensura juxta posita, vel applicata subjecto & prædicato, deprehendatur exhaurire prædicatum, quamvis non exhauriat subjectum. Ita *transgressio legis* est communis mensura *furti*, & *peccati*, scil. id in quo conveniunt ambo; sed sufficit, ut exhauriat conceptum *peccati*, ad hoc ut possit dici, *Furtum est peccatum*; dummodo idem reperiatur etiam in conceptu furti, quamvis præter id adhuc aliud aliquid sit in hoc conceptu.

## IX.

Ergo, cum convenientia, seu identitas subjecti & prædicati, plerumque sit inadæquata, ita quidem ut totum, quod comprehenditur in conceptu prædicati, comprehendatur quoque in conceptu subjecti, sed non vicissim; hinc fit ut enuntiatio affirmativa converti non possit simpliciter: *Furtum est peccatum*, Ergo *Peccatum est furtum*. Secus atque se res habet in quantitativis æqualibus: cum enim æqualitas sit reciproca, bene sequitur; Si  $a = b$ , Ergo convertim  $b = a$ .

## X.

Observandum autem, cum attributa accidentalia prædicantur de

E c 3

sub-

No. XVII. subiecto, conceptum prædicati non reperiri in natura subiecti : adeoque non tam prædicari debere indefinite de subiecto, quæ tali, quam de inferioribus sub subiecto contentis, iisque vel omnibus, vel quibusdam. Nam si diceremus, *Homo est peccator*, *Homo est doctus*, videmur velle dicere, hominem, quæ hominem, esse peccatorem, & doctum; sive in conceptu hominis includi doctrinam, & peccatum; quod falsum : hinc additis notis universalitatis, aut particularitatis, distribuere solemus subiectum in individua, dicendo, *Omnis homo est peccator*, *Quidam homo est doctus*; Quarum propositionum sensus est, Petrus, Paulus & reliqua individua humana sunt peccato infecta; Aristoteles, Plato, & plures alii sunt docti. Neque enim peccatum & eruditio ingrediuntur conceptum naturæ humanæ, sed tantum individuum,

## X I.

Ergo subiectum enunciationum universalium, & particularium, non tam est illud ipsum, quod expressum est, in natura sua generica consideratum, quam species, & individua sub illo contenta; secus quam indefinitarum : unde quamvis hæ propositiones verissimæ sint : *Omnis homo est peccator*, *Quidam homo est doctus*; istæ tamen, *Homo est peccator*, *Homo est doctus*, in rigore sumptæ non sunt veræ; quia utrobique non est idem subiectum,

## X I I.

Concludimus præterea, enunciationes universales, & particulares, quamvis expressione simplices, sensu tamen complexas, imo & compositas esse; ita quia hæc, *Omnis homo est peccator*, æquivalet huic; *Petrus, &c. qui est homo, est peccator*, includit tum incidentem hanc, *Petrus &c. est homo*; tum principalem istam : *Petrus &c. est peccator*, eaq̃ue ambas copularivas; *Petrus, & Paulus, & Johannes, &c. est homo*; *Petrus, & Paulus, & Johannes, &c. est peccator*.

## X I I I.

In enunciationibus negativis res perinde se habet : Ad hoc  
ut

ut unum dicatur *non esse* alterum, non requiritur, ut nullam No.XVII. habeant communem mensuram, seu nihil in quo convenient; sed saltem ut id in quo convenient non exhaustiat prædicatum, quamvis conceptum subiecti exhaustire quandoque possit; ut, *Homo non est brutum, Animal non est homo*. Hac enim posterior propositio non minus vera est, atque ista; *Animal non est lapis*; propterea quia conceptus hominis non reperitur totaliter in conceptu animalis; etsi pars huius conceptus, nempe animalitas exhaustiat integrum animalis conceptum. Interim hæc falsa foret: *Nullum animal est homo*; quia subiectum huius propositionis non tam est animal, quam species, vel individua, animalis; quorum aliqua homines sunt; adeoque & hæc propositiones sensu complexæ & disjunctivæ sunt. Atque hinc petitur fundamentum conversionis propositionum, indeque natæ diversitatis syllogismorum; de quibus fufius agendi forte brevi dabitur occasio.

## XIV.

Ratiocinatio Syllogistica nititur, ceu fundamento, Regula de Omni & de Nullo, item Regula Proportionis: Ratiocinatio Algebraica axiomatibus: *Quæ uni tertio aequalia sunt, inter se sunt aequalia*; *Quod uno aequalium majus vel minus, altero quoque aequalium majus minusve est*, ut si  $a = b$ , &  $c = b$ , erit etiam  $a = c$ .

## XV.

Omnis diversitas modorum & figurarum provenit a diversimoda extensione & comprehensione subiecti & prædicati, & varietate conversionis propositionum; At quia quantitates, quæ obiectum sunt ratiocinii algebraici, semper adæquate & secundum se totas sumuntur, atque æquatio earum simpliciter convertitur; hinc fit ut ratiocinium, circa illas occupatum, respondeat ex parte syllogismis expositoriis, eademque sit sequelæ necessitas, quomodocunque disponantur termini: Perinde enim est, sive ita colligas:

$a = b$

No. XVII.

$$\begin{array}{c} a = b \quad b = a \quad a = c \quad \bigg| \quad a < b \quad b > a \quad a < b \\ c = a \quad \text{sive } c = a \quad \text{sive } a = c \quad \bigg| \quad \text{Item } c = a \quad \text{sive } c = a \quad \text{sive } a = c \\ \text{Ergo } c = b \quad E. c = b \quad E. c = b \quad \bigg| \quad E. c < b \quad E. c < b \quad E. c < b \end{array}$$

quarum dispositionum prima primæ, secunda secundæ, tertia tertiæ respondet syllogismorum figuræ.

## XVI.

Quia omnis ratiocinatio syllogistica solis recensitis regulis nititur; cum in negotio algebraico, præter allata axiomatica, alia plura in subsidium adhibenda sint, v. gr. *Si aequalibus aequalia addas, ab aequalibus aequalia auferas, aequalia aequalibus multiplices vel divides; tota vel residua sunt aequalia, &c.* quibus nititur varia reductio per additionem, subtractionem, multiplicationem, divisionem, extractionem radicum, &c. hinc fit ut, in reductio-  
ne minimæ æquationis algebraicæ, plus lateat ingenii & iudicii, quam in difficillimis ratiociniis, in communi alias vitæ usu obviis.

## XVII.

Concludimus cum celeberrimo Authore *Scrutini veritatis*, qui Lib. VI. cap. V., ita infit: *Algebra est vera Logica, ad detegendam veritatem, omnemque menti, quanta capax est, extensionem dandam utilis.*

## THESES MISCELLANÆ.

## I.

In tanta Idearum multitudine, ut confusio vitetur, opus est; ut in certas referantur classes; velut Typothetæ solent suos typos in loculamenta: sed parum refert in quot, cum possit Typotheta distinguere loculamenta, vel juxta linguas, vel juxta formas, vel juxta characterum magnitudines, &c.

## II.

Sagacitas mentis in inveniando & apprehendendo, appellatur *Ingenium*; in discernendo & iudicando *Judicium*.

## III. Er-

## III.

No. XVII.

Errores hominum plerumque oriuntur, non tam ex eo quod male ratiocinentur, quam quod male judicent de rebus non evidenter perspectis.

## IV.

Author *Artis cogitandi* male in exemplum proprietatis circuli affert æqualitatem radiorum, cap. 6. Part. 1. cum sit ejus differentia, ut in *Centone* meo, Th. 16. monui.

## V.

Risibilitas est risibilis proprietas.

## V I.

Præcipuus Regularum & Canonum abusus consistit in eo, quod, cum plerumque mille laborent ambiguitatibus terminisque vagis, & obscuris sint concepti, ex illis male intellectis soleamus conclusiones inferre; cum potius ex re perspecta canones deberent explicari. Ita canon iste, *Nihil potest alteri dare quod non habet*, ansam dedit errori, quo sibi persuasit vulgus Philosophorum, ignem non posse calefacere, nisi ipse sit calidus, id est, nisi possideat intra se simile quid illi rei, quam in nobis producit.

## V I I.

Luxuries & prodigalitas, non minus ac avaritia, redolent animum humi defixum & terrenis immersum; quoniam ista in possessione, illa in usu rerum, summum bonum quærit.

## V I I I.

Quare Philosophus nec comessator, nec potator; item nec avarus, nec parcus; sed nec liberalis, nec prodigus esse potest.

## I X.

Avarior est, qui muneribus Judices corrumpit, quam qui non corrumpit.

## X.

Neglectus vestium non semper sordidæ avaritiæ, sed quando-  
*Jac. Bernoulli Opera.* Ff que

No. XVII. que virtutis illi maxime adversæ, nempe contemptus rerum terrenarum, signum est.

## X I.

An si quis in causa filii novercæ judicare possit, nequeat in causa fratris novercæ? Neg.

## X I I.

Circæ saltationes, & choreas mixtas, scrupulus hæret, Si licitæ & honestæ, cur antehac prohibitæ? Si illicitæ & turpes, cur nunc concessæ? Si adiaphoræ, cur a quodam pio Patre definiuntur, Circulus, cujus centrum est Diabolus?

## X I I I.

Multa lectura in illis scientiis, quæ rationis vi addiscuntur, eo solummodo nomine commendanda est, quod per illam nobis innotescat, quid inventum sit, quidque inveniendum restet; ne breve vitæ curriculum, scientiarum promotioni destinatum, impendamus inveniendis illis, quæ alii ante nos invenerunt: quod alias plerumque fit, ubi hac lectura sumus destituti. Ita de PASCALIO refertur, eum adhuc puerum demonstrationem plurimarum EUCLIDIS propositionum proprio Marte adinventisse, priusquam de Mathesi quicquam inaudivisset. Pariter HUGENIUS se primum credidit inventorem novi illius Baroscopii, in *Ephemerid. Erud. Gall.* anni 1672. ad diem 12. Decembr. descripti; cujus tamen constructionem CARTESIUS, recensente alicubi PASCALIO, diu ante tentaturus fuerat. Hoc & mihi (si parva magnis componere fas est) in multis usu venit; præcipue in iis, quæ de angulo contactus, de invenienda Periodo Juliana, de gravitate ætheris &c. meditatus fueram, antequam varias Eruditorum Ephemerides, aliosque libros evolvissem.

## X I V.

Licet autem inventionis gloria iis, qui sic tempore & fortuna posteriores existunt, a primis inventoribus prærepta sit; arte tamen & ingenio hisce neutiquam impares censendi sunt.

XV. Præ-



## X V.

No. XVII.

Præter usum memoratum, nescio quem alium lectura haberet, nisi forte apud illos, qui propria industria & ingenio destituti, ex aliis sapere opus habent.

## X V I.

Omnes Disciplinæ Mathesi indigent; Mathesis nulla; sed per se sola sibi sufficit.

## X V I I.

Qui sibi, Mathesi duce, formavit iudicium, nihil invenit tam arduum, quin dicto citius determinare queat, quid circa illud dici, fieri, aut sciri possit, vel non possit.

## X V I I I.

Quocirca, nullum certius indicium, an ad aliquid arduum suscipiendum quis idoneus sit, quam si rebus mathematicis percipiendis aptus sit: unde juvenus ante omnia Mathesi initianda; ut si inepta deprehensa fuerit, a difficili studio mature removeatur.

## X I X.

Quanto cæteris scientiis præstet, vel ex eo constat, quod cum reliquæ de rebus, in se certissimis ac constantissimis, non nisi probabiliter, illa de rebus maxime fortuitis & casualibus, v. gr. fortitionibus, apodictice & certissimo ratiocinio discurret. Exempla sunt.

## X X.

Sempronius amicos Titium & Caium præmio centum Imperialium mactare vult; jubetque ut de illo æqua sorte certent: quare hi, assumptis singuli 12 nummos, ludunt tribus tessellis, hac conditione, ut si 11 puncta jaciantur, Titius tradat nummum Caio; at si jaciantur 14 puncta, Caius tradat nummum Titio; & ut ille præmium reportaturus sit, qui primum omnes nummos habuerit. Promittit tamen insuper Caius, si perdiderit, centum alios Imperiales de suo erogare collusori, propterea quia deprehensum fuit, sæpius evenire posse 11 quam 14 puncta. Lu-

F f 2

dunt,

No. XVII. dunt, vincit Caius; Titius putat se circumventum esse; rem deferret ad Judicem, qui pronunciare debet, utrum æqua sorte sic contenderint, necne. Quotusquisque nunc Judicium est, qui crederet Caium impostorem? Ego interim, depositis, quando-cunque libuerit centum Imperialibus contra unum, Titii personam sustinebo.

## XXI.

Titius Caiam ducit uxorem; Pater utriusque conjugis; superstes adhuc & opulentus. Titius ita format contractum matrimonialem, ut si nata fuerit ex conjugio proles, uxorque ante maritum vita cesserit, maritus bonorum communium, tam in matrimonium utrinque allatorum, quam hæreditate acquiritorum, auferat duas tertias, utriusque videlicet parente, vel superstite adhuc, vel mortuo: vel, ut dimidiam tollat, si Caiæ pater vita functus fuerit, superstite altero: vel denique, ut tres quartas partes accipiat, reliquam liberi, si suus Pater obierit, superstite vicissim Caiæ parente. Cum autem Parenti Caiæ hic ultimus articulus videretur iniquior; proponit futurus gener, ut absque distinctione casuum, omnia uno includantur articulo, ejus tenoris, ut viduus duas tertias auferat, quicquid futurum sit de conjugum parentibus. Annuit Caiæ Pater. Quæritur utrum contractus matrimonialis, hoc posteriori modo conceptus, sit faventior Caiæ liberis, quam priori, quem initio proposuerat Titius; & quem recusaverat Caiæ Pater? Neg. Nam, si futuræ portiones hæreditariæ Titii, Caiæve, propemodum æquales æstimentur, vocenturque singulæ,  $a$ ; & summa bonorum in matrimonium utrinque allatorum,  $b$ : erit expectatio Titii, juxta primitus propositum articulum,  $(47a + 47b):72$ : at, juxta initum contractum,  $(48a + 48b):72$ ; quæ priore major est  $(a + b):72$ ; nec poterit utraque expectatio æqualis esse, nisi portio hæreditaria Titii plus quam duplo major ponatur portione Caiæ.

## XXII.

Patet hinc, quam J Cto necessaria sit Mathesis. Taceo vulgarem quem illi præbet usum in componendis litibus, circa divisiones agrorum, &c.

XXIII. Ra-

XXIII.

Rationes Professoris MONTAII adversus systema meum Cometicum allatae, & *Ephemeridibus Erudit. Gall.* anni 1682 insertae, nullius sunt pretii. No. XVII.

XXIV.

Etiā Abbas CATELANUS \*\*, circa doctrinam de oscillationibus funependulorum fallitur.

XXV.

Nemo naturam Reflexionis & Refractionis hactenus citra omnem scrupulum explicuit: prioris explicationem inveni nuper, quae mihi plene satisfacit; alteram si quis explicabit, huic habeo gratias.

XXVI.

Sciatherica, atque hinc etiam automata nostra publica motum Solis, bonum horae semiquadrantem, tardius insequi, certissimo mihi constat indicio.

XXVII.

Si quis de admirando flammæ, nuper, hic Basileæ, ex cavitare Siphonis per medias aquas ex improvviso erumpere visæ, phænomeno nobiscum conferre voluerit; inveniet nos paratos. ††

\*\* Vide supra Nos. VIII. IX. X.

†† Vide supra Num. XV.

\* Ad Thefm XX. Vide *Artem Conjectandi*, Part. I. Probl. 5.

† Ad XXI. Problema generalius propositum vide N°. seq. pag. 236, 237. Solutionis ratio hæc est. Sit summa bonorum in matrimonium utrinque allatorum =  $b$ ; portio hereditaria Titii =  $a$ , Caiæ =  $c$ ; numerus casuum quibus accidit Caiam ante Patres mori =  $m$ ; quibus accidit primum mori Titii patrem =  $n$ ; patrem Caiæ =  $p$ . Ergo probabilitas ejus eventus quo Caiā ante senes moritur, erit =  $\frac{m}{m+n+p}$ ; ejus quo Caiā utrique su-

perstes est =  $\frac{n}{m+n+p} \times \frac{p}{m+p} + \frac{p}{m+n+p} \times \frac{n}{m+n}$ ; illius, quo Caiā patri suo, non patri Titii superest =  $\frac{p}{m+n+p} \times \frac{m}{m+n}$ ; ejus denique quo non suo, sed patri Titii, superest =  $\frac{n}{m+n+p} \times \frac{m}{m+p}$ .

Jam autem, secundum propositos articulos, primus casus Titio dat  $\frac{2}{3}b$ ; secundus  $\frac{2}{3}b + \frac{2}{3}a + \frac{2}{3}c$ ; tertius  $\frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c$ ; quartus  $\frac{1}{3}b + \frac{1}{3}a$ . Ejus itaque expectatio

E f 3

No. XVII.

$$\begin{aligned} \text{pectatio est } & \frac{m}{m+n+p} \times \frac{2}{3}b + \\ & \left( \frac{np}{(m+n+p)(m+p)} + \frac{np}{(m+n+p)(m+n)} \right) \\ & \times \left( \frac{2}{3}b + \frac{2}{3}a + \frac{2}{3}c \right) + \frac{mp}{(m+n+p)(m+n)} \\ & \times \left( \frac{2}{3}b + \frac{2}{3}c \right) + \frac{mn}{(m+n+p)(m+p)} \\ & \times \left( \frac{2}{3}b + \frac{2}{3}a \right) = ((8m^3 + 17m^2n + 14m^2p + 9mn^2 + 24mnp + 6mpp + 8n^2p + 8np^2)b + (9m^2n + 9mn^2 + 16mnp + 8n^2p + 8np^2)a + (6m^2p + 16mnp + 6mpp + 8n^2p + 8np^2)c) : 12(m+n+p)(m+n)(m+p). \end{aligned}$$

Sed, juxta contractum initum, primus casus & secundus Titio dant, ut supra, ille  $\frac{2}{3}b$ , iste  $\frac{2}{3}b + \frac{2}{3}a + \frac{2}{3}c$ ; at tertius dabit  $\frac{2}{3}b + \frac{2}{3}c$ , quartus  $\frac{2}{3}b + \frac{2}{3}a$ .

$$\begin{aligned} \text{Igitur expectatio Titii erit } & \frac{m}{m+n+p} \\ & \times \frac{2}{3}b + \left( \frac{np}{(m+n+p)(m+p)} + \right. \\ & \left. \frac{np}{(m+n+p)(m+n)} \right) \times \left( \frac{2}{3}b + \frac{2}{3}a + \frac{2}{3}c \right) \\ & + \frac{mp}{(m+n+p)(m+n)} \times \left( \frac{2}{3}b + \frac{2}{3}c \right) \\ & + \frac{mn}{(m+n+p)(m+p)} \times \left( \frac{2}{3}b + \frac{2}{3}a \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & ((8m^3 + 16m^2n + 16m^2p + 24mnp + 8mn^2 + 8mp^2 + 8n^2p + 8np^2)b + (8m^2n + 8mn^2 + 16mnp + 8n^2p + 8np^2)a + (8m^2p + 16mnp + 8mp^2 + 8n^2p + 8np^2)c) : 12(m+n+p)(m+n)(m+p). \end{aligned}$$

Expectationum itaque differentia est  $((-m^2n - mn^2 + 2m^2p + 2mp^2)b - (m^2n + mn^2)a + 2(m^2p + mp^2)c) : 12(m+n+p)(m+n)(m+p)$ .

Hinc, si, ut in No. praesenti, fiat  $a=c$ , &  $m=n=p=1$ ; erit expectatio prior  $= (94b + 50a + 44c) : 12.3.2.2 = 47(b+a) : 72$ , posterior  $(96a + 48a + 48c) : 12.3.2.2 = 48(b+a) : 72$ ; differentia  $(2b - 2a + 4c) : 12.3.2.2 = (b+a) : 72$ .

Si velis aequalem esse utramque expectationem; fac differentiam  $(2b - 2a + 4c) : 12.3.2.2 = 0$ , habebisque  $a - 2c = b$ ; hoc est  $a > 2c$ .

At si ponas, ut in No. sequenti,  $a=c$ , sed  $m=1, n=p=2$ ; invienes expectationem priorem  $= (354b + 246a + 228c) : 12.5.3.3 = (59b + 79a) : 90$ ; posteriorem  $= (360b + 240a + 240c) : 12.5.3.3 = (60b + 80a) : 90$ ; differentiam  $(a+b) : 90$ .



No. XVIII.

Nº. XVIII.  
THESES LOGICÆ  
DE  
CONVERSIONE  
ET  
OPPOSITIONE  
ENUNCIATIONUM,  
*Quas,*

CUM ADNEXIS MISCELLANEIS,

*Ad diem 12 Februarii Ann. M. DC. LXXXVI,*

Tertii Speciminis publici loco

Cl. Competitoribus ventilandas ficit  
JACOBUS BERNOULLI, L. A. M.

---

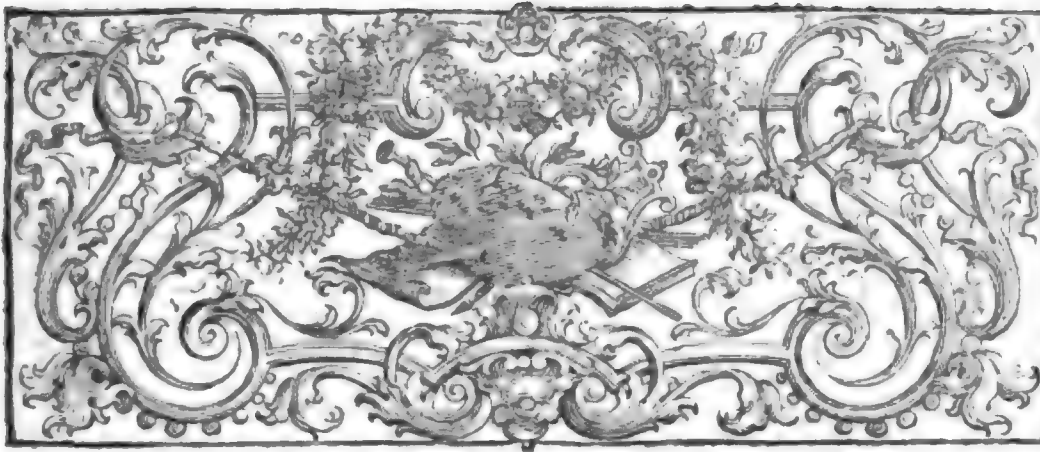
Editæ primum

BASILEÆ

1686.





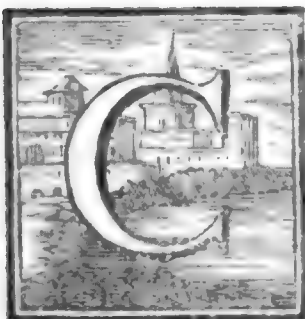


# THESES LOGICÆ

DE

## CONVERSIONE & OPPOSITIONE ENUNCIATIONUM.

### I.



*CONVERSIO & Oppositio* Enunciationum sunt affectiones earum relatæ, quibus partes alicujus propositionis varie immutantur. Num. XVIII.

### II.

*Conversio* transponit subjectum in locum prædicati, & vicissim: *Oppositio* utrumque suo relinquit loco.

### III.

In *illa* salva manere debet veritas utriusque Propositionis, & convertendæ & conversæ: in *Hâc* minime.

### IV.

*Ibi* enim explicatur, quibus legibus, quantitas & qualitas Enun-  
Jac. Bernoulli Opera. G g      nun-

N.XVIII. nunciationis immutanda veniat, eo fine, ut conversâ necessario vera maneat: *Hic* exponitur, quid fiat de veritate & falsitate aliqujus Propositionis, ubi secundum quantitatem & qualitatem modis omnibus immutatur.

## V.

Quæ ut manifesta fiant, requiritur duntaxat, ut naturam Enunciationum tam affirmantium, quam negantium propius intueamur, prout eam in nupero nostro *Parallelismo* quadantenus excussimus.

## VI.

Ea est Propositionis Affirmantis natura, ut attributum uniat cum subiecto, non quidem quoad omnem attributi *Extensionem*, sed tamen quoad ejus omnem *Comprehensionem*: quod ibidem innuimus, quando diximus, communem mensuram subiecti & prædicati exhaurire debere totum prædicatum; analogia petita a quantitativibus æqualibus, quas eadem communis mensura metitur. Sensus est: omne id, quod *comprehenditur* in idea prædicati, reperiri debet in subiecto; non item omne id, ad quod *extenditur* prædicatum. Cum enim istud subiecto plerumque latius sit, ejus extensio restricta esse intelligitur per extensionem subiecti, adeo ut non nisi eam extensionis suæ partem significet, quæ subiecto competit. Ex. gr. cum dico: *Rhombus est Parallelogrammum*, innuere volo, totam ideam Parallelogrammi comprehensam esse in idea Rhombi (quoniam destructa unica ideæ hujus parte, Parallelogrammum exuet naturam suam, & cessat esse Parallelogrammum); &, quanquam illa idea extendatur quoque ad alias figuras præter Rhombos, me tamen illam nunc in sola Rhombi specie considerare.

## VII.

Negantis contra Propositionis genius est, ut attributum a subiecto separet, quoad omnem attributi *Extensionem*, non autem præcise quoad totam ejus *Comprehensionem*; quod in *Parallelismo* nostro significavimus, dicendo, communem mensuram subiecti & prædicati non exhaurire debere totum prædicatum, tametsi con-

conceptum subiecti exhaustire quandoque possit. Sensus est: Idea N. XVIII. totalis prædicati non debet reperiri in subiecto, utut ejus partes aliquæ subiecto competere possint; adeoque omne id, ad quod idea totalis attributi *extenditur*, a subiecto excludi necessum est. Ex. gr. Cum dico; *Rhombus non est Parallelogrammum rectangulum*, non significo subiectum & prædicatum nihil habere commune, (conveniunt enim in eo, quod ambo sint *Quadrangula*, ambo *Parallelogramma*,) sed ideam totalem *Parallelogrammi rectanguli* non comprehendi in idea Rhombi, & proinde omnes quoque species in extensione ideæ totalis contentas, nempe Quadratum, & Oblongum, de Rhombo negandas esse.

## VIII.

Patet hinc, attributum omnis Propositionis affirmantis, vi affirmationis, sumi peculiariter; negantis, universaliter.

## IX.

Ex hætenus dictis, si angustia chartæ nobis permitteret esse prolixiores, facile deinceps reddi posset ratio, cur Universalis affirmans converti tantum queat *per accidens*; Universalis negans & Particularis affirmans *simpliciter*; Particularis autem negans converti nequeat omnino.

## X.

Id in universum verum est, affirmantem non posse converti in negantem, neque negantem in affirmantem; ex eo enim quod duarum rerum ideæ quoad se totas, vel quoad partem, inter se conveniunt, non sequitur, illas secundum se totas, vel secundum partem aliam disconvenire. De Conversione *per contrapositionem*; ubi non manent iidem utrobique termini, sermo hic nobis non est.

## XI.

Quod *Oppositionem* Enunciationum spectat, non est ut illi immoremur; satis enim attendenti manifestum est, *Contrarias* simul posse esse falsas, non veras: *Subcontrarias* vice versa posse simul esse veras, non falsas: *Utriusque generis* interdum unam veram

G g 2

esse,

N.XVIII. esse, alteram falsam : *Contradictoriarum* autem alteram semper veram esse, alteram falsam.

## XII.

*Contrariarum & Subcontrariarum* una vera, altera falsa est; quando vel de specie prædicatur genus, differentia, proprium secundi aut quarti modi; vel accidens quoddam inseparabile, de subiecto; vel etiam quando opposita de se invicem prædicantur: *Illarum* utraque falsa, & *Harum* utraque vera est, quando species prædicatur de genere, vel accidens separabile, de subiecto, &c.

## XIII.

Occasione ejus, quod de *Contradictoriis* monuimus, coronidis loco Lectori monstrabimus, quo pacto verum quandoque ex falso directe elici possit. Ex vera propositione, directo & legitimo ratiocinio, non nisi vera inferri potest. Ex falsa propositione elicitur quidem plerumque falsa conclusio (quo referendæ sunt Geometrarum ἀπαγωγὰς, seu deductiones ad absurdum, quibus assumpta falsa assertionem adversarii devenitur tandem ad propositionem aliquam notorie falsam, ut, partem esse æqualem toti, aut ad similes absurditates;) sed quandoque etiam propositionis falsæ, initio assumptæ, contradictoria, adeoque vera. Ita EUCLIDES *Lib. IX. prop. 12.* ex eo, quod E dicatur non metiri ipsum A, directa & legitima consequentia infert, Ergo E metitur ipsum A. Sic THEODOSIUS *Lib. I. prop. 12. Sphæric.* ex eo, quod G dicatur non esse centrum Sphære, evidenti sequela deducit, Ergo G est sphaera centrum. Atqui hic demonstrandi modus mirabilis valde & peringeniosus est, quo ex contradictorio assertionis assertio ipsa directa demonstratione infertur. Quod vero æque scientificus sit, nec minorem pariat certitudinem, ac reliqui, sic demonstrari poterit. Adversarius contradictoriam assertionis meæ, aut falsam putat esse, aut veram: Si concedat esse falsam, eo ipso assertionem meam veram esse agnoscere debet; sin contra putet esse veram, oportet, ut omne id, quod exinde legitima infero consequentia, adeoque (per hypothesein) ipsam meam assertionem quoque veram agnoscat, & consequenter ut utrumque con-

tradicto-

tradiſtoriorum fateatur eſſe verum; quod cum ſit abſurdum, N.XVIII. evidenter ſequitur, contradiſtoriam aſſertionis meæ, ex qua fluxit hoc abſurdum, falſam eſſe, adeoque aſſertionem ipſam, quæ illata fuerat, veram. Q. E. D.

## XIV.

Unde formari poſſet hoc Paradoxum: Ex falſo nonnunquam ſequitur verum, & tamen ſemper abſurdum.

## THESES MISCELLANÆ.

## I.

*Differentia*, quæ conſtituit tertium prædicabile logicum, eſt illud quod, præter genus, primo in qualibet re concipio, quodque proin nulla opus habet demonſtratione: at *Proprium* eſt, quod ex natura rei ſic conceptæ demum fluere intelligo, per præviam demonſtrationem.

## II.

Quare unum idemque, pro vario reſpectu, ejuſdem rei nunc differentia poteſt eſſe, nunc proprium; prout videlicet vel hoc, vel illud, primo inibi concipio. Ita ſi *Parabolam* conſiderem, ceu *Figuram* ex cono ſectam, ſectione parallela lateri oppoſito; iſta ſectio erit *Differentia Parabolæ*: e qua deinceps fluit hæc *Proprietas*, quod axis ſegmenta ſint inter ſe, ut quadrata ordinatim applicatarum. Sin viciffim *Parabolam* contempler, ceu *Figuram* in plano projectam, cujuſ ſegmenta axis ſint in duplicata ratione ordinatim applicatarum, attributum hoc erit *Differentia*; poſſe autem talem figuram ſecari ex cono, hoc erit ejus *Proprium*.

## III.

*Locutiones forenſes*, quæ fundantur in imputatione; ut cum Sponſor ſolvit, & Debitor ſolviſſe dicitur, vel cum Filius adoptivus dicitur Filius: Item *Locutiones ſecundum apparentiam, aut opinionem vulgi*, quæ fundantur in ſenſuum teſtimonio; ut ſi Co-

N.XVIII. pernicanus quis diceret, Sol movetur, volens dicere, Terra movetur; aut cum Poeta canit, *Terraque, urbesque recedunt*, dicturus, navigantes recedere: Hæ, inquam, Locutiones & similes, si ad aliquod receptum Troporum genus referendæ sunt, ad Metaphoram referuntur.

## I V.

Ad quæstionem, *Utrum Monarchia præferenda sit Aristocratia?* cum distinctione videtur respondendum: Si illi, penes quos suprema est potestas, in utroque regimine sunt boni, Illa Huic; si mali, Hæc Illi præferenda erit: propterea, quoniam Princeps majoribus viribus opibusque pollet, tum ad salutem populi procurandam, si bonus est; tum ad tyrannidem exercendam, si malus, quam Magistratus in Republica, cujus reditus sunt modici, potestas, partim in se limitior, partim adversarum factionum obice impedita.

## V.

Omnis Democratia, nisi Anarchia sit, Aristocratia esse debet.

## V I.

Ubi proprii emolumenti aviditas, & partium studium in Rempublicam irrepsit; satius est, vacantia munia publica sorte, quam suffragiis redintegrari. Quanquam autem hoc optandum sit, ob id ipsum tamen, quia lues illa irrepsit, sperandum vix est.

## V I I.

De bonitate vel malitia alicujus facinoris, plerumque ab eventu, qui perversus hominum mos est, judicare solent. Si subditi armis sua jura tueri velint, sinistroque fruantur successu, audient seditiosi & rebelles; si prospero, erunt assertores libertatis, propugnatores fidei, &c.

## V I I I.

Regulæ accrescendi & decrescendi, quas in Testamentorum executione præscribunt Jurisconsulti, similes sunt *Regula* Arithmeticæ, quam *Pigri* vocant, in illorum inventæ gratiam, qui Abacum Pythagoricum memoriæ imprimere, vel nolunt, vel nequeunt.

## I X. Ad



## IX.

N. XVIII.

Ad reddendam causam phænomeni naturalis, non sufficit talem exhibere, ex qua quomodocunque sequatur effectus; sed requiritur, ut ex illa effectus præcise ea, qua conspicitur, quantitate sequatur: Ita ad explicandam Reflexionis naturam, non sufficit ostendisse, cur corpus, offendens firmum obicem, reflectatur quomodocunque; fieri namque posset, ut causa quæ sic afferatur, si revocaretur ad calculum, exhiberet angulum reflexionis inæqualem angulo incidentiæ: Id quod indicium præberet, non imperfecte, sed omnino falso explicatam esse.

## X.

Quare Physicus, absque Matheseos ope, suarum assertionum nunquam certus esse potest; nec Mathesis, ob maiorem saltem perfectionis gradum, sed absolute, ad Physicam necessaria est.

## XI.

Disciplinæ Mathematicæ concretæ, quales sunt, Physica, Medicina, Astronomia, Optica, Statica, Balistica (& si vis Astrologia) &c. Mathesi abstractæ certa tantum principia, ceu fundamenta, superaddunt, partim alibi probata, partim sola experientia hausta, super quibus deinceps non minus in rigore geometrico ratiocinandum, atque in Mathesi abstracta super notionibus communibus, ceu Axiomatibus nobiscum natis: Ita Physica supponit *Leges motus*: Medicina *Fabricam corporis humani*: Astronomia *Fabricam, seu Systema mundi*: Astrologia *influxum Astrorum in sublunaria, & quod Fata hominum, urbium, regionum, dependant ab illa cæli configuratione, quam obtinuit, cum in lucem ederentur, vel primordiasumerent*: Catoptrica, *Quod anguli incidentiæ, & reflexionis sint æquales*: Dioptrica, *Quod Sinus angulorum incidentiæ & refractionis sint proportionales*: Statica, *Quod momenta crescant pro ratione distantiarum ab hypomochlio*: Balistica, *Quod spatia a gravi cadente percurfa sint in ratione duplicata temporum*.

## XII.

Patet hinc, certitudinem harum scientiarum unice dependere a certi-

N. XVIII. certitudine ipforummet principiorum, non a modo formandi conclusiones, quæ omnes evidentissimo ratiocinio ex principiis deduci debent. Quæ ratio est, cur Mathesis abstracta sit invictæ certitudinis; Astrologia vana & inutilis; Cæteræ vero, mediæ certitudinis inter utramque: quoniam talia sunt principia, quibus illæ superstructæ sunt.

## XIII.

Patet etiam, ad quascunque scientias quæ quantitatem pro objecto habent, addiscendas, paucorum principiorum prærequiri cognitionem, ex quibus, qui Mathesin abstractam callet, reliqua proprio Marte & exiguo labore adinvenire & eruere potis est.

## XIV.

Motum Projectorum, non tantum seclusa, sed etiam posita consideratione resistentis medii, fieri deprehendo in curva parabolica, contra assertum WALLISII, *Cap. X. Prop. 8. Mechan.*

## XV.

Pulex insultum faciens in Terræ globum, illum loco dimovere valet; contra quartam Regulam motus *Cartesianam*.

## XVI.

Non datur Centrum magnitudinis, sicut Centrum gravitatis.

## XVII.

Fieri potest revera, & citra verborum lusum, ut globus perfecte rotundus super perfecte lavigato plano declivi in superficie Terræ constitutus, non descendat rotando.

## XVIII.

Liquor homogeneous in ambobus siphonis cruribus, sive ea sint æqualis, sive inæqualis crassitiei, propterea ad eandem se componit altitudinem, quia tum demum commune gravitatis centrum utriusque liquoris infimum, quem potest, locum occupat.

## XIX.

Non dantur Puncta, Lineæ, Superficies physicæ, sed mathematicæ.

XX. Per

## X X.

N.XVIII.

Per vulgarem Regulam alligationis, certus tantum & determinatus invenitur solutionum numerus; animadverto autem ejusdem quæstionis (saltem ubi plusquam duo miscibilia miscenda sunt,) infinitas dicto citius, & quidem in meris integris, reperiri posse solutiones: Dico enim, si binæ differentiæ alternæ æque multiplicentur juxta quemvis numerum, & binæ aliæ juxta alium numerum, & ita porro; quod hi æque multiplices exhibituri sunt novam rationem, qua mixtio optata perfici poterit.

## X X I.

In *Stereometria* G. F. M. *Propp.* IX. XI. XX. male mensurantur Pyramides & Coni decurtati, (quales sunt vasa illa vinaria, quæ nostrates vocant *Bockten*,) reducendo illos per æquationem basium ad Prismata & Cylindros. Quam enim ille reperit truncatæ pyramidis soliditatem 312 pedum, revera duntaxat est pedum 304. Differentia satis sensibilis, quæ toleranda non est.

## X X I I.

Nec doliorum capacitas (etiãsi perfecte cylindrica forent) virga visoria cubica hic usitata accurate exploratur.

## X X I I I.

Species visibiles ex omnibus punctis in omnia radiare; & Animam esse totam in toto, & totam in qualibet parte: Mysteria sunt antiquæ Philosophiæ, nostrum hoc tempore captum superantia.

## X X I V.

Cæcus quandoque melius de coloribus judicat vidente.

## X X V.

Modum docendi Cæcum scribere, qui in *Magia naturali*, seu *Jocoscriis natura & artis*, *Centur.* 3. *Prop.* 22. ex CARDANO lib. 17. *Subtil.* depromptus legitur, in praxi non succedere, tum ratio, tum experientia me docuerunt. Feliciorẽ inivi antehac viam cum lectissima Virgine E. E. a W.

*Jac. Bernoulli Opera.*

H h

XXVI. Ocu-

## N. XVIII.

Oculorum suffusio non provenit ab opaca humoris crystallini pellicula, ut existimat ROHOLTUS *Part. pr. Cap. ult.* sed a sedimento in ipso humore aqueo collecto.

## XXVI.

## XXVII.

Cuspidem enim acus, qua sedimentum removetur, non solum non attingere humorem crystallinum, docet experientia: sed & extra humoris crystallini focum constitutum esse, colligitur ex eo, quod cuspis, durante operatione, a patiente oculo distincte videatur. Cur vero inversa apparere debeat, ejus quidem rei causam nondum satis assequor.

## XXVIII.

Eo momento, quo ambo oculi conjunctim objectum inspiciunt, uterque separatim peculiare inspicit.

## XXIX.

Ex unica observatione umbræ, de stylo normaliter infixæ quovis tempore projectæ, declinationem Plani quomodolibet inclinati investigare licet. \*

## XXX.

Invenienda sit analytice universalis Regula, quæ exhibeat, quo anni tempore, sub data Poli elevatione, contingant maxima & minima crepuscula? †

## XXXI.

Solutio Problematis de Pactis dotilibus nuperi mei *Parallelismi* Adnexis inserta, supponebat, æque facile accidere posse, ut Senes Caiæ supervivant, ac Caiæ senibus. At quoniam probabilius est, Caiam ut juvenulam Senibus supervicturam; hinc excessus, quo expectatio Titii, juxta articulum initio propositum, superatur ab ejus expectatione, juxta articulum correctum, revera quidem minuitur; attamen hæc perpetuo superat illam, quantacunque ponatur etiam probabilitas pro vita diuturniore Caiæ: quod generali comparatione ostendere facile esset. Unicum tantum monco: Si duplo probabilius sit, Caiam supervicturam Seni,

\* Videatur Numerus. XXXVI.

† Vid. Numerus. LIII.

ni, quam Senem Caiæ, prior expectatio Titii erit  $(79a + 59b) : N.XVIII.$   
 $90$ ; posterior  $(80a + 60b) : 90$ ; quarum differentia  $(a + b) : 90$ .  
 Unde patet ad habendas veras Titii expectationes, requiri ut præ-  
 cise determinetur, quanto probabilius sit, Caiam alterutri Seni  
 supervicturam. Quanquam autem id determinatu videri posset  
 omnino impossibile, erui tamen quodammodo potest, insperato  
 calculo, ex observationibus factis super catalogis demortuorum,  
 quales *Parisiis & Londini* menstruatim & hebdomadatim distribui  
 solent. Observatum fuit ex collatione plurium istiusmodi cata-  
 logorum (ut narrant *Ephem. Erud. Gall.* Ann. 1666. N<sup>o</sup>. XXXI.)  
 quod ex centum infantibus eodem tempore natis, elapso sexcen-  
 nio, superstites remaneant 64 : elapsis annis XVI, 40 : annis  
 XXVI, 25 : annis XXXVI, 16 : annis XLVI, 10 : annis  
 LVI, 6 : annis LXVI, 3 : annis LXXVI, 1 : annis LXXXVI, 0.  
 Quo posito, & subducto calculo, deprehendo, contra 59 ca-  
 sus, qui juvenulam annos XVI egressam, ante Senem LVI  
 annorum, vita privant, non nisi 101 casus esse, quibus accidit  
 contrarium; unde colligo non plane duplo probabilius esse, ut  
 juvenula Seni supervivat, quam ut hic illi; adeoque expecta-  
 tionem Titii, juxta inita pacta, superare eam, quam habuisset  
 juxta primitus propositum articulum, quantitate omnino majore.  
 quam est  $(a + b) : 90$ .

## XXXII.

Coronidis loco placet hic adjungere, quæ circa ludum pilæ re-  
 ticularis, a nemine hætenus observata, minime vulgari calculo  
 reperi :

I. Si quatuor, verbi gratia, lusibus constare debeat victoria;  
 duoque Collusores A & B æqualium sint virium; A evicerit jam  
 tres lus, & B duos; A poterit deponere 3 imperiales contra  
 1: Si A tres lus & B unum; deponet A 7 contra 1: Si A tres lu-  
 sus, & B nullum; deponet A 15 contra 1: &c. Si A duos lus & B  
 unum, deponet A 11 contra 5: &c. Si A tres lus, & præte-  
 rea puncta quindecim, B vero duos lus & puncta 45; de-  
 ponet A 9 contra 7: &c. Atque hac ratione construxi Tabel-

H h 2

lam

N.XVIII. iam ad singulos casus, qui accidere possunt inter collusores pares:

II. At si Collusorum unus altero sit peritior, danda est imperitiori prærogativa aliquot numerorum, ut æquo Marte certetur: Reperio autem, Si A duplo peritior sit; illum Collusori concedere posse puncta 30, (& quidem cum aliquali adhuc lucro pro se; ) Sin triplo; illi concedere posse minus quam 45, sed multo plus quam 30; adeoque ad æquandam, quantum fieri poterit, sortem, dare debere ipsi B 45, sumendo sibi 15: &c.

III. Quod si A concedat ipsi B prærogativam aliquot punctorum, eoque ipso fors æquata supponatur; atque vicissim indagandum sit, quanto ille hoc peritior sit: animadverto, subducto calculo, peritias Collusorum esse incommensurabiles inter se, id est, veram illorum rationem nullo numero posse exprimi, tametsi id fieri prope verum possit. Ita si A concedit ipsi B semi-quindecim; erit ipso peritior  $1\frac{1}{15}$ : Si quindecim; erit peritior  $1\frac{1}{15}$ : si semi-triginta; superabit ejus peritiam  $1\frac{1}{3}$ : si triginta; erit agilior ipso  $1\frac{2}{15}$ : si semi-quadraginta-quinque  $2\frac{1}{3}$ : si quadraginta-quinque;  $4\frac{1}{3}$  vicibus circiter; &c.

IV. A concedit ipsi B semi-triginta, & ipsi C 45: Quantum concedere potest B ipsi C? Resp. Semi-quadraginta-quinque.

V. A concedit ipsi B semi-triginta, & B ipsi C semi-quadraginta-quinque. Quantum concedet A ipsi C? Resp. Quadraginta-quinque.

VI. Si agilitates trium Collusorum A, B, C, separatim spectatorum sint in ratione 3, 2, 1; ludatque A contra B & C, illis concedere potest paulo plus quam triginta.

VII. Si agilitates quatuor Collusorum A, B, C, D, separatim spectatorum habeant se, ut 1, 5, 2, 3, ludantque conjunctim A & B contra C & D: hi illis concedere fere possunt semi-quindecim.

VIII. Si A possit concedere B 45 puncta; malit autem largiri prærogativam in lusibus integris, quam in punctis; queritur, quot integros lusus ipsi concedere debeat? Resp. Non pauciores quam 35 ex lusibus 36.

FINIS.

*Videatur de hisce Calculis Epistola Auctoris Gallice scripta & ad calcem Artis conjectandi edita.*



Nº. XIX.

DNI. B E R N O U L L I  
 DUBIUM CIRCA CAUSAM GRAVITATIS  
 a rotatione Vorticis Terreni  
 petitam,

*Communicatum in litteris Lipsiam missis ad . . . .*

CONSULEBAM antehac per litteras Cl. STURMIUM Acta Erud.  
Lips. 1686.  
Febr. p. 94.  
 Professore Altorsinum, super quædam non exigui mo-  
 menti dubia physica. Palmarium eorum, quod me sem-  
 per torserat, & torquet etiamnum, spectabat explicationem me-  
 chanicam causæ gravitatis a Terreni Vorticis gyratione petitam.  
 Respondebat paulo post perhumaniter & ingeniose Eruditus Vir;  
 non ita tamen, ut pertinacius hærentem scrupulum prorsus exe-  
 merit. Quare secunda vice ejus lacerivi oraculum, alteris ad  
 ipsum datis litteris, quas frustra expectato diu resposito, ad ma-  
 nus ejus pervenisse subdubito. Ille interim, quæ privatim inter  
 nos acta fuerant, impertivit publico, insertis, cum Dubio meo,  
 tum sua ad illud Responsione, paragrapho XXIII. Epistolæ  
 suæ ad Henricum MORUM exaratae, annexæque secundæ parti  
 Collegii Curiosî, quod non ita pridem publicum aspicere passus  
 est. Id cum vidissem, judicabam haud ægre laturum Virum Ce-  
 leberrimum, si & instantiam meam publici juris fieri pateret:  
 ut si vel ille, vel quispiam alius nodum solveret, ei haberent  
 omnes mecum naturæ Curiosî gratias. Dubium autem meum  
 primitus propositum sic habebat. „ Inter varias Doctorum opinio-  
 nes, illa mihi maxime videtur plausibilis, quæ gravitatem cor-

H h 3

pu

No. XIX. „ porum terrestrium derivat a gyratione materiæ Terram ambi-  
 „ tis, ejusque conatu recedendi ab ejus centro. Vereor tamen, ne  
 „ non & hæc cum Mechanicæ legibus accurate satis conspiret :  
 „ Posita enim hac hypothese, certum esse puto, corpora gra-  
 „ via secundum illam lineam detrusum iri, secundum quam ma-  
 „ teria subtilis a Terra recederet : recedere conatur autem quæ-  
 „ libet particula, ( qui genius est rotationis ) secundum li-  
 „ neam talem, quæ in eodem jacet plano cum circulo per  
 „ rotationem particulæ descripto, idest, secundum lineam pa-  
 „ rallelam Æquatori. Ita dum punctum A ( *Vide Fig. 1.* )  
 „ circa punctum B motu diurno describit parallelum AC, acqui-  
 „ rit conatum recedendi secundum lineam AD in eodem plano  
 „ jacentem cum AC, parallelamque Æquatori FE. Quare neces-  
 „ sum omnino esset, ut corpora gravia vicissim per lineam DA  
 „ repelleret, non vero per perpendicularem GA; sicque sub no-  
 „ stra latitudine gravium lapsus a perpendiculo ad horizontem in-  
 „ clinaret 48 gradibus, augereturque subinde cum sphaeræ obliqui-  
 „ tate. “ Ad quæ ille respondit sequentia : „ Quod naturam spectat  
 „ gravitatis, in eo primum inter nos convenit, quod non alia  
 „ plausibilior videatur, aptiorque explicandæ rei difficillimæ hypo-  
 „ thesis ea, quæ gravitatem corporum terrestrium derivat a gyra-  
 „ tione materiæ Terram ambientis, ejusque conatu recedendi *ab*  
 „ *ejus centro*, quæque, si verbis hisce, quibus eam recte con-  
 „ cepisti, firmiter inhæreas, ea quam deinceps adjungis, difficulta-  
 „ te nihil urgetur, ut pote quæ supponit conatum recedendi  
 „ non a centro Terræ, sed a centro circuli Æquatori paralle-  
 „ li, quo posito, necessum est illud *ἀπορρον* sequi quod tu in-  
 „ fers, quodque idem *Hobbiana* hypothese pluribus objicit *Hen-*  
 „ *ricus MORUS*, *Enchiridii* sui *Metaphysici* pag. 115. seqq.  
 „ ( Edit. prioris ). Enimvero, cum ista ætheris circa Terram sup-  
 „ posita gyratio, vorticesque mundani omnes, ad explicanda  
 „ plurima phænomena alias inexplicabilia valde accommodi, cau-  
 „ sam naturalem habere non possint, sed ad arbitrium ac sapien-  
 „ tissimam Dei dispositionem veniant reducendi; talis ipsorum  
 „ concipi debet coordinatio, quæ fini obtinendo possit apta vi-  
 „ „ deri.

„deri. Quod si ergo vorticum aut orbium istorum cælestium No. XIX.  
 „fluidorum talem gyrationem supponamus, qualis in orbibus  
 „aut globis solidis contingit, ut partes singulæ singulos etiam  
 „circulos, circa singula centra describant, totusque adeo vortex  
 „non tam circa centrum, quam circa axem aliquem convolvatur,  
 „tur, non solum hoc, de quo nunc sermo nobis, incommodi  
 „sequitur; sed necessum etiam foret, hoc motu vorticoso stellas  
 „& corpora mundana, non sphaerica, sed cylindrica potius  
 „facta; sub polis gravitatem non esse, &c. Quamobrem in vorticibus  
 „hiscæ fluidis, in quibus particulæ singulæ gyrationem supponuntur,  
 „ita singulorum circulos  $\mathcal{A}$  quatori parallelos oportet statuere,  
 „meo iudicio, ut omnes tamen gyrationis suæ impetum ex uno  
 „eodemque  $\mathcal{A}$ quatoris centro nactus concipiamus, eandemque  
 „adeo conatus recedendi ab uno eodemque puncto dependeat:  
 „quo posito, ea quæ te urget difficultas sponte sua evanescet;  
 „prout adjectam figuram nostram cum tua comparanti manifestum  
 „erit. Posse autem corporis alicujus motum circulatorum conjunctum  
 „esse cum conatu recedendi, non solum a centro proprio, hoc est,  
 „puncto in ipso plano circuli medio, sed etiam ab alio quodam puncto  
 „tanquam polo suo, exemplo fundæ constare potest, qua circumactus  
 „(*Fig. 2.*) in orbem IKL, lapis L, non solum a centro O, sed etiam,  
 „ac vel maxime, a manu rotantis M, recedere nititur, conatu in  
 „ipsa manu abunde sensibili.

Hæc tum ille. Instantia vero, quam huic responsioni deinceps  
 „opposui, his concepta erat verbis: „Quod quæstionem de natura  
 „gravitatis, quam a gyratione materiæ Terram ambientis, ejusque  
 „conatu recedendi ab ejus centro probabilissime derivari, dixeram,  
 „lusum quæris in verbis, *ab ejus centro*: agnosco non satis  
 „circumspecte me locutum, dicendumque fuisse, *a centro circuli  
 „Æquatori paralleli*: ut ut interim verum sit, materiam illam  
 „non posse ab isto centro recedere in directum, quin simul a centro  
 „Terræ recedat, quamvis oblique: ita dum punctum *c* (*Vide Fig. 3.*)  
 „recedit a *b*, in directum per lineam *cd*, recedit eadem opera a  
 „centro  $\mathcal{A}$ quatoris *a*, linea *ad* existente majore quam *ac*: adeo ut  
 „quamvis dixerim, ætherem habere

No. XIX. „recedendi a centro *Terræ* conatum, subintellige *obliquum* ex *c*  
 „in *d*, eadem tamen maneat difficultas; quare videlicet æther re-  
 „pellat corpora gravia versus idem centrum, via directâ potius  
 „per lineam *da*, quam iterum obliqua per lineam *dc*. Ad tol-  
 „lendam hanc difficultatem, Vorticum dispositionem ais conci-  
 „piendam esse talem, quæ fini obtinendo possit esse apta, cir-  
 „culosque a singulis particulis descriptos ita statuendos, ut om-  
 „nes gyrationis suæ impetum ab uno sphaeræ centro nactæ intel-  
 „ligantur. Verissime sane! Atque id unicum est, quod concipi  
 „a me non posse conqueror, nec posse a quovis alio puto;  
 „non magis atque concipere possumus, singula puncta in sphæ-  
 „ræ convolutione describere circulos maximos, quorum utrum-  
 „que Mechanicæ legibus æque adversari judico: sive enim Vor-  
 „tices fingantur sphaerici, sive cylindrici, solidi sive fluidi, nul-  
 „la eorum concipi poterit ratio alia, quam quæ fiat circa axem  
 „immutum, cujus singula puncta sint centra totidem circulorum  
 „parallelorum in superficie sphaeræ descriptorum, atque gyratio-  
 „nis impetum non a centro sphaeræ, sed a propriis centris nan-  
 „ciscantium; uti patere potuit, granis arenæ in globum velocif-  
 „sime in gyrum actum coniectis, quorum unumquodque resiliet  
 „per planum sui circuli.

„Ad exemplum *Fundæ*, dubito illud cum successu tentari pos-  
 „se, ut scribis; quin crediderim potius, frustraneum fore cona-  
 „tum rotandi, in manu extra planum circuli a lapide describen-  
 „di constituta; propterea quod hoc casu mihi persuadeam, non  
 „tensum fore funem, sed remissum, atque eo ipso probaturum,  
 „nullum talem esse in lapide a manu recedendi nisum; cum si  
 „quis esset, is utique funem extenderet. Pone vero funem ex-  
 „tendi, sentirique in manu lapidis conatum, cui constabit co-  
 „natum istum directe tendere a manu rotantis, non secundo  
 „& oblique tantum, primario nisu facto per planum circuli a  
 „lapide descripti? Sed demus æque fortiter recedere conari la-  
 „pidem, tum a manu rotantis, tum a centro gyri sui; nulla  
 „foret ratio tamen, cur si aliud repelleret corpus, id faceret  
 „versus manum potius, quam versus gyri sui centrum; uti sup-  
 „po-

„ ponimus ab æthere repelli gravia, versus Terræ centrum dun- No. XIX.  
 „ taxat, non versus centrum circuli paralleli. Accipe Clar. Vir,  
 „ quæ mihi inciderunt hac de re conjecturæ. Consideravi duos  
 „ in sphæra circulos, in quodam puncto (quod locum habitatio-  
 „ nis nostræ referat) sese tangentes, alterum maximum, mino-  
 „ rem alterum; quales depicti sunt in Sphæra Tropicus & Eclip-  
 „ tica: deprehendique sectionem mutuam planorum utriusque  
 „ circuli incidere in lineam aliquam, quæ est communis utrius-  
 „ que circuli tangens: dum ergo punctum contactus, rotari in-  
 „ cipiens juxta ductum Tropici, conatum acquirit recedendi per  
 „ tangentem, hætenus æque æstimari poterit recedere a centro E-  
 „ clipticæ, atque a centro Tropici; cum eadem sit utriusque tangens.  
 „ Deinde attendi, quamvis portio ætheris in loco habitationis nostræ  
 „ conatum habeat recedendi per tangentem, posse tamen fieri, ut  
 „ actualis trusio communicetur non per tangentem quæ horizonta-  
 „ lis est, sed per perpendicularem, ductam a centro circuli maxi-  
 „ mi ad Zenith, uti globus *a* (Vid. Fig. 4.) veniens ex *d* conatum  
 „ habet eundi in *b*, trudit tamen globulum *e*, quem oblique offen-  
 „ dit, non juxta lineam *a b*, sed juxta seriem *a c*. Interim non dis-  
 „ simulandum, pristinam hic redire difficultatem: nam 1°. Nul-  
 „ la est ratio, cur pulsio globulorum fiat in plano verticali po-  
 „ tius, quam in plano circuli paralleli, aut quovis alio; cum  
 „ tangens illa, secundum quam recedere conatur globulus, in-  
 „ finitis planis sit communis. 2°. Neque causa manifesta est, cur,  
 „ si pulsio illa fit in plano verticali, fiat potius juxta lineam tan-  
 „ gentis *a b* perpendicularem, quam juxta quamvis aliam; eo  
 „ quod globulus *a* undique circumdatus infinitis globulorum se-  
 „ riebus, subinde eos impelleret in alias & alias partes.

Forte non tædebit Lectorem, si hic subjungam quæstionem alteram ad propagationem radii visivi, in eadem posteriore Epistola Cl. Viro propositam; quoniam non parvam causarum latentium analogiam utrinque intercedere suspicor.

Quæstio erat; *Cur visio fiat in instanti, sonus propagetur succes-*  
*sive? Cur item radius deferatur linea tantum recta, sonus autem*  
*per quasvis etiam ambages, aures feriat?* „ Cui discrimini (sic ha-  
 Jac. Bernoulli Opera. I i „ bebant

No. XIX. „ bebant verba mea ) aliter satisfieri posse non puto , quam si  
 „ corpuscula , quæ sunt vehiculum luminis , supponantur imme-  
 „ diate se tangere ; quæ vero sunt vehiculum soni , a se mutuo  
 „ intervallulis separata esse ; quod ita concipio : Suppono vehi-  
 „ culum soni , particulas scilicet aeris subtiliores  $\alpha, \alpha, \alpha$  ( *Vide Fig. 5.* )  
 „ vel singulas seorsim , vel plures conjunctim , per impetum ,  
 „ aut primigenium , aut a materia subtili sibi communicatum ,  
 „ describere gyros quosdam , certæ ac natura præfinitæ magnitu-  
 „ dinis 1 , 2 , 3 , 4 ; sitque corpus sonum edens A B , quod con-  
 „ cussum tremulo motu subinde accedat in C D : hoc igitur pro-  
 „ pellet omnes sphærulas , 1 in  $\alpha$  , 2 in  $\beta$  , 3 in  $\gamma$  , 4 in  $\delta$  ; ubi  
 „ manifestum est , si istæ sphærulæ eandem servarent amplitudi-  
 „ nem , necessum esset , ut eodem tempore , quo A B fertur ad  
 „ C D ,  $m$  perveniret in  $n$  , ibique aurem feriret. Notandum er-  
 „ go , cum particulæ aeris , in circumferentia sphærulæ rotatæ ;  
 „ a corpore A B percutiuntur , illas condensari primum , sphæ-  
 „ rulamque angustari ; qua coarctata , particulæ debitum suæ gy-  
 „ rationi spatium reposcentes , propellunt particulas sequentis sphæ-  
 „ rulæ 2 , quæ iterum coarctatur , sed non adeo valide ac prior ;  
 „ coarctata propellit tertiam , hæc quartam , &c. sic ut præci-  
 „ puum , quod in sono fit , sit aeris condensatio ; major equi-  
 „ dem circa corpus sonorum , minor autem in spatio remotiori.  
 „ Hinc enim planum fit , cur sonus non deferatur in instanti ad  
 „ aurem ; cur fortior sit prope corpus sonorum , & tandem  
 „ languescat ; cur item feratur oblique , siquidem sphærulæ con-  
 „ densatæ ex omni parte sese dilatent , atque omnes circumjacen-  
 „ tes sphærulas propellant. In visu quidem etiam facile capio ,  
 „ cur lumen vicissim deferatur in instanti ; nam si globuli secundi  
 „ Elementi E F ( *Vide Fig. 6.* ) sint solidi , ac sese immediate con-  
 „ tingant , condensari nescii ; sequitur ut quo momento primus  
 „ globulus impellitur a corpore luminoso E , eodem sentiat impu-  
 „ pulsus ab oculo G. Sed divinare nequeo , cur oculus constitu-  
 „ tus in H , quo radii directi propter corpus opacum K interjee-  
 „ tum pertingere nequeunt , non videat tamen lumen per radium  
 „ E F H ; siquidem globulus F non possit pergere ad G , quin si-  
 „ mul



mul impellat seriem F H. Similis fuit difficultas, ubi de descen- No. XIX.  
 „ su gravium quæsi, cur fiat secundum lineam perpendicularem  
 „ potius, quam secundum quamvis aliam: atque dubito, annon  
 „ eadem utriusque ratio sit, quam profunde ignoro.



No. XX.

# SPECIMEN LIBRI DE MOMENTIS GRAVIUM &c.

 Autore J. F. V. \* Lucensi.

**I**NSIGNES Mathematici, GALILÆUS, TORRICELLIUS, *Acta Erud.*  
 WALLIS, MARCHETTUS, ac plures alii, existimant esse ve- *Lipf. 1684.*  
 ram hanc Propositionem: *Momentum totale gravis, ad momentum Nov. p.*  
*quod habet super plano declivi, est ut longitudo plani declivis ad per-* 511.  
*pendiculum: cujus contradictoriam sic demonstro.*

Si grave conformatum in globum, nitatur plano horizontali (Fig. 1) radius IK, perpendicularis horizonti, est linea directionis per quam centrum I exigit descendere perpendiculariter. Si vero idem globus (Fig. 2) nitatur duobus planis inæqualiter declivibus XC, ZC (quæ pro hac demonstratione sint æqualis longitudinis, & faciant angulum rectum XCZ; cum perpendiculo vero XN, quod sit æquale rectæ CO parallelæ horizonti, & cum recta NC horizonti parallela, quæ sit æqualis perpendiculo ZO, constituent triangula rectangula XNC, COZ, invicem æqualia) radius IH, parallelus plano XC, per quem centrum I exigit descendere super XC, est linea directionis, respectu descensus super XC, ac radius IF, parallelus ad ZC, est linea directionis, respectu descensus super ZC.

Jam, sicut planum horizontale sustinet pondus æquale momento, quo globus exigit descendere perpendiculariter; quia globus momentum suum totale censetur exercere in radio IK, planum vero horizontale, applicatum in K, ac totaliter impediens descensum perpendicularem, resistit illi momento per virtutem æqualem; ita planum ZC, sustinet pondus æquale momento, quo idem globus exigit descendere super XC, quia

I i 2

mo-

\* JOHAN. FRANCISCUS VANNIUS, c S. J.

No. XX. momentum globi ut descendat super  $XC$  censetur exerceri in radio  $IH$ ; & planum  $ZC$  tangens globum in  $H$ , & totaliter impediens ejus descensum super  $XC$ , toti illi momento (quod respectu totalis est solum parziale) resistit per virtutem æqualem: planum vero  $XC$ , sustinet pondus æquale momento, quo globus exigit descendere super  $ZC$ , quia momentum globi ut descendat super  $ZC$ , censetur exerceri in  $IF$ , ac planum  $XC$ , tangens globum in  $F$ , & impediens descensum super  $ZC$ , resistit momento globi per virtutem illi æqualem. Itaque momentum totale globi, sustinetur plano horizontali; momentum super  $XC$ , sustinetur plano  $ZC$ ; momentum super  $ZC$ , sustinetur plano  $XC$ . Quia vero, *momentum totale globi super plano horizontali, æquatur momentis partialibus simul sumptis ejusdem globi super planis declivibus  $XC$ ,  $ZC$* ; sicut pondus globi, quo gravatur planum horizontale, æquatur partibus ponderis ejusdem globi simul sumptis, quibus gravantur plana  $ZC$ ,  $XC$ : Si momentum totale ad momentum super plano declivi  $XC$ , sit ut  $XC$  ad  $XN$ ; ac momentum idem totale, ad momentum super  $ZC$ , sit ut  $ZC$  ad  $ZO$ , nimirum ut  $XC$  ad  $NC$ : (quia ex hypothesis  $XC$  est æqualis  $ZC$ , &  $NC$  est æqualis  $ZO$ ); momentum totale ad momenta partialia simul sumpta, est ut hypotenusa  $XC$ , ad latera  $XN$  &  $NC$  in directum posita, ejusdem trianguli  $XNC$ . Atqui hypotenusa  $XC$ , non est æqualis lateribus  $XN$  &  $NC$ , sed est illis minor. Ergo si totale momentum ad partialia, sit ut  $XC$  ad  $XN$  &  $NC$ , momentum totale non æquatur, sed est minus momentis partialibus simul sumptis. Ergo momentum totale, ad momentum super plano declivi  $XC$ , non est ut longitudo plani  $XC$ , ad perpendicularum  $XN$ .

Hæc demonstratio non videtur obnoxia ulli exceptioni; quia si momentum totale, ac momenta partialia, considerentur in uno & eodem globo, vel in globis æqualibus; velocitas, qua globus descendit perpendiculariter, ad velocitatem, qua descendit super plano declivi  $XC$ ; impulsus, quo globus conatur deprimere planum horizontale, impediens descensum perpendicularem, ad impulsus quo conatur deprimere planum  $ZC$ , applicatum in linea directionis, & impediens descensum super  $XC$ ; onus quo gravatur planum horizontale, ad onus quo gravatur planum  $ZC$ ; momentum totale, ad momentum super  $XC$ ; habent unam, & eandem rationem: quod sufficiat indicasse.

Ex his aliisque principiis legitime demonstratis, in *Exegesi de momentis gravium* deprompta est proportio momenti totalis ad parziale, ac cæteræ quæstiones resolutæ sunt. Quum autem tum vectis communis, tum ille, quem continent gravia impedita ne descendant super planis declivibus, se ipsos non agnoscant in quorundam libris: idcirco utriusque natura, in *Exegesi de vecte*, nova methodo indaganda visa est; ac voto exitus respondit. Demum in *Exegesi de motu æqualiter accelerato*, præ-

ter

ter motum ipsum facilius ac brevius expositum: propositiones, quæ antea nitebantur falsis principiis de momentis gravium, emendatæ sunt, novæ nonnullæ additæ.

\* \* \*



*Viri cujusdam μαθηματικολάτῃς Censura.*

**O**BJECTIO Viri, ut apparet, peringeniosi, contra receptum & mea sententia, demonstratum Staticorum Theorema, non contemnenda est quidem; solvi tamen omnino potest negando momenta in planis  $XC$  &  $ZC$  in unum posse addi, ut componant momentum gravis absolutum; & fraudi Viro docto fuisse videtur, quod illa vocavit partialia, hoc totale. Quid enim, si grave sustentetur a duobus planis,  $XC$  inclinato, &  $AC$  verticali (*Fig. 3*)? utique momenta in ambobus planis in unum addita non possunt æquari uni ex ipsismet, totum parti; quod tamen secundum objicientis sententiam fieri deberet: momentum enim in plano verticali utique est ipsum momentum gravis absolutum.





No. XXI.

D<sup>N</sup>. BERNOULLI  
**SOLUTIO DIFFICULTATIS**  
 CONTRA PROPOSITIONEM QUANDAM  
 MECHANICAM,

Authore J. F. V. Lucensi propositæ,  
*insertæque Actis Lipsiensibus Mense Novembri*  
 1684.

*Acta Erud.  
 Lips. 1686.  
 Febr. p. 96.*

**P**ROPOSITUM est huic Autori ostendere, *Momentum totale gravis, ad momentum quod habet super plano declivi, non esse ut longitudinem plani declivis ad perpendicularum;* argumento petito a globo duobus planis declivibus normalibus innixo, cujus momenta partialia, quæ utrumque planum sigillatim sustinet, excedere deberent simul sumpta momentum ejus totale; id quod Autor judicat absurdum.

Subjuncta est loco citato ad difficultatem hanc brevis Cl. cujusdam Viri Responsio, qua recte quidem negat absurdum esse, momenta in ambobus planis simul sumpta excedere momentum globi absolutum: at cum negationem deinceps suam conatur illustrare exemplo duorum planorum, inclinati XC, & verticalis AC; videtur negligere præcipuum objectionis nervum, qui in eo situs est, ut momentum globi super utrolibet plano statuatur sustineri ab altero *totaliter & adæquate*; quod hic non fit: Cum enim planum AC (*Vide Fig. 3.*) sit obliquum ad lineam directionis

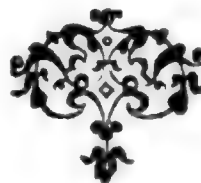
tionis  $I H$ , secundum quam globus exigit descendere super  $X C$ ; No. **XXI**, itemque sit obliquum Planum  $X C$  ad lineam directionis  $I F$ , secundum quam globus exigit descendere super  $A C$ : sequi videtur, momenta descensuum alterna alternis planis sustineri non tota, sed *imminuta*; unde quis colligeret, etiamsi *tota* excedant momentum globi absolutum, *imminuta* tamen illi æquari posse: quod Autorem objectionis in sua potius opinione confirmaret.

Itaque plenius solvenda difficultas est, dicendo, confundi in illa pondus & momentum ponderis. Potest enim fieri, ut pondus maneat unum idemque, variet tamen subinde momentum, quod exercet in premendo alio corpore, pro diversitate applicationis utriusque, indeque natæ respectivæ celeritatis. Ita pondus, applicatum longiori vectis brachio, majus utique exerit momentum in obicem breviori applicatum, quam est momentum suum absolutum, cujus mensura est ipsummet pondus. Quantum autem momentum exerceat quodcunque pondus in premendo obice, determinatu facile est; dummodo consideretur, quid fieret, si descenderet pondus. Ita si globus  $I$ , (*Vide Fig. 1.*) plano horizontali  $K$  innixus, descenderet in  $L$ , spatium  $K L$ ; ipsum planum eodem tempore per idem spatium  $K L$  ferri deberet; adeoque cum celeritates forent æquales, requiritur in plano, ad hoc ut globi descensum impediat, tanta resistendi vis, quantum est ipsum globi pondus; tantumdemque proin æstimatur momentum quo globus in planum agere intelligitur: unde etiam vocatur momentum absolutum. At si deinceps globus sustentetur duobus planis, res secus se habebit. Quod ut manifestum fiat: sunt (*in Fig. 4.*) plana  $X C$  &  $Z C$ , æqualiter declivia, quorum igitur utrumlibet a sustentati globi pondere dimidio premetur; sed quanto momento, sic explorabimus. Fingamus globum descendere ex  $I$  in  $L$ ; quod dum facit, conatum premendi plana, transmittit per rectas  $I F$  &  $I H$ , planis istis perpendiculares: quare globo existente in  $L$ , reperientur ista in  $Q P$  &  $R P$ , situ priori parallelo, siquidem cujuslibet plani resistentia ultra citraque globum æqualiter diffusa supponatur. Eo ergo tempore, quo globus permeat rectam  $I L$  æqualem

$C P$ ;

No. XXI.  $CP$ , planum  $XC$  non nisi transigit spatium  $CQ$ , brevissimam videl. distantiam inter  $XC$  &  $QP$ , id est, celeritas globi ad celeritatem plani est, ut  $CP$  ad  $CQ$ . Unde ne loco moveatur planum  $XC$ , requiritur in illo tanta resistendi vis, quæ sit ad dimidium ponderis globi quo urgetur, ut reciproce celeritas globi  $CP$ , ad celeritatem plani  $CQ$ . Censetur autem resistendi vis cujusque obicis æquipollere momento, quod in illum exercetur. Quare etiam momentum globi super plano  $XC$ , est ad dimidium ponderis ejusdem, ut  $CP$  ad  $CQ$ . Simili ratione momentum super plano  $ZC$  est ad alteram ponderis medietatem, ut  $CP$  ad  $CR$ ; id est, ut  $CP$  ad  $CQ$ . Adeoque jam momentum globi super utroque plano simul sumptum, est ad totum ejus pondus (seu momentum absolutum) ut  $CP$  ad  $CQ$ . Est vero  $CP$  major  $CQ$ . Igitur momentum &c. Q. E. D.

Concludimus, quo acutiorem angulum ambo plana invicem constituunt, eo magis, & quo obtusiores, eo minus momenta partialia excessura esse momentum totale; ratione rectæ  $CP$  ad  $CQ$ , illo casu, existente majore; hoc, minore: donec tandem apertura anguli tanta fiat, ut ambo plana coalescant in unum horizontale; quo facto, concident quoque rectæ  $CQ$  &  $CR$  cum  $CP$ , sustinebitque planum non nisi ipsum momentum globi absolutum. Patet etiam hinc, globum inter duo plana ita sustentatum, non male referre cuncum, cujus vim ingentem in findendis corporibus multis vicibus superare notum est absolutum momentum virium, quibus adigitur.



No. XXII.



Nº. XXII.

METHODUS RATIOCINANDI,

*SIVE*

USUS LOGICÆ

In præclaro aliquo Phænomeno  
Phyfico enodando,

*Speciminis loco*

In Academia Patria

IX. Calend. Aprilis M. DC. LXXXVI,  
Publica Prælectione ostensus

✓

JACOBO BERNOULLI, Bafil.

---

---

Editum primo

BASILEÆ

1686.

ALMÆ UNIVERSITATI  
BASILIENSI,  
MAGNIFICO RECTORI,  
SPECTATISS. FACULTATUM DECANIS  
CÆTERISQ. ACADEMIÆ PROCERIBUS  
AMPLISSIMIS,

*Quorum nutu & indultu hæc nascuntur  
nobis otia,*

Præsentēs Pagellæ sacræ funto!

LE C.

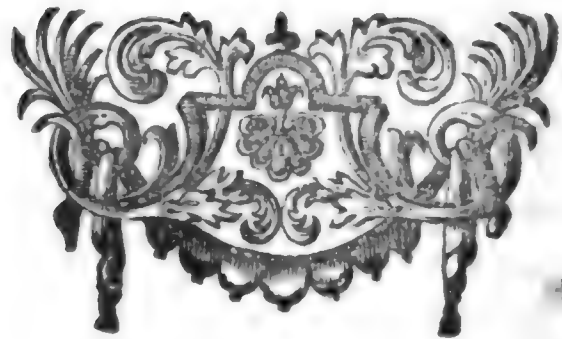
## LECTORI S.



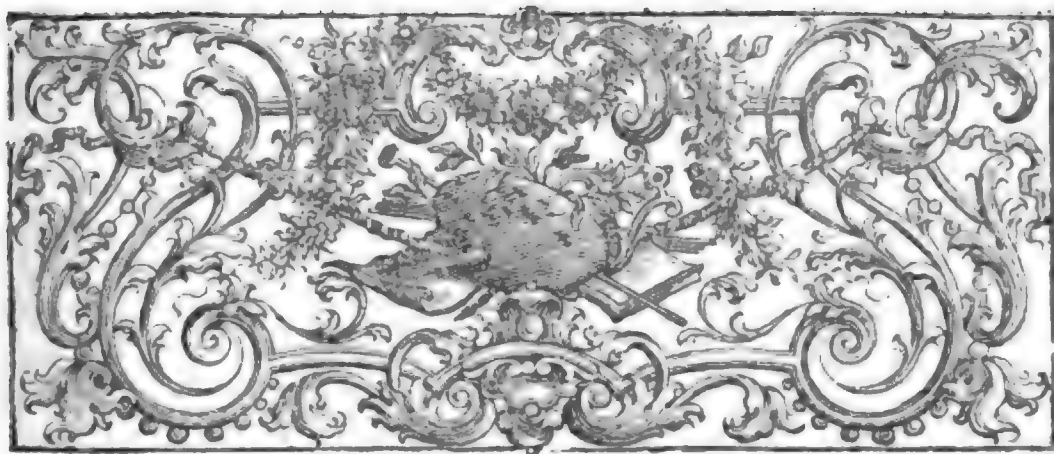
*NON* semper HUGENIIS scri-  
bimus, & WALLISIIS, vel  
Philosophiæ novis ditandæ inven-  
tis operam navamus; sed quan-  
doque animum a severioribus ad  
jucundiora & facilia deflec-  
timus, inque iis, quæ jam novimus, studio-  
sæ Juventuti methodice proponendis vires no-  
stras experimur, præsertim quando jubet Su-  
periorum voluntas, qui publico destinatos suo-  
rum profectus specimine explorare satagunt;  
ubi non tam in inveniendo acumen & indu-  
striam, quam in docendo solertiam spectant.  
Huc igitur & præsens collimavit Exercitium  
Academicum, quod cum nata occasio Dia-  
lecticum esse voluerit, non potui non, ut sco-  
po accommodarem meo, plurima vix alias con-  
donanda Logicalia illi immiscere. Sed quo-  
niam, hoc non obstante, benigna satis Audi-  
torum judicia expertum est, cæteraque, si fa-  
teri verum licet, totius solidioris Philosophiæ  
Kk 2 facile

## LECTORI S.

*facile fundamenta continet , amicorum quorundam hortatu motus haud gravate , ut videret lucem , & si posset , etiam prodesset exteris , annui. Vale.*



**MAGNI**



*Magnifice Domine Rector ,  
 Proceres Academici , Experientissimi ,  
 Sapientissimi , Clarissimi ,  
 Hospites cæteri Reverendi , Exoptatissimi ,  
 Præstantissimi , Nobilissimi.*



M N E Trinum , quod aiunt , perfectum. No. XXII.

Tertia jam intra biennium vice has premo cathedras , Specimina Vobis editurus ejus Artis , quæ Rationem formare docet. Ut igitur omne ferrem punctum , & postremis hisce laboribus , quousque licet , perfectionis colophonem imponerem , omnino consultum esse duxi , ut ( qui præcipuus Artium Propædeuticarum scopus est ) abstractas Ideas , quibus toties aures replevi vestras , tandem etiam ad praxin aliquam referrem , atque sic declinarem familiare illud Logicorum fatum , qui postquam inanibus technolo-

gematis

No. XXII. gematis & notionibus secundis totam sæpe ætatem triverunt, nihilo vel in rebus agendis prudentiores, vel in cognoscendis sagaciores inde evasisse deprehenduntur. Ab hoc, inquam, ut caveam mihi vitio, constitutum mihi est, Methodum ratiocinandi, Usunque Logicæ in præclaro aliquo Phænomeno Physico feliciter enodando, hac Prælectione Vobis ostendere, adhibito simul in auxilium alterius Logicæ, cujus *Parallelismum* nuper dedi, puta Algebrae, ratiocinio; partim ut eos, qui non ita pridem calculum istum me manu ductore addidicerunt, illius quoque applicandi doceam methodum; partim ut aliis etiam salivam moveam, ad hanc divinioris auræ particulam sibi comparandam. Ita vero ad institutum meum isthæc accommodabo, ut & Usus vulgaris Logicæ, ratiociniis subinde in formam reductis, Vobis commonstrem. Quod dum facturus sum, Auditores, attentas præbete dicendis aures, oculosque in Schemata chalcographica Vobis exhibita defigite.

Phænomenum, quod in Dissertat. mea *de Gravitate Ætheris*, p. 100. *seqq.* concisus pertractavi; nunc vero ut Methodus Ususque utriusque Logicæ eo clarius patetceret, prolixius enodandum mihi proposui, istud est: *Si Fistula cylindrica 29 pollicum longitudinem non excedens, una extremitate clausa, altera patula, repleta sit ex parte mercurio seu argento vivo, reliquo spatio aeri concesso, eaque postmodum obstructo digiti pulpa orificio invertatur, atque erecta perpendiculariter immergatur cum obstruente digito in stagnantem alicubi mercurium; explorandum est, an & quousque remoto digito mercurius in fistula descensurus sit?*

Quicquid ab humana mente cognosci potest, vel cognoscitur ut Principium seu Axioma, vel ut Principiatum seu Conclusio. Illa, quorum veritas adeo est in propatulo, ut intellecta sola terminorum significatione in dubium revocari nequeant, cognoscuntur priori modo, neque proin ullo ratiocinio vel demonstratione opus habent. Ex horum autem numero satis constat non esse præsens Phænomenum, cum neminem Vestrum putem esse, Auditores, qui audita & percepta vocum vi, determinare statim auit Phænomeni eventum. Sequitur ergo, illum non nisi ut conclusio-



sionem, adeoque prævio ratiocinio, cognosci posse; & quando-  
quidem omnis conclusio elici debeat ex præmissis, quarum ve-  
ritas ut concessa, vel aliunde cognita supponitur, hinc utique  
patet, ad præsens negotium expediendum, necessario aliqua de-  
bere dari sive ex insitis notionibus, sive ab experientia hausta  
principia, super quibus deinceps debito modo ratiocinandum est,  
& sine quibus quæsti cognitio obtineri nequit. Si quis enim me  
juberet divinare numerum, quem quis mente concepit, neque  
adjiceret condiciones, quibus vestitus esse debeat, quibusque ceu  
characteribus ipse mihi sese prodat, is ἀδύνατον profecto mihi præ-  
ciperet: Pariter quoque, antequam quis perspectam habeat na-  
turam Aeris, reliquaque Principia hydrostatica ad præsentem  
quæstionem necessaria, is illius solutioni frustra insudabit; & si  
paulo sit morosior, usu fere illi veniet, quod antehac celebri  
cuidam Professori Amstelodamensi, \* primo CARTESII Discipulo,  
juxtaque Defensori acerrimo, *Clave Philosophica* claro, cujus tan-  
to libentius, quanto opportunius mentionem hic injicio. Cum  
ante quadriennium scribendæ modo dictæ dissertationi in Belgia  
vacarem, atque inter peregrinandum, experiundi destitutus ipse  
copia, hærerem circa eventum hujus ipsius, quod nunc præ  
manibus habemus, Phænomeni; Amstelodamum concessi, con-  
sulturus ibidem hac de re celebre illud Oraculum. Ille, intellecta  
mei adventus causa, subticuit primo, sed ne quid nescire videretur,  
argentum in tubo non descensurum, sed in eadem, qua prius,  
hæsurum altitudine, magistraliter asseveravit. Ego, qui descen-  
surum certo prænoveram, & scire saltem efflagitabam, utrum  
major minorve Aeris copia in tubo relicta illud humiliter detru-  
sura esset, modeste Philosopho regessi; ad quæ ille torvo me  
statim intueri vultu, dehinc percontari quis essem, postea indi-  
gnari, stomachari, in Philosophiam Experimentalem invehì,  
eamque histrionicam nuncupare, & me tantum non vi ex ædibus  
suis expellere. Hæc erat tum solutio celebris istius Cartesiani.  
Nos vero ut minus militariter, ac magis philosophice rem ag-  
gredia-

\* Joh. DE RAY.

No. XXII. grediamur, stabiliemus ante omnia Principia quædam; solvendo nostro Problemati apta, quorum veritatem ab Auditoribus meis suppono ut concessam, non quasi probatione non indigeant (agimus enim hic de Problemate aliquo Matheseos concretæ, puta Physicæ vel Hydrostaticæ, cujus Principia immediata non sunt Axiomata illa, vel Notiones communes nobiscum natæ, quæ abstractæ Principia constituunt †: ) verum quoniam partim Principiorum horum veritas mille Experimentiis, & forte etiam Rationibus probata jam abunde est, partim etiam & præcipue, quia Auditorum illi, quos hæc tum experientiæ tum rationes latuerint, ex conclusionis meæ veritate, quam ipsismet eorum oculis spectandam & usurpandam exhibebimus, ipsorum quoque Principiorum, ex quibus illa fluxit, veritatem, actu cognitionis, ut sic dicam, reflexo colligere tuto poterunt. Principia autem sunt sequentia :

I. *Omnes partes cujuscunque liquoris aequaliter a centro Terra remota, a pondere perpendiculariter sibi incumbente premi debent aequaliter : & si premuntur aequaliter, eo situ quiescunt ; sin minus, non prius componuntur ad quietem, quam res ad aequipondium reducta fuerit, assurgentibus hinc partibus quibusdam, subsidentibus inde aliis.* Celebratissimum hoc Principium hydrostaticum fuit ex ipsa natura Liquidi, cujus particulæ non instar partium corporis duri sibi mutuo connexæ, sed a se mutuo separatae & disjunctæ sunt, adeoque aliæ aliis cedere aptæ, nimirum minus pressæ validius pressis. Ex. gr. Esto ( Fig. I. ) Vas A, impletum liquore quocunque usque in BC : dico, liquorem hoc statu quieturum. Assumpta enim quavis planitie horizontali DE ; quoniam singulæ partes hujus planitie æqualem sibi superincumbentem habent liquidi molem, æquali quoque urgentur pondere, nullaque proin ratio est, cur una alteri cedere debeat. Ponamus jam, concusso vase assurrexisse liquorem ex una parte in F, ex altera descendisse in G : dico, illum in hoc situ nequaquam permansurum ; quoniam planitie DE pars H majus sibi nunc incumbens habet pondus, quam

† Vid. nuper ventilatarum mearum Miscellanearum Theſ. 11. 12. 13. ( sup. pag. 233. 234. )

quam pars I: quare huic accedere debet pars quædam alterius No. XXII. ponderis, donec aucta hinc molis incumbentis quantitate, illinc diminuta, liquor pristinum recuperet situm BC, atque ita planities DE utraque sui parte æqualiter iterum prematur, fiatque perfectum æquipondium.

II. *Atmosphericus noster, quem spiramus, Aer, non minus atque argentum vivum, Pondere seu Gravitate aliqua instructus est; quod infinitis experimentis, & nostris quoque sæpius iteratis, compertum est.* \* Mirabimini profecto, Auditores, si Vobis dixerò, pondus istud Aeris, totam Globi terraquei superficiem cingentis, indeque ad extimos atmosphæræ limites expansi, adeo non contemnendum esse, ut revera centenariorum plus quam sexagies sexies mille millionum millones conficiat.

III. *Aer, secus quam alia Fluida, præter Gravitationem insigni quoque præditus est Elaterio, seu Virtute sese expandendi & contrahendi.* Ut vero distinctam habeamus notionem de isthoc aeris Elaterio, atque cognoscamus, in quantum conveniat, & in quantum differat ab ejus Gravitate, res ita concipienda: Fingite vobis ingentem Lanæ acervum, cujus partes quo inferiores, eo compressiores existunt, ita tamen ut compressio ista non continetur in indefinitum, sed ad certum usque gradum, quem ubi Lanæ portio attingit, nequit a reliqua mole ulterius comprimi, virtute ejus expansiva paria tum faciente cum incumbente pondere. Quod enim Lana sic compressa superincumbenti oneri non nude resistat resistantia, ut sic dicam, passiva, quæ ulteriorem duntaxat compressionem prohibeat, sed & efficaci pressione contrahitur, patet inde, quod ablata desuper parte oneris, infima Lana sese aliquousque actualiter expandit, donec debilitati sic

*Jac. Bernoulli Opera,*

L 1

Ela-

\* Modus ponderandi aeris ab unoquoque facile instituendus talis est: Phiala vitrea colli angustioris prunis ardentibus admota lente calefiat, rarefacto per calorem & expulso e phiala maximam partem aere, ejus orificium cera promte & sollicitè obturetur; tum postquam lente refriguit, lanci exacte libræ injecta ponderetur, & perforata postmodum cuspide acus cera, aeri externo introitus permittatur, qui cum sibilo ingressus manifestè phialam præponderare faciet.

No. XXII. Elateris vires residuæ molis incumbentis pondus non amplius superent; tum enim res erit in æquilibrio, nec ulterius dilatabilis est Lana, quamdiu hoc onere premitur. Porro & illud animadvertere potestis, si exiguum Lanæ sic compressæ manipulum ex acervo illo eximatis, manuque concludatis, ita tamen ut sub eodem compressionis gradu maneat, eundem profecto nisum conatumve premendi in volam manus exercebit, atque antea exercuerat in totius superincumbentis Lanæ pondus; exercuerat autem in hoc pondus conatum ipsi ponderi æquivalentem, ut antea innuimus; unde sequitur, & parvæ istius moleculæ manu nunc conclusæ conatum æquipollere toti alias incumbentis Lanæ ponderi. Quæ si probe intellexeritis, Auditores, facile quoque Aeris Elaterio applicabitis: Nimirum cum aer hanc Terræ superficiem proxime ambiens ab incumbentis atmosphæræ pondere valide comprimatur, minima quælibet illius portio tantas acquirit elaterii vires, ut sive toto atmosphærico pondere libere circumdata, sive vasi vitreo inclusa, aliussve corporis interventu coercita intelligatur, tantam præcise pressionis vim exercere debeat in vasis latera, vel corpus quodcunque se ambiens, quantam in illa vel illud exercere posset totum alias atmosphæricæ columnæ incumbentis pondus. Sed & præterea, si paucillum istud inclusi aeris compressius adhuc, sive densius reddatur aere naturali, vel aere proxime nos ambiente, manifestum est, pressionem elasticam, quam exercet in corpora ambientia, fore etiam maiorem; sin rarius seu laxius fiat, fore minorem ea, quæ proficisci potest a volumine aeris naturalis consistentiæ, quæque æquipollet, uti antea indigitavimus, ponderi integræ columnæ atmosphæricæ.

IV. Neque vero (in quo ultimum nostrum Principium constituimus) Natura incerto hic agit motu, sed certam observat Legem & Proportionem in aeris magis minusve densati pressionibus. Deprehendit enim Illustris BOYLIIUS eleganti Experimento, nobis etiam feliciter tentato, quod † *Pressiones aeris sint in ratione directa*

† Intelligenda Regula ὡς ἐν πλάτῳ, nam si ἀκριβῶς loqui velimus, *Pressio elastica aeris densioris ad elasticitatem minus densi tantillo maiorem habere ra-*

*velta Denſitatum, vel reciproca Raritatum illius, id eſt, Sicut No. XXII.*

Denſitas unius portionis ad Denſitatem alterius, Ita Preſſio illius ad Preſſionem hujus: vel (quod perinde eſt) Sicut Raritas unius ad Raritatem alterius, Ita reciproce Preſſio hujus ad Preſſionem illius: Explico, Si portio aliqua aeris duplo, triplo, &c. denſior ſit alia, vel etiam ſeiſſa alio tempore; duplo, triplo, &c. quoque majorem exercebit preſſionem: Si vero duplo, triplove rarior, toties etiam minor erit ejus preſſio. Tunc autem aerem appello duplo, triplo, &c. denſiorem, quando eadem ejus quantitas in duplo, triplo, &c. minus ſpatium contrahitur: ſicut viſiſſim duplo, triplo, &c. rariorem, quando ad duplo, triplo, &c. majus volumen expanditur: Verbi gr. (*Fig. 2.*) Si aer ſpatio A contentus dilatetur, ut repleat poſtmodum ſpatium B duplum ſpatii A; dicetur duplo rarior: ſi contrahatur in ſpatium C, quod ſit dimidium ſpatii A; dicetur duplo denſior. Itaque ſi aer, dum coextenderetur ſpatio A, fuerit naturalis conſiſtentiae; adeoque, ut ſupra inſinuatum fuit, virtutem habuerit elatiſticam æquipollentem ponderi integræ columnæ atmophæricæ, preſſionem exercebit æquivalentem duplo dicti ponderis, poſtquam conſtipatus erit in ſpatium C: ſicut e converſo dimidio ſaltem ponderis, ubi dilatatus impleverit ſpatium B.

Stabilitis iſtis Principiis, antequam ad principalem Propositionem accedamus, ſequens præmittemus Lemma: *Si Tubus cylindricus ſuperne clauſus in liquore quocunque ſtagnante perpendiculariter erectus, atque eodem ad ſummitatem uſque impletus fuerit, hærebit in illo ſuſpenſus liquor, ſicubi ejus pondus non exuperet pondus cylindri atmophærici aque craſſi; ſed ſi exuperet, deſcendet eoſque, donec utriuſque cylindri pondus pari paſſu ambulet.* Quod ex Principiis noſtris antea allatis (quæ in poſterum Axiomatum loco nobis erunt) facile demonſtrabitur: Eſto enim (*Fig. 3.*) Fiſtula FI, ſuperne in F clauſa, immerſaque perpendiculariter liquori LM, & eodem

L I 2.

repleta

*tionem deprehenditur, quam denſitas ad denſitatem; cujus rationem pluſquam probabilem exhibui in Diſſert. de Grav. Æth. pag. 93. &c. Interim differentia tanti non eſt, ut ad eam hic loci attendere aut neceſſum, aut conſultum ſit.*

No. XXII. repleta usque ad F: Dico, si pondus liquoris F I exæquet pondus cylindri lateralis atmosphaerici N O æque crassi, & a superficie liquoris N ad summitatem atmosphaeræ O protensi, liquorem eo casu apici fistulae perpetuo adhæsurum; quod tali Syllogismo probo:

*Si superficies liquoris L M, utraque sui parte I & N, premitur ab incumbente pondere aequaliter, tunc eo statim quiescet, per sum. Axiom.*

*Atque in dicto casu premitur aequaliter.*

*Ergo quiescet.*

Assumptum probatur per hypothesein: Pars enim superficiiei I premitur a solo pondere liquoris I F, (exclusa videl. pressione aeris F G, quæ a clauso orificio F intercipitur,) pondus autem liquoris I F æquale supponitur ponderi aeris N O, quod premit partem superficiiei N, (aerem enim habere pondus, patet ex Illo Axiom. utraque ergo pars I & N premuntur ab æqualibus ponderibus, adeoque æqualiter. Perinde quoque se res habet, ubi pondus I F minus est pondere N O; tum enim prævalens cylindrus N O alterum I F sursum propellere conabitur, qui cum attolli nequeat ob impedimentum clausurae F, sequitur & hoc casu liquorem saltem adhæsurum summitati tibi. At si pondus I F superet pondus N O, exonerabit se pars liquoris in vasculum, reliquusque in fistula aliquousque subsidet, ex. gr. usque ad P. donec residuus liquoris cylindrus I P pondere exæquet aeris cylindrum N O, quod ipsum ex primo nostro Axiomate sponte pariter fluit; tum enim demum partes I & N ab incumbente onere urgentur æqualiter. Quousque vero quivis liquor in tubo subidere debeat, donec æquipondium fecerit cum simili vel æque crasso cylindro aeris, id quidem nulla ratione a priori, sed sola experientia determinabile est, cum nec de altitudine atmosphaeræ, nec de ejus specifica gravitate, neque dispari ubique spissitudine satis adhuc constet. Testatur vero Experientia, argentum vivum in altitudine circiter 29 pollicum Anglicanorum, aquam vero in altitudine 33 vel 34 pedum suspensam teneri posse; adeoque si tubi dictis altitudinibus breviores extiterint, liquores istos verticibus eorum affixos mansuros; sin proceriores fuerint, descensuros in iis,



his, non obstante superioris orificii clausura, usque dum dictas res. No. XXII. pective altitudines occupent. Atque hoc est celebre illud Experimentum, ab Auctore suo dictum Torricellianum, quod sicuti non sine stupore a Philosophis primitus exceptum fuit, ita doctrinæ de Aeris Gravitate felices dedit natales, atque vulgatum errorem, quo Veteres (qui experimentum non tentaverant in tubis longioribus) liquorum suspensionem in brevioribus fugæ vacui ascribebant, fortiter profligavit: non obstante enim prætenso hoc vacui metu, videmus descendere liquores in procerioribus tubis, in quibus per hunc descensum æque metuendum foret vacuum, ac in brevioribus. Notandum autem, altitudinem hanc 29 pollicum, ad quam initio descendit hydrargyrum in tubo Torricelliano, neutiquam permanentem esse, sed continuo variabilem (si tubus aliquandiu aeri expositus relinquatur) variatione quidem vix duos excedente digitos; quod ipsum indicio est, gravitatem cylindri aeris NO, qui cum sustentato mercurio æquipondium facit, subinde alterari, sive quod ejus altitudini aliquid accedat aut decedat, sive quod atmosphæra spissetur & rarefiat, vel ejus pondus aliam ob causam augeatur minuaturve. Saltem hinc nobis colligere proclive est, tubum istum, si per aliquot menses annosve in continuo, ut loqui amant, experimento relinquatur, instrumentum fore admodum idoneum indicandi, mediante isthoc hydrargyri ascensu descensuve, alterni incrementi vel decrementi gravitatis atmosphericæ; quem ob usum proin etiam vocari consuevit Barometrum, vel Baroscopium.

Præmissis istis, instituti nostri ratio postulat, ut tandem ad Principalem nostram Propositionem accedamus, quæ hæc est: *Si fistula aliqua cylindrica superne clausa, & 29 digitis, si ita lubet, brevior, non solo mercurio, sed aliqua ex parte etiam aere impleta sit: quaritur, quid tum sit futurum, num descensurus mercurius, necne; & si descendat, quousque id fiat?* Notanter quæstionem proponimus in fistula 29 dig. brevior; nam si longior sit, dubium nullum est, liquorem in illa descensurum, per præcedens Lemma, utpote præponderantem simili cylindro atmospherico, quo sustentandus esset. At si dicta altitudine sit minor, saltem

**N<sup>o</sup>.XXII.** hæreere quis aliquandiu posset circa Phænomeni eventum; imo etiam forte, non sine veri specie, colligeret ascensurum omnino mercurium, aut ad minimum eadem statione mansurum; eo quod, juxta allatum Lemma, suspensus etiam maneret, si totum repletet tubum; quo tamen utique casu, si solum spectes pondus, fistula majori gravaretur onere, quam nunc, ubi partim mercurio, partim aere, fluido longe levissimo, adimpleta est. Quin & revera expectationi responderet eventus, si pauxillum istud inclusi aeris solo ageret pondere, neque etiam elaterio suo efficax esset. Quocirca isthic non tam ponderis, quod in tantilla aeris molecula tuto negligi poterit, quam elasticitatis, quæ in minima ejus portione haudquaquam contemnenda existit, præcipua habenda est ratio: Quem in finem esto (*Fig. 4.*) Tubus *M N*, superne in *M* clausus, inferne patulus & hydrargyro in vase *Q* stagnanti immersus; pars tubi litera *b* notata impleta itidem sit mercurio, reliquum vero spatium *a* ab aere naturalis consistentiæ occupatum; a latere tubi assumatur similis cylindrus aerius *R S*, super mercurio in vase premens. Quibus ita positis, ut ordine in quæsitæ cognitionem deducamur, ita deinceps nobiscum ratiocinabimur:

*Hydrargyrum tubo conclusum, aut eadem immotum hæret altitudine, aut altius ascendit, aut humilius descendit.*

*Sed nec eadem hæreere altitudine, multo minus altius ascendere potest.*

*Supereest ergo ut descendat.*

Syllogismus hic est Disjunctivus, qui procedit a remotione duorum membrorum ad positionem tertii. Majoris veritas nititur sufficiente enumeratione partium; neque enim præter ascensum, descensum, & in eodem loco permanentiam, quantum aliquod concipi potest. Atque hunc argumentandi modum in veritatis investigatione plerunque adhiberi vellem; hac enim ratione circumspecti reddimur in nostris ratiociniis, certique esse possumus, nos nihil eorum, quæ ad rem præsentem conducunt, omisisse. Subsumtio constat remotione duorum membrorum: ubi notandum, eum qui sic subsumit, ni temere subsumere velit, jam perspectas habe-

habere debere rationes suæ subsumtionis; illum vero, qui adhuc No. XXII. dum in inquirenda veritate occupatus est, suspendere teneri tantisper subsumtionem suam, donec ordine examinarit singula membra, quæ removenda sunt. Quare & nos, acturi Philosophos, subsumtionem tantisper pro nondum facta habebimus, considerabimusque prius, quid fieri deberet, si ponerentur illa duo membra, quæ modo per anticipationem removimus; id quod sequenti Sorite efficiemus:

*Si Hydrargyrum eadem haret altitudine, aer naturalis superne inclusus manebit quoque ejusdem expansionis seu consistentia, (quod per se clarum.)*

*Si manet ejusdem, id est, naturalis consistentia, pressionem exercebit in mercurium, æquivalentem ponderi totius columna atmospherica RS, (per Ax. III.)*

*Si sola ista pressio æquivalet ponderi dicta columna, juncta certe ponderi mercurii inclusi, illi prapollebit:*

*Si juncta prapollet, stagnantis hydrargyri pars N, ab utraque tum pondere, tum elatere, junctim affecta, fortius utique premetur, quam pars S, a solo incumbentis aeris pondere subacta:*

*\* Si fortius premitur N quam S, non quiescet liquor hoc in statu (per Ax. I.)*

*Si non quiescit, non eadem harebit altitudine.*

Ubi obiter moneo, insigne hic sese obtulisse exemplum illius ratiocinii, quod nuper † ventilandum proposuimus, quo videl. ex assertione aliqua, directa & legitima consequentia, ejus contradictoria infertur; ex eo enim quod supposuimus, *hydrargyrum eadem hære altitudine*, conclusimus: *Ergo non eadem altitudine haret.* Et sic quidem removimus prius Enunciationis Disjunctivæ membrum: haud multum absimili ratione probabimus, multo minus ascen-

\* Potuissim hic finire Soritem, atque per remotionem ultimi hujus consequentis statim subsumere (velut in sequenti ratiocinio) Sed neutra pars altera premi debet fortius, &c. nisi animadvertissem, continuando Soritem resultaturum subtilis illius argumentationis exemplum, cujus hic mentio subjungitur.

† Disp. de Conv. & Oppos. Enunc. Th. XIII.

No. XXII. *ascensurum in tubo liquorem. Nam*

*Si mercurius ascendas, aer superne incarceratus in arctius spatium condensabitur:*

*Si condensetur, majores acquires elaterii vires, quam habuerat antea: (per Ax. III.)*

*Si majus acquirat elaterium, prapollebit ejus pressio ponderi columna atmospherica RS, ut pote cui antea per idem Axioma æquipollebat.*

*Si prapolleat, hydrargyri stagnantis pars N fortius iterum premetur parte S, præsertim cum illam pressionem augeat adhuc pondus columnæ mercurialis, tanto insuper factæ altioris, quanto altius ascenderit mercurius.*

*Verum neutra pars altera premi debet fortius: (per Ax. I.)*

*Non ergo ascendet mercurius.*

Argumentatio hæc est species deductionis ad absurdum, qua ex hypothesi adversarii ratiocinando infertur aliquid notorie falsum; ex eo enim quod supposuimus, *ascendere mercurium*, conclusimus, fore, ut *inaqualiter premerentur partes hydrargyri stagnantis N & S*: quod cum primo Axiomati, de cujus veritate inter nos convenit, adversetur; regrediendo ad primam propositionem, e qua id fluxit, eam ipsam quoque falsam esse inferimus: quam argumentationem hypotheticam procedere dicunt a remotione consequentis ad remotionem antecedentis.

Atque sic utrumque Enunciationis Disjunctivæ membrum removimus: quare nunc demum subsumere poterimus (quod antea per prolepsin jam feceramus) *Atqui hydrargyrum nec eodem basurum loco, multo minus ascensurum est.* Unde optime concludimus: *Ergo omnino descensurum esse constat.*

Superest ut inquiramus adhuc, quousque sit descensurum; quod iterum Syllogismo Disjunctivo, sed bimembri, auspicabimur, videl. isto:

*Argentum, aut descendit penitus, sic ut omne e tubo effluat in vasculum, aut descendit saltem aliquousque: (tertium non datur.)*

*Atqui non descendit penitus: (iterum per prolepsin removemus, quod prius examinandum crit.*

*Ergo saltem subsidet aliquousque.*

*Assumptionem sic probo:*

*Si*

*Si descenderet penitus, & omne e fistula efflueret, Aer superne con-* No. XXII.  
*clusus sese dilatare, totamque fistula cavitatem replere deberet:*

*Si dilataretur, debilitaretur ejus elaterium (per Ax. III.)*

*Si debilitatur ejus elaterium, pressio illius tanta non est, quanta proficiscitur a pondere columna atmospherica RS, (ut pote cui ante dilatationem saltem æquipollebat, per idem Ax.)*

*Si pressio elaterii tanta amplius non sit, stagnantis hydrargyri pars N, (quæ, postquam argentum omne e tubo decidit, a solo aere afficitur) debilius scil. premetur parte S.*

*Premi autem debent utraque aqualiter, quæ Liquidorum natura est per Ax. I.*

*Non ergo penitus effluet e fistula mercurius.*

Quæ argumentatio similis omnino est præcedenti: est enim Syllogismus Hypotheticus; cujus major includit Soritem seu complexionem plurium Enunciationum Hypotheticarum; minor, seu assumptum, removet ultimum consequens, & conclusio tollit primum antecedens. Atque hoc obiter insinuo, plerasque Demonstrationes geometricas nihil aliud esse, quam tales testos Sorites, seu Syllogismos Hypotheticos complexos, quorum quidem alii procedunt a positione primi antecedentis ad positionem ultimi consequentis; alii vero, qui ad absurdum ἀπὸ τοῦ ἀδύνατον, vicissim a remotione ultimi consequentis ad remotionem primi antecedentis.

Itaque scrutinium nostrum cōsumme prosecuti sumus, ut jam certo nobis constet, descensurum mercurium, & quidem aliquousque saltem: reliquus noster labor in eo vertetur, ut præcise determinemus, quousque id fiat. Atque hic pulcherrimus demum sese nobis aperit speculationis campus. Prodeant jam vulgares Logici & Physici, disquisitionem nostram ulterius, si possint, prosequantur, omnem mentis suæ intendunt aciem, undique conquirant sibi arma, omnia sua in usum vertant præcepta; in cassum laborabunt, nihil proficient, nullam invenient rimam, per quam minima sibi lux affulgeat arcanum istud naturæ penitus perscrutandi. Adesto ergo Divina Mathesis, defectui huic opitulante manu succurre, atque imperfectum opus

*Jac. Bernoulli Opera.*

*M m*

*ad*

No. XXII. ad finem perducito ! nimirum Tu incipis, ubi vulgaris Logica definit; tu Argo perspicacior, ubi altera cæcutit; Tu contemnis, quo terretur altera; planæ Tibi viæ sunt, quæ alteri asperæ & salebrosæ videntur Syrtes. Te igitur duce inceptum iter prosequemur. Tentabimus autem primo, an & quousque per Arithmeticam communem res confici possit. Quem in finem solvendum nobis proponemus peculiare exemplum :

Esto ( *Fig. 4* ) Tubus MN, unum & viginti digitos longus, † hydrargyrum infusum altitudinem viginti in illo digitorum occupet, supremo tantum pollice aeri concesso. Quandoquidem jam quæstio sit, quousque descendere debeat mercurius, assumamus numerum aliquem ad libitum, tanquam divinaturi veram quantitatem, de qua quæritur, eumque sic assumptum examinemus ordine, quem ipsa cuique natura dicat, juxta conditionem in quæstione requisitam. Conditio autem hæc est, ut partes superficiæ stagnantis mercurii N & S æqualiter premantur : quare calculo explorandum est, quantam in nostra suppositione utraque pressionem subeat; ubi observare licet, partem quidem S eodem perpetuo cylindri atmospherici RS premi pondere, quod æquipollere diximus in Lemmate nostro ponderi 19 circiter digitorum mercurialium, pro quibus, majoris evidentiae ergo, numero rotundo triginta digitos accipiemus; alteram vero partem N diversimode affici, prout profunditatem descensus argenti in fistula majorem minoremve supposuerimus.

Supponamus itaque primo, argentum uno descendere pollice : hærebit ergo adhuc in altitudine 19 pollicum; sed aer, qui antea unum occupaverat pollicem, nunc duos occupabit, adeoque duplo erit factus rarior, & proinde, per Ax. IV. duplo quoque minor ejus pressio elastica, id est, cum antea æquipolleret ponderi cylindri atmospherici RS sive 30 digitorum mercurialium, per Ax. III. nunc æquipollebit 15 digitis mercurialibus, qui

† Non comprehensa Tubi portiuncula infra mercurii stagnantis superficiem latente, utpote cujus nulla habenda ratio; quod & ubique in sequentibus intelligendum.



qui juncti 19 illis digitis in tubo residuis, efficiunt 34 digitorum No. XXII. pressionem, qua afficietur pars superficiei N (premitur enim hæc tum immediate ab incluso mercurio, tum mediante hoc ab aeris claterio.) Sed cum altera S sustineat pressionem æquivalentem duntaxat 30 digitis, illa premetur fortius hac; quare adhuc humilior in fistula subsidet mercurius.

Ponamus ergo rursum, descendere per duos pollices; sic hærebunt in tubo residui 18 digiti; aer vero tres nunc occupans, triplo erit factus rarior, quam antea in naturali suo statu fuerat; ejus ergo clater æquipollebit saltem tertiæ parti 30 digitorum, nim. 10 digitis, qui additi residuis 18, efficiunt 28 digit. mercur. quibus premeretur argentum vasculi in parte N. Debilius igitur jam premeretur parte altera S, quæ pressionem 30 digitorum sustinet.

Cum ergo descensum mercurii primum justo minorem, deinceps justo majorem assumerimus; assumamus nunc medium inter utrumque, supponendo descendere per unum pollicem & dimidium; reque eodem modo, sed nunc ob fractionem paulo difficilius examinata, deprehendetur superficies stagnantis mercurii parte N fortius iterum premi, quam parte S; sed non tanto excessu, quanto in prima suppositione, utpote \* pressionem tantum 30½ pollicum sustinens.

Quare sumto proporro argenti descensu 1½ pollicis, factoque & repetito sæpius examine, ita continuo numero quæsito appropinquabimus, ut tandem reperiamus vel ipsum verum numerum, vel vero adeo propinquum, ut differentia veri & assumpti fiat imperceptibilis, omnemque prorsus sensum fugiat. Atque hinc Problema, quod hoc pacto solvitur, per *Approximationem* solvi dicitur. Patet autem, istum solvendi modum, tametsi pure mecha-

M m 2

nicus

\* Nam depresso per 1½ poll. mercurio, residui manebunt ejus digiti in fistula 18½; aere nunc spatium 2½ dig. occupante; quare per Ax. IV. spatium 2½ dig. (volumen aeris rarefacti) est ad 1 dig. (volumen aeris naturalis) sicut reciproce pressio hujus, 30 dig. merc. æquivalens, ad pressionem illius, quæ propterea per auream regulam invenitur 12 digitorum, [qui juncti illis 18½, efficiunt 30½ dig.

No. XXII. nicus sit, & nihil peculiaris habeat artificii, nihilominus a nemine institui posse, qui vulgaris Arithmeticæ, & in specie Algorithmi fractionum non sit callentissimus.

Accedimus ad alterum solvendi modum, instituendum per Artem Analyticam, Algebram alias dictam. Hæc est illa magna Ars inveniendi, quæ mentem methodo admirabili, artificio summo, successu certo & infallibili, in quæsti cognitionem deducit, tanto præstantior Arithmetica communi, quanto hæc vulgari Logicæ palmam præripit: Hæc Artis ratiocinandi complementum & fastigium summum: Hæc præclarum illud Depositum, quod Deus aliquibus ex humano genere, ceu Rationis aliquod *Εὐρί-μηνος*, indulsit, cujus ope ad infinitæ suæ sapientiæ & bonitatis vestigia in abditissimis naturæ recessibus contemplanda propius admitterentur.

Primus in hac investigandi methodo labor est, ut quantitates propositi Problematis, tam datæ sive cognitæ, quam incognitæ seu quæsitæ, characteribus quibusdam a notis numeralibus diversis designentur; & usus quidem obtinuit, ut id fiat literis Alphabeti, quarum priores melioris distinctionis ergo ad cognitæ, postremæ ad incognitæ significandas a Principe Geometrarum CARTESIO adhibentur. Appellemus itaque supremum fistulæ cylindricæ spatium ab aere occupatum *a*; spatium reliquum mercurio impletum *b*; cylindrum mercurialem æquiponderantem simili cylindro atmospherico, *b + c*; utpote in hac nostra hypothese (in qua tubus 29 digitis brevior est) mercurio fistulæ incluso altiore; adeo ut per litteram *c*, indigitetur excessus, quo 29 digiti mercurii, \* altitudinem mercurii fistulæ infusi superant: profunditatem denique quæsitam, ad quam mercurius in fistula subsidet, vocemus *y*. Quod si nobis solvendum proponeretur speciale exemplum, sufficeret equidem, soli incognitæ quantitati litteram assignare, retentis quantitatibus cognitarum numeris; interim longe præstabilius est,

\* Nos hic & in sequentibus litteras adhibemus, ad indigitanda promiscue sive spatia, sive altitudines, sive pondera; quoniam in cylindris æqualium basis & materiæ homogeneæ omnia hæc tria sunt proportionalia.

est, etiam cognitis attribuere litteras, quoniam hoc pacto non tantum præsens solvitur exemplum, sed eadem opera universalis invenitur Regula, omnia solvendi similia exempla, in quibus quantitates cognitæ continuo variæ & variæ accipiuntur; unde simul patere poterit, quantum habeat prærogativæ præ Algebra Numerosa Veterum, Recentiorum Speciosa, VIETÆ & præcipue CARTESII industria ab interitu vindicata & in lucem reproducta, postquam ab antiquissimis Mathematicis, ARCHIMEDE, DIOPHANTO, aliisque, multorum opinione, tecta & dissimulata fuisset, ut propter abstrusissimas res hac methodo a se inventas tanto majori posteris admirationi forent.

Assignato sic cuique quantitati suo charactere, percurrenda est totius Problematis series, ordine quo omnium patet naturalissimo, usque dum pateat modus, unam eandemque quantitatem duobus modis exprimendi, in quo consistit *Æquatio*. Neque vero (in qua opinione versantur multi, qui nescio quæ difficultatum spectra hic sibi fingunt) in incertum palpando hoc negotium expediri opus habet, quasi nulla de eo constans præscribi possit regula. Regula enim unica eademque universalis, quam Tyronibus probe inculcatam vellem, hæc est, *Quod nihil aliud faciendum nobis sit cum characteribus istis Algebraicis, quam quod faceremus, si numero aliquo ad libitum assumpto, cum examinare vellemus, an sit optatus ille, qui queritur, necne? Quid faceremus? Id quod fecimus supra, ubi per approximationem rem inquisivimus. Quid fecimus? Examinavimus assumptum numerum, an satisfaceret conditioni in Problemate requisitæ. Id ipsum ergo & nunc præstebimus, hoc solo cum discrimine, quod cum ibi Algorithmus Arithmeticus in usum fuerit adhibitus, nunc Algebraicus, quia eum litteris nobis res est, venit adhibendus. Sed ut utriusque operationis analogiam, seu convenientiam, eo evidentius perspiciatis, calculo literali eadem hic opera adjungam numeralem, assignato cuilibet literæ certo valore numeris expresso: Esto verbi gr. in fistula 21 poll. longa, Altitudo inclusi aeris (quam vocavimus  $a$ ), 7 digitorum, Altitudo infusi mercurii (quam diximus*

M m 3. . . . . d).

No. XXII.  $b$ , ) 14 digit. Excessus quo superatur ejus pondus a pondere similis cylindri atmosphærici (dictus nobis  $c$ ) 16 dig. mercuri: adeo ut pondus integri cylindri atmosph.  $b + c$ , sit 30 dig. mercuri. Pro quaesita denique descensus quantitate  $y$ , assumti sint pro lubitu 3 digiti. Quo facto uterque porro calculus sic instituitur.

Quoniam spatium aere naturali refertum est  $a$ , (7 dig.) spatium vero a mercurio descendente deferendum  $y$ , (3 dig.) erit spatium ab aere dilatato occupandum  $a + y$ , (10 dig.) Cumque juxta Ax. IV. Raritates aeris, id est, spatia ab eadem aeris quantitate successive occupata sint in ratione reciproca Pressionum, quas in utroque statu exerit, erit volumen aeris dilatati  $a + y$ , (10 dig.) ad volumen aeris naturalis  $a$ , (7 dig.) uti vicissim pressio hujus [ quæ per Ax. III. æquivalet ponderi atmosphærico, seu per Lemma nostrum ponderi mercuriali  $b + c$  (30. dig.) ] ad pressionem illius; quæ propterea per auream regulam dividendo productum secundi & tertii termini per primum, invenitur  $(ab + ac) : (a + y)$ , (21 dig.) cui si adjiciamus pondus mercurii post descensum in tubo residui, nempe  $b - y$  (11 dig.) erit tota pressio, quam subit pars mercurii stagnantis N,  $(ab + ac) : (a + y) + b - y$  (32 dig.) altera vero, qua afficitur stagnantis mercurii portio S est  $b + c$  (30 dig.) Inter has duas pressionem instituenda deinceps est collatio, utpote quæ per Ax. I. æquari sibi invicem debent; & quidem quantum ad numeros 32 & 30, quoniam hi inæquales deprehenduntur, ulterius progredi non possumus, sed ex hoc ipso cognoscimus, assumtum numerum 3 dig. non indigitare veram descensus quantitatem; nihilque aliud nobis agendum relinquitur, quam ut de novo assumamus aliquem numerum, cumque similiter examinemus. Sed quod spectat quantitates literales  $(ab + ac) : (a + y) + b - y$  &  $b + c$ , facile animadvertitis, Auditores, posse fieri, ut vel æquales vel inæquales sint, pro diverso valore, qui affingi potest quantitati incognitæ  $y$ . Peculiare igitur superest negotium ad explorandum, quisnam præcise valor huic literæ assignandus veniat, ut dictæ quantitates inde æquales resultent. Quem in finem supponenda statim est æqualitas inter illas; unde emergit id quod vocari solet *Æquatio*, quæ sic indigitatur,

gitatur,  $(ab + ac) : (a + y) + b - y =$  seu *equale*  $b + c$ . Pro- No. XXII.  
 ximum dehinc est, ut *Æquatio* ista reducatur. Artificium *Reduc-*  
*tionis* in eo consistit, ut quantitas incognita  $y$  statuatur sola pro  
 uno *æquationis* membro, translatis omnibus cognitis in alteram  
 partem, citra tamen *æqualitatis* utriusque membri alterationem;  
 quod negotium fundatur in simplicissimis illis axiomatibus: *Si æ-*  
*qualibus equalia addas, auferas, multiplices, &c. tota, residua vel*  
*producta, &c. sunt equalia*; hac enim ratione fiet, ut valor in-  
 cognitæ  $y$  inveniatur in puris cognitis. Quocirca cum in utro-  
 que inventæ *æquationis* membro sese offerat lit.  $b$ , illa ante om-  
 nia expuncta relinquetur  $(ab + ac) : (a + y) - y = c$ . Porro  
 quia in proposita *æquatione* deprehendo fractionem, illam redu-  
 co ad integra, multiplicando utrumque *æquationis* membrum per  
 fractionis denominatorem; sic habebō  $ab + ac - ay - yy = ac +$   
 $cy$ . Postmodum ablata utrinque quantitate  $ac$ , quæ utrobique  
 communis reperitur, restabit  $ab - ay - yy = cy$ . Deinde, ut  
 quantitas  $yy$ , quæ negata existit, affirmata fiat, addatur utrique  
 membro, eritque  $ab - ay = cy + yy$ . Et ut ab una parte re-  
 maneat sola, auferatur pariter  $cy$ , ut sit  $yy = -ay - cy + ab$ .  
 Quandoquidem autem quantitas incognita ad duas hic dimensio-  
 nes ascendat, consulendæ sunt † *æquationum quadratarum* For-  
 mulæ, quarum beneficio invenitur  $*y = -\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}c + \sqrt{(\frac{1}{4}aa +$   
 $\frac{1}{2}ac + \frac{1}{4}cc + ab)}$ ; sic ut tandem valor ignotæ quantitatis in quan-  
 titatibus pure cognitis repertus fuerit. Quo pacto Additiones,  
 Subtractiones, Multiplicationes & Divisiones Algebraicæ ad hunc  
 calculum ineundum necessariae peragi debuerint, ostendere con-  
 sulto prætermisi; quoniam ii, in quorum præcipue gratiam hæc  
 subjunxi Analysin, Algorithmum istum privatim jam a me edocti  
 sunt, sic ut aliud nihil superesse videretur, quam ut ejus quoque  
 usum

† Eas videbis in principio Geomet. CARTESII.

\* Juxta enim hæc formulas valorem quæsitæ quantitatis indicat binomium,  
 constans ex dimidio quantitatis cognitæ, rectangulum cum radice incognitæ in  
 proposita *æquatione* constituentis (quod dimidium hic est  $-\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}c$ ) & ex la-  
 tere quadrato aggregati resultantis e quadrato hujus dimidii (nempe  $\frac{1}{4}aa +$   
 $\frac{1}{2}ac + \frac{1}{4}cc$ ) & quantitate pure cognita (quæ hic est  $ab$ .)

No. XXII. usum & applicationem in præclari cujusdam, facilis tamen Problematis solutione conspicerent. Ex invento autem quæsitæ quantitatis valore, talis tandem strui potest universalis Regula, & verbis ita concipi:

\* Si quadratum dimidiæ altitudinis inclusi aeris ( $\frac{1}{4}aa$ ), & quadratum dimidii excessus, quo pondus atmosphæricum superat pondus mercurii inclusi ( $\frac{1}{4}cc$ ), una cum illo, quod provenit ex altitudine inclusi aeris bis multiplicata, semel in dimidium dicti excessus, ( $\frac{1}{2}ac$ ), semel in altitudinem mercurii inclusi, ( $ab$ ), in unam summam conjiciantur; & ab aggregati latere quadrato ( $\sqrt{\frac{1}{4}aa + 8c.}$ ) subtrahatur dimidium altitudinis inclusi aeris ( $\frac{1}{2}a$ ), una cum dimidio dicti excessus ( $\frac{1}{2}c$ ), residuum indicabit, quousque deprimendus sit mercurius.

Si cui jam volupe sit, is poterit hanc Regulam extemplo ad plures speciales casus applicare, inque singulis calculo subducere quæsitam descensus quantitatem: Ut si in Fistula 21 poll. longa relictæ fuerint 7 aeris digiti, gravitasque atmosphære æquiponderare deprehensa sit  $29\frac{1}{4}$  dig. mercur. qualiter illam domi in Baroscopio ante bihorium saltem observavi, significabit lit.  $a$ , 7. dig.  $b$ , 14 dig.  $c$ ,  $15\frac{1}{4}$  dig. adeoque

$\frac{1}{4}aa = 12\frac{1}{4}$		A summæ latere quadr. $= 147.$ proxime
$\frac{1}{4}cc = 58\frac{3}{4}$		subtr. $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c = 11\frac{1}{2}.$
$\frac{1}{2}ac = 53\frac{1}{2}$		Relinquitur $y = 3\frac{1}{2}$ proxime
$ab = 98$		pro futura quantitate descensus
Summa $= 221\frac{3}{4}$		mercurii.

Atque hoc modo constructa est ad singulos casus sequens Tabella.

\*. Eandem vid. in Diss. de Gr. Æth. p. 101. 102.



*Tabella pro cognoscenda quantitate descensus mercurii, in Fistula No. XXII.  
21 digit. longa, eo tempore, quo atmosphaera 29½ digitis  
mercurii aequiponderat:*

Quantitas aeris Quantit. descen- in tubo relicta. sus mercurii.			Quantitas aeris Quantit. descen- in tubo relicta. sus mercurii.		
dig.	dig.	part. sedec. dig.	dig.	dig.	part. sedec. dig.
1. —	1.	11. paulo min.	11. —	3.	4. p. pl.
2. —	2.	9. p. plus.	12. —	3.	1. p. min.
3. —	3.	2. p. min.	13. —	2.	13. p. min.
4. —	3.	7. p. pl.	14. —	2.	8. p. pl.
5. —	3.	10. p. pl.	15. —	2.	4. p. min.
6. —	3.	12.	16. —	1.	14. p. pl.
7. —	3.	12. p. pl.	17. —	1.	9. p. min.
8. —	3.	11. p. pl.	18. —	1.	3. p. pl.
9. —	3.	10. p. min.	19. —	0.	12. p. min.
10. —	3.	7. p. pl.	20. —	0.	7. p. min.
			21. —	0.	0.

Inspiciendo hanc Tabellam non sine delectatione observabit Lector, quo pacto descensus quantitas initio gradatim accrescat, & postmodum sensim iterum decreseat. Quare cum descensus omnium maximus producat a 7 aeris pollicibus, in hoc Experimentum sumere constitui, ut effectus eo magis redderetur conspicuus.

*( Hic factum est Experimentum cum optato  
successu. )*

Ex istis omnibus, velut documenti loco, colligere potestis. Auditores, quantum momentum conferat Mathesis Physicæ, cui aliquid amplius, quam maiorem saltem perfectionis superaddit gradum, ut nuper quoque Thesis meis IX & X miscell. innui; eo quod destitutus ejus ope Physicus supputare nequeat, qua præ-

*Jac. Bernoulli Opera,*

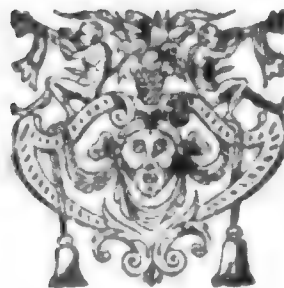
N n

cise

No. XXII. cise quantitate effectus ex suis principiis sequi debeat, quod tamen omnino requiri videtur ad hoc, ut suarum assertionum certus esse possit. Pone namque, Physicum aliquem Matheseos ignarum idem sibi Phænomenum explicandum suscepisse, vagis autem & nimis generalibus, aut etiam falsis usum esse principiis, ex quibus nihilominus ratiocinando nobiscum collegerit, nec ascensurum, nec eadem altitudine suspensum hæsurum, sed aliquousque descensurum mercurium; tametsi iste descensus, si ab aliquo hujus rei gnaro sub calculum revocaretur, deprehenderetur differre ab illo, quem nos calculo subduximus, & experientia confirmavimus. Talis namque Physicus sibi aliisque persuadebit, se genuinam Phænomeni dedisse causam, postquam instituto experimento descendere repererit mercurium; quamvis illum & sibi & aliis imponere, evidenter iis liqueat, qui descensus istius quantitatem calculo examinare noverint.

Ita demum, Auditores optimi, valete.

F I N I S



No. XXIII.

No. XXIII.

# DNI. BERNOULLI

## NARRATIO CONTROVERSIÆ

*Inter DN. HUGENIUM & Abbatem CATELANUM agitatae de Centro Oscillationis quæ loco Animadversionis esse poterit in Responsionem DN. CATELANI, num. 27. Ephem. Gallic. anni 1684, insertam. †*

Excerpta ex Litteris DN. BERNOULLI  
Lipsiam missis.

**M**ENSE Septembri Anni 1681, Abbas CATELANUS Abba Erud. Lips. 1686. Jul. p. 356. propositionem quandam tractatus CL. HUGENII, quem de *Horologio Oscillatorio* incipserat, adortus est, formata contra illam objectionem; in qua, quia mentem suam minus feliciter expressit, ansam dedit isti controversiæ, quæ huc usque fere inter illos viguit.

Verum quidem est eam, initio Anni 1682, objectionis suæ paucis additis lineis variationem quandam induxisse; sed quoniam ejus partes satis adhuc male cohærentes reliquit, eam in mente Lectoris sui excitavit opinionem, quasi persuasum haberet summas altitudinum, e quibus pondera alicujus penduli junctim descendunt,

N n 2

cendunt,

† *Supra* No. X.

N. XXIII. cendunt, & ad quas postmodum separatim ascendunt, inæquales esse debere, hanc solam ob causam, quod, *priores altitudines sint proportionales ipsis ponderum celeritatibus, posteriores vero non nisi quadratis istarum celeritatum.* Quare etiam HUGENIUS, id unicum CATELANO scrupulum movere ratus, respondere abstinuit, usque in mensem Junium, quo tandem calamum arripuit, ac exemplo duorum numerorum 5 & 10, duorumque aliorum 3 & 12, breviter monstravit fieri utique posse, ut binæ quantitates eandem cum binis aliis conficiant summam, etiamsi diversam ab illis rationem habeant; neque tum temporis in dubium revocavit *πρωτον* CATELANI *ψευδος*, quod tamen in prima jam objectionis impressione manifeste satis prodiderat, dum supposuit: *Pendulum ex duobus ponderibus compositum, eandem acquirere celeritatem, quantam acquirat summa pendulorum simplicium*: id vero sicco pede præterit HUGENIUS, vel quod non penetrarit statim, ob nullam periodorum connexionem, quorsum falsa ista CATELANI suppositio tenderet, vel potius quod illi, ceu verisimili admodum, tum ipsemet adstipularetur. CATELANUS interea *Hugeniano* responso non contentus, excepit 20 Julii 1682, ac terminis algebraicis rem aggressus est, eodem innixus fundamento: *Quod totalis celeritas penduli compositi aquet summam celeritatem partium ejus separatarum.* Quo facto, controversia ista ultra annum sopita jacuit.

Me quod spectabat, cui HUGENII liber tum nondum visus, nedum lectus fuerat, scopum alium non habebam, quam illustrare ejus responsionem, remque examinare, qualiter ab ipso examinata, atque in Actis recensita fuerat. Animadvertens itaque CATELANI principium ab HUGENIO non refutatum esse, & ego illud intactum reliqui; sufficere mihi ratus, si *Hugenianum* responsum simpliciter applicarem ad præsentem controversiam, proposito cum in finem exemplo penduli, e duobus æqualibus ponderibus compositi; ubi innuere saltem volui quod, supposito pro totali ejus celeritate numero ternario, (quidquid statuatur de celeritatibus utriusque separatim spectati ponderis, dummodo cæ sint in ratione 2 ad 1) quadrata  $\frac{1}{4}$  &  $\frac{1}{4}$  ex mente HUGENII signifi-

significare debeant non nisi *rationem altitudinum*, ad quas ascendunt separata pondera, minime vero *ipsas altitudines* (quod ipse quoque postmodum indigitavit HUGENIUS in secunda Responsione, 8 Jun. 1684;) partim quoniam celeritates atque altitudines, utpote quantitates heterogenæ, se mutuo mensurare non possunt; partim etiam quia ipse CATELANUS urgere saltem videbatur, altitudines esse *proportionales* quadratis, vel *sicut* quadrata celeritatum; tametsi in proxime sequenti calculo quadrata ista pro ipsis altitudinibus adhibuerit. Comparato mihi paulo post, & perlecto HUGENII libro, animadvertēbam, Propositionem controversam ex priore Hypothesium, quas Auctor initio stabiliverat, adeo evidenter inferri, ut neutra infringi possit, quin simul evertatur altera: quo circa judicabam, si CATELANO falsa fuisset visa Propositio, cum potius ipsam adoriri debuisset Hypothesin, magnumque illud inibi contentum Principium Mechanicum. Verum enim vero, cum hujus Principii veritatem nullo jure in dubium revocare possem, atque simul etiam seriem ratiocinii a CATELANO satis confusè propositi evolvere cœpissē; errorem ejus illico detexi, falsamque cognovi esse, qua nitebatur, regulam, nimirum: *Celeritatem totalem penduli compositi aequalem esse summa celeritatum partium ejus separatarum.*

Atque ut ostendam animadversum mihi fuisse errorem, priusquam HUGENII Epistola die 8 Jun. lucem aspexisset; offeram hic causam physicam, omissam ab HUGENIO, qua fit, ut penduli compositi celeritas perpetuo minor sit celeritate partium ejus separatarum: Ponamus, majoris evidentiae ergo, pondera penduli A & B in linea inflexili DB libere hinc inde moveri posse; sic ut linea hæc, dum rotatur circa axem D, quamvis secum rapiat pondera, non tamen impediat descensum illorum in linea recta versus centrum Terræ. Quo posito, constat utrumlibet pondus, sigillatim dimissum, eadem celeritate latum iri, qua ferretur absque virga DB; ut pote nec a virga, nec ab ejus axe ullo modo impeditum; idest, si pondus A absque virga certo tempore conficiat spatium AH, & pondus B spatium æquale BN, utrumque etiam cum virga, sed sigillatim, dimissum eodem tempore

N n 3

idem

N XXIII. idem spatium  $AH$  &  $BN$  conficiet. Constat insuper quod, si gravitas in utrumque pondus ageret viribus, quæ proportionatæ forent ipsorum respectivis ab axe distantis, virga nullum adhuc ipsorum descensui afferret impedimentum; propterea quoniam, exacto certo tempore, unum eorum reperiretur in  $H$ , & alterum in  $I$ , vel prius in  $L$ , posterius in  $N$ , sive absque virga, sive cum virga, sive sigillatim, sive conjunctim dimitterentur. Verum enim vero, quoniam gravitas in utrumque pondus agit viribus æqualibus, sic ut pondera eodem tempore æqualia spatia  $AH$  &  $BN$  transigere annitantur; & tamen interea pondus  $A$  junctim dimissum, ob inflexilem virgam, nequit pertingere nisi ad  $L$ , dum pondus  $B$  jam est in  $N$ , hinc sequitur, gravitatis vim in pondere  $A$  non esse exhaustam; adeoque residuum harum virium, ex una parte urgere debere corpus  $B$ , ex altera ipsum axem  $D$ , eundemque premendo aliquam sui partem ibidem insu mere & deperdere; siquidem virga, hocce casu, instar vectis considerari possit: prout extra dubium est, quod si corpus  $B$  infinite tarde moveri, idest, firmum & stabile esse intelligatur, sicut axis  $D$ ; corpus  $A$  partem sui ponderis, æque in axem  $D$ , atque in corpus  $B$  transferret. Ex hæcenus dictis colligere proclive est, si quis examinare vellet quantam partem celeritatis suæ pondus  $A$  in premendo axe  $D$  consumere debeat; cum exinde, imitando Dn. CATELANI ratiocinium, veritatem aut falsitatem *Hugenianæ* Hypotheseos, inque hac fundatæ propositionis detegere posse.

Rogantur hac occasione Eruditi, ut examinent, qualem legem communicationis celeritatum observent corpora mota, quæ ex una parte innituntur firmo fulcramento, ex altera alii corpori itidem, sed tardius moto: si namque celeritatis excessus, qui hinc inde communicandus est, in eadem ratione distribueretur, in qua distribuitur onus aliquod, quod vecti duobus sustentato fulcris impositum est, nimirum in reciproca distantiarum mobilis a fulcris; tum imitando ratiocinium Dn. CATELANI, deprehenderemus summam altitudinum, ad quas ascendunt separata penduli pondera, vicissim nunc minorem esse summa altitudinum, e quibus  
antea



antes conjunctim descenderant, quod iterum *Hugenianam* Propo- N. XXIII. sitionem everteret.

En calculum: Est altitudo A L  $= 1$  ped.  
 altitudo B M  $= 4$  ped.  
 Celeritas ponderis A acquisita in puncto L, ubi descendit separ-  
 ratim  $= 1$   
 Celeritas ponderis B acquisita in puncto N, quando cadit separ-  
 ratim  $= 2$   
 Celeritas ponderis A acquisita in puncto L, quando descendit  
 conjunctim  $= x$   
 Igitur excessus celeritatis ponderis A, qui tam in axem, quam in  
 pondus B redundat  $= 1 - x$   
 Et pars hujus excessus, quæ soli ponderi B communicatur  
 $= \frac{1}{4} - \frac{1}{4}x$   
 Tota ergo celeritas ponderis B in puncto N cum conjunctim  
 cadit  $= 2\frac{1}{4} - \frac{1}{4}x$   
 Atqui vero  $2\frac{1}{4} - \frac{1}{4}x : x = 4 : 1$ . Igitur  $x = \frac{8}{17}$  &  $4x = \frac{16}{17}$   
 eorumque quadrata  $\frac{64}{289}$  &  $\frac{256}{289}$  quorum summa  $4\frac{12}{17}$  minor est  
 $1 + 4 = 5$ .

Antequam finiam, in favorem Dn. CATELANI hoc monebo, quod etiamsi commune gravitatis centrum, juxta illum, altius ascendere deberet, quam descendit; nondum tamen sequatur, repertum fore motum perpetuum, ut sibi persuadet Ill. HUGENIUS; quoniam in istis abstrahi solet ab aeris resistentia, a diminutione celeritatis, quæ necessario sequitur disruptionem vinculi, quo connectebantur partes penduli, aliorumque obstaculorum; prout ipse quoque hæc aeris resistentia in causa est, cur simplex pendulum motum suum non continuet, ut maxime in Hypothesi *Hugeniana* ad eandem ascendere debeat altitudinem, a qua descendit.

Videantur Num. XLIV. & XLV.

No. XXIV.

N°. XXIV.

# D<sup>N</sup>. BERNOLLI

## DEMONSTRATIO

*Rationum, quas habent series numerorum naturali progressionem sese insequentium, vel quadratorum, cubicorum, &c. item trigonali, pyramidalium &c. ad series numerorum totidem maximo æqualium,*

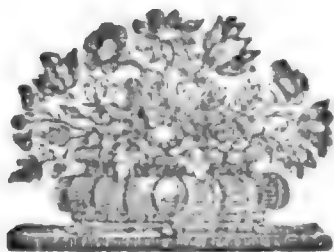
Excerpta ex iisdem litteris.

*Acta Erud.  
Lipf. 1686.  
Sept. p.  
360.*

**W**ALLISIUS in Arithmetica Infinitorum, id sola inductione investigare docet; cui demonstrandi modo, cum parum scientificus sit, alium cumque facillimum hic substituam: Exempli gratia; Explorandum sit, an ratio seriei numerorum naturali progressionem se excipientium & a cyphra inchoantium, ad seriem totidem maximo æqualium semper sit subdupla. Pono rem examinatam esse aliquousque; terminumque ultimum, in quo examinando substiri, appello  $a$ : eritque numerus terminorum, ob initialem cyphram, unitate major, nempe  $a + 1$ : adeoque summa totidem ultimo æqualium  $aa + a$ ; cui cum summa progressionalium inductione supponatur reperta fuisse subdupla, erit hæc  $(aa + a) : 2$ . Augeatur jam series progressionis uno termino; eritque adjectus terminus  $a + 1$ , qui junctus summæ præcedentium  $(aa + a) : 2$  producit  $(aa + 3a + 2) : 2$ , summam totius progressionis: sed cum numerus terminorum jam sit  $a + 2$ ,  
crit

erit summa totidem adjecto ultimo æqualium,  $aa + 3a + 2$ , quæ N. XXIV. summæ progressionum itidem dupla existit. Quod si iste terminus, qui modo vocatus erat  $a + 1$ , appelletur  $a$ , insuperque novus progressionem adjiciatur, qui erit  $a + 1$ , eadem valebit demonstratio. Cum ergo constet, rationem subduplam, in qualibet serie deprehensam, inferre eandem in serie uno termino aucta, atque hinc etiam in serie duobus, tribus, &c. infinitis terminis aucta; sequitur universim, quod si hæc proprietas in paucis seriebus inductione reperta fuerit, pariter communis sit omnibus. Q. E. D.

Ad eundem modum demonstrabitur, rationem summæ seriei quadratorum a cyphra incipientium, ad summam totidem maximo æqualium esse subtripla majorem, excessu quem indigat ea ratio quam habet unitas ad sextuplum radicis quadratæ termini maximi: item summam seriei trigonalium a duabus, pyramidalium a tribus &c. cyphris inchoatorum, ad summam totidem maximo æqualium esse subtriplam, subquadruplam &c. supponendo nimirum, id aliquousque saltem inductione compertum esse, illudque deinceps demonstrando de serie uno termino aucta,



No. XXV.

E X A M E N .  
P E R P E T U I M O B I L I S ,  
P A R I S I I S P U B L I C A T I ,  
*Et in Novellis Reipublicæ literariæ Roterodamen-  
sibus mense Nov. 1685. Art. VII  
ad discutiendum propositi.*

*Acta Erud.  
Lips. 1686.  
Dec. p.  
623.*

**P**OTUISSEMUS descriptione Machinæ hujus supersedere; quippe  
cujus defectus in memoratis Novellis hujus anni, Articulo VII,  
mensis Aprilis, p. 444 ex Transactionibus Anglicanis, mensis  
Decembris 1685, pag. 1240. a D. PAPINO, Regiæ Societatis An-  
glicanæ Socio, jam dum detectus habetur: nisi a Clarissimo Viro JAC.  
BERNOULLI nobis submissa peringeniosa Machinæ dictæ discussio, u-  
tramque Lectoris B. ulteriori inquisitioni exponere nos admonuisset. Descrip-  
tionem vero machinæ non ipsius Auctoris verbis exhibemus, sed laudati D.  
PAPINI, ex Anglico in Latinum idioma translatis; adjecta ejusdem cen-  
sura, quam Bernoullianum deinde Examen excipiet. Sic vero D. PA-  
PINUS:

Propositionem de motu quodam perpetuo, non ita pridem in Galliis  
impressam, cum ita involuta sit, ut non nisi difficillime ab iis possit in-  
telligi, qui non magnopere ejusmodi descriptionibus assuevere, sequen-  
ti modo conatus sum explicare.

D E F, ( Fig. 1. ) est follis 40 pollices longus; qui deductis alis;  
F ab E, expandi potest. Sit vero idem undique exacte occlusus, præ-  
terquam ad foramen E, cui tubus E G, 20 aut 22 pollices longus,  
exactissime adferruminandus; hujus vero altera extremitas vasculo G,  
pleno mercurii, & prope medium follis constituto, immittenda.

A, est axis, circa quem follis revolvi potest.

B, sacoma inferiori parti follis affixum.

C, pondus cum pinna, retinendo folli in situ erecto;

Jam

Jam si supponatur, follem sic erectum, tantum tertia aut quarta sui No.XXV. parte distentum, plenumque mercurii esse; perspicuum est, mercurium 40 pollices altum, descensurum ad 27 circiter pollices, juxta experimentum Torricellianum: consequenter follis se versus E expandet, relinquetque ibi spatium vacuum: spatium hoc replebitur mercurio, in vasculo G contento, qui per tubum G E ascendet, cum tubus hic non nisi 22 pollices longus sit: ob hanc causam follis magis magisque se divaricabit, usque dum mercurius ascensum continuans, supremum follis tam grave reddat, ut inferior pars a pinna C se expediat, follisque ad inversum prorsus situm revolvatur; nisi vasculum G ita convenienter collocatum eundem in situ horizontali, juxta Figuram 2 detineret: pars etiam F alia pinna C sistenda est. Tunc mercurius pondere suo ex folle, per tubum E G, defluet in vasculum G; ipseque follis eo usque se contrahet, ut pars E F ita levis evadat, ut sacoma B valeat partem F a pinna C liberare: tum follis se iterum eriget, ut in Figura 1; mercurius in eo residuus, descendet denuo ad altitudinem 27 pollicum, & consequenter cæteri effectus omnes supra memorati contingent, motusque in perpetuum continuabitur. Huc usque Auctor Gallicus.

Ad hoc notandum est: quod follis se non distendere possit, per pressionem interiorem, nisi hæc pressio fortior sit exteriori: jam vero in hoc casu pondus atmosphæræ libere premit exteriorem follis partem; verum ad interiorem pervenire non potest, nisi per tubum G E; qui continens 22 pollices perpendiculares mercurii, ita contrahitur pressioni aeris, ut supponendo hanc pressionem esse 27 pollicum mercurii, eadem hæc non possit premere interiorem partem follis, nisi pondere quinque pollicibus mercurii perpendicularibus æquipollenti.

Unde concludere licet, pressionem atmosphæræ intra follem plus debilitatam esse, quam ut mercurium in dicto folle contentum possit adjuvare; id quod calculo facile ostendi potest, dictumque follem, juxta Fig. 1. erectum, clausum potius perstiturum, quam se expansurum. Ut ita, nullo laboris sumptuumve periculo facto, quivis certus esse possit, machinam ejusmodi omnino fore frustraneam. *Hællenus D. PAPINUS.*

# E X A M E N

## B E R N O U L L I A N U M.

*Acta Erud.  
Lips. 1686.  
Dec. p.  
625.*

**M**ACHINA hæc peringeniosa est, & cum legibus hydrostaticis prima fronte egregie conspirare videtur: sed hoc habet peculiare, quod qua parte eam optime cum iis consentire putes, eadem si penitus inspexeris, quam maxime iis repugnare deprehendas. Consistit autem in specie quadam Follis, 40 digitos alti, impletique mercurio, cusptide sua deorsum, base sursum versa, & circa axem horizontalem, alterutrius alæ medio applicatum, mobilis. Existimat enim Inventi hujus Auctor (sed falso, ut mox videbimus) argentum vivum in folle descensurum ad consuetam, quam in experimento Torricelliano obtinet, 27 digitorum altitudinem, atque hoc suo descensu dilataturum alas follis, relicto in summitate ejus vacuo, quod alio deinceps mercurio, mediante aeris pressione, adimplendum sit. Ansam erroris haud dubie captavit inde, quod videret hydrargyrum non tantum in fistulis cylindricis, sed in tubis quoque inferne acuminatis & conum referentibus, descendere solere: non considerans, aliam longe hac in parte rationem esse mercurii suspensi in cono firmorum laterum & acuminis perforati, per quod defluere possit in vasculum; aliam rationem mercurii in folle ejusmodi, seu cono subtus impervio, detenti, & vicissim per solam laterum aperibilium expansionem descensum molientis. Dico namque, multo majorem requiri quam 40 digitorum in tali cono inclusoque mercurio altitudinem, ad æquipondium faciendum cum externo aere, latera coni introrsum premente; nedum, ad ejus pressionem superandam. Cujus assertionis veritatem, simplicioris calculi, & majoris evidentiae ergo, ostendam solum in tri-

an-



angulo, facile postmodum accommodando ad pyramides conos. N. XXVI. ve, in quibus, ob dimensionum pluralitatem, demonstratio valebit a fortiori.

Estoque itaque Triangulum Ifofceles ABC, (Fig. 3) perpendiculariter erectum, cujus angulus, seu vertex B, deorsum prospiciens libere aperiri claudique possit; sic ut ejus crura AB, CB repræsentent quasi duos vectes mobiles circa punctum B, ceu hypomochlium suum. Area porro trianguli tota repleta sit mercurio, qui divisus concipiatur in filamenta innumera, qualia sunt  $db$ ,  $db$ , tum inter se, tum axi DB parallela, quæ pondere suo agant in crura AB, CB, eaque divaricare conentur; dum totidem filamenta atmosphærica  $eb$ ,  $eb$ , extus urgentia, eadem comprimere annituntur: ubi statim apparet, tametsi filamentum mercuriale DB, 40 digitos longum, pondere exsuperet æque crassum filamentum atmosphæricum; bene tamen fieri posse, ut omnia filamenta mercurialia simul sumpta, ut pote continue versus A & C decrefcentia, multo minus habeant momentum atmosphæricis omnibus simul sumptis, ceu pondere & longitudine ad sensum æqualibus. Sed ut palam fiat, quanta debeat esse altitudo trianguli seu longitudo filamenti DB, ut momenta utrobique redantur æqualia; considerandum, pondera filamentorum mercurialium  $db$ ,  $db$ , constituere ab A versus B [perinde ut ex altera parte quoque] infinitam seriem arithmetice progressionum, 0, 1, 2, 3, 4, &c. usque ad DB, cujus pondus appellemus  $x$ : distantias vero eorundem respectivas ab hypomochlio B [posita AB =  $a$ ] esse  $a$ ,  $a-1$ ,  $a-2$ ,  $a-3$ ,  $a-4$ , &c. usque ad  $a-a$ ; adeoque momenta, utpote ex ratione ponderum & distantiarum composita, 0,  $a-1$ ,  $2a-4$ ,  $3a-9$ ,  $4a-16$  &c. usque ad  $ax-ax$ , quæ series est primanorum, diminuta serie secundanorum, cujus proin summa est  $ax:6$ . Nam quamquam momenta revera minora sint, propter obliquam filamentorum actionem in crura trianguli, hoc tamen non officit calculo; quoniam, ex altera parte, filamenta atmosphærica actione sua reflexa eodem obliquitatis angulo latera ista feriunt, atque ita eorum momenta in eadem ratione minuuntur. Constituunt autem isto-

N. XXVI. rum filamentorum atmosphæricorum pondera seriem æqualium; quorum singula vocentur  $p$ ; distantiae eorum ab hypomochlio B, eadem sunt quæ supra: unde resultat series momentorum,  $pa$ ,  $pa - p$ ,  $pa - 2p$ ,  $pa - 3p$ ,  $pa - 4p$ , &c. usque ad  $pa - pa$ , cujus summa existit  $pa a : 2$ . Et quoniam momenta hinc inde supponuntur æqualia, erit igitur  $aa x : 6 = aap : 2$ , sive  $x = 3p$ : quod indigitat, pondus filamenti mercurialis DB triplo majus esse debere pondere similis filamenti atmosphærici; id est, [si pondus atmosphæricum, numero rotundo, 30 digitis mercurialibus æquivalere supponamus] follem triangularem 90 digitos altum requiri, antequam inclusus mercurius æquilibrium duntaxat cum aere constituat, nedum illi prævaleat. Quod si vero in pyramide vel cono similis calculus institueretur: deprehenderetur, omnino quadruplo majorem, scilicet 120 digitorum in illis altitudinem deposci.

Sed & porro, etiamsi follis triangularis 90, aut pyramidalis conicus.ve 120 digitis fieret altior, non tamen existimandum est, descensurum propterea in illo mercurium ad dictos usque 90, vel 120 digitos: hærebit enim iis adhuc notabiliter altius, ob rationem quod descendendo deserit supremam alarum follis partem: in quam pergit agere aer externus, qui majori hac ratione sustinendæ altitudini par est. Si (Fig. 4) Latus trianguli AB vocetur  $l$ ; altitudo mercurii BD, [quam obtinet in triangulo ABC,]  $mp > 3p$ ; & altitudo ejusdem BE [ad quam descendit in folle expanso ABC,]  $y$ ; reperietur æquatio  $y^4 - 3plly + mmppll - m^2p^2 = 0$  \*. Quo circa, posita altitudine DB, seu

\* Quoniam in folle expanso non major est mercurii quantitas quam in contracto, erit  $BD \times DA = BE \times EF$ , seu [posito  $BF = x$ ]  $mp \times \sqrt{(ll - mmpp)} = y \sqrt{(xx - yy)}$ . Momenta autem filamentorum atmosphæricorum in totum latus BA, efficiunt summam  $= \frac{1}{2} pll$  [hic enim latus vocatur  $l$ , quod supra dicebatur  $a$ ]. Momenta vero filamentorum mercurialium in partem BF [ $x$ ] lateris BA agentium, & quorum maximum est

BE [ $y$ ], efficiunt summam  $= \frac{1}{2} xxy$  [Scilicet hic  $x$  idem est quod supra  $a$ , &  $y$  idem quod supra  $x$ ]. Ergo, ob æqualia momenta, habemus  $\frac{1}{2} pll = \frac{1}{2} xxy$ , vel  $xx = 3pll : y$ ; quo substituto, æquatio superior  $mp \sqrt{(ll - mmpp)} = y \sqrt{(xx - yy)}$ , mutatur in  $mp \sqrt{(ll - mmpp)} = y \sqrt{(3pll : y - yy)}$ ; quadrando  $llmmpp - m^2p^2 = 3llpy - y^4$ , seu  $y^4 - 3llpy + llmmpp - m^2p^2 = 0$ .

$mp = 4p = 120$  digit. Si latus folliis  $AB = l$ , statuatur digito-N. XXVI. rum, erit  $y = 106$  fere: & si  $l = 140$ ; erit  $y = 101$  fere, utrobique scilicet major quam 90. Sin  $l = 150$ ; erit quidem  $y = 90$ , præcise, sed tum nullum in folle relinquitur vacuum, mercurio replente totam ejus cavitatem, utpote quæ expansis ultra rectum angulum alis iterum diminuitur, sicuti antea accreverat. Si  $l = 150$ , descendet mercurius, dilatabiturque folliis ultra angulum rectum, quousque nullum in illo supersit vacuum, siquidem hoc per ejus aperibilitatem liceat; secus enim relinquetur quidem vacuum, sed utroque casu argentum in majore quam 90 digitorum altitudine hærebit. Si denique  $l > 170$ , nec descender mercurius, nec dilatabitur folliis omnino; quoniam alias volumen ejus contraheretur, nec argentum haberet, quo cederet.

Illud etiam insuper non prætereundum est, quod in allato calculo solius aeris lateralis in comprimendis cruribus vires contemplati sumus, exclusa adhuc consideratione aeris basi trianguli  $AC$  imminuentis, eamque desuper deprimentis introrsum, atque ita alarum  $AB$ ,  $CB$  distensionem tanto fortius prohibentis: quo fit, ut ad mercurii descensum promovendum altitudo trianguli assignata multo adhuc major requiratur. Si & hujus habenda foret ratio, id accuratius quidem non assequeremur, quam si calculum nostrum fundaremus super Principio illo Mechanico, quo statui solet, *Nullum produci posse motum naturalem, nisi eo motu, centrum commune gravitatis corporum in se agentium descendat.* Hunc enim in finem concipiendum esset triangulum  $ABC$  [Fig. 4.] inclutum Rectangulo  $HI$ , latitudinis arbitrariæ, altitudinis vero ultra fines Atmosphæræ  $HL$  tantisper productæ; cogitandumque, dum dilatato triangulo subsidit mercurius in  $FG$ , necessum esse, ut aer exundet in  $MN$ ; adeoque ut centrum gravitatis hujus attollatur, illius deprimatur: unde id solum calculo explorandum relinquitur, utrum commune utriusque centrum gravitatis eo motu elevetur deprimaturve; & si reperiat deprimi, quousque devaricanda sint crura  $AB$ ,  $CB$ , donec illud loco omnium humillimo consistat. Quod Problema ut jucundum, sic Viris Analystis non proflus indignum censebitur. Ubi id solum moneo, aerem  
basi

N. XXVI. basi trianguli AC incumbentem, diversos plane habiturum effectus, prout batin hanc vel rigidam & solutam, vel, ut est, introrsum plicatilem & punctis A, C affixam conceperis; priori namque casu conatum mercurii in divaricandis cruribus juvat; posteriori, in iisdem contrahendis, aeri laterali auxilium feret.

Cum itaque ex haftenus dictis satis pateat, follem (seposito etiam aeris basin deprimentis impedimento) minimum 90 digitos akum requiri, ut in illo tantillus mercurii sequatur descensus: facile deinceps capiet Lector, nequicquam ejus medio adaptari exterius vasculum cum tubo ad summitatem folliis pertingente, ad replendum, si quod ibi extiterit vacuum: quoniam enim tubus cum in finem ad minimum 45 digitos longus sit oportet, manifestum est fluxum mercurii per illum succedere non posse.

Si quis vero malo huic medelam allaturus, elevatione vasculi tubum abbreviare vellet, is novæ difficultati se intricatum sentiret: nam fluere tum quidem mercurius ex vase in folliis summitatem; sed, isto postmodum circa axem medio sui applicatum rotato, situmque horizontalem adepto, argentum ex folle in vasculum se elevatius retrofluere amplius non posset. Taceo alia, quæ Machinam hanc urgent incommoda, ita comparata, ut si unam ejus partem perfecisse credideris, alteram continuo mancā & claudicantem deprehendas.

*Videatur* Nus. XXVIII.

N°. XXVII.

Nº. XXVII.

Q. D. B. V.

**SOLUTIONEM  
TERGEMINI PROBLEMATIS,  
ARITHMETICI, GEOMETRICI,  
ET**

**ASTRONOMICI;**

*Una, cum adnexis ex universa Mathesi*

**COROLLARIIS;**

**Pro vacante Sede Mathematica,**

*Ad diem 4 Februarii Anni M. DC. LXXXVII.*

**Ventilandam sistit**

**JACOBUS BERNOULLI, L. A. M.**

---

---

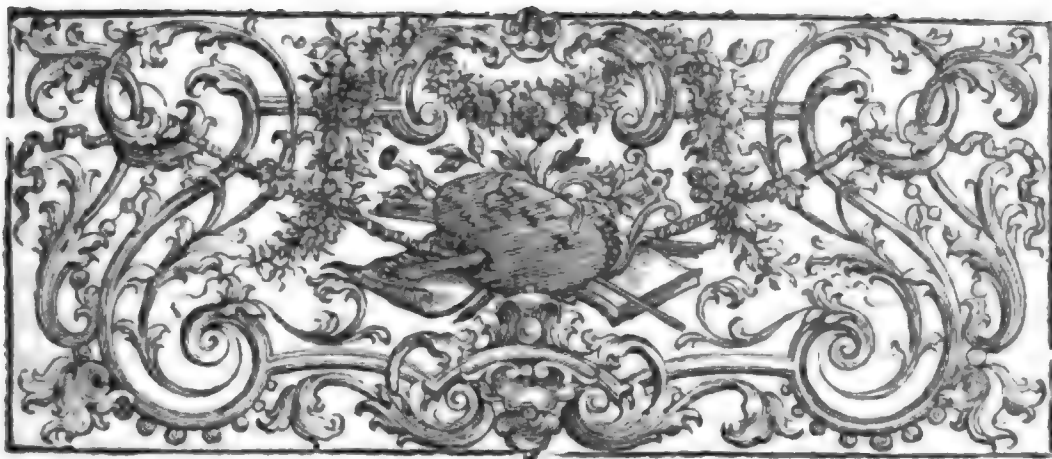
Editum primo

B A S I L E Æ

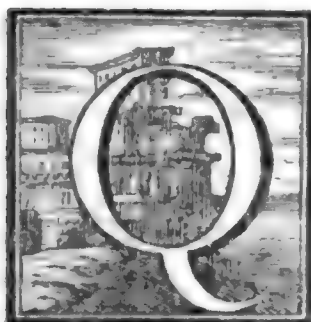
1687.







# PROÆMIUM.



**Q**UANTUM in hoc studii genere, de quo promovendo solliciti nunc sunt Amplissimi Proceres, vires meas qualescunque jam frequenter satis publico ostenderim, haud agre tamen, speciali hac occasione, nova isthac profectuum specimina aggressus sum, ut laudabili Academia nostra consuetudini, quantum in me foret, satisfacerem. Id interim in hac materia cavendum esse duxi, ne qui alias Exercitiorum istiusmodi Academicorum mos esse consuevit, magnum Propositionum numerum aliunde congererem, Thesiumque loco ventilandum proponerem; partim quia veritates mathematica ejus sunt certitudinis & evidentia, ut non, sicut pleraque alia, dispatantium rixis & altercationibus obnoxia sunt; partim vero, & quidem precipue, quoniam Propositiones multas ab aliis inventas & demonstratas in promptu habere ac ostentare, memoria potius vim, quam ingenii mathematici acumen redolet. Mathematici namque partibus defungitur, non qui aliorum inventa exscribere, memoria tenere, aut recitare data occasione potest; sed qui ab aliis proposita, divina ope Algebra, invenire & eruere novit ipse. Hac illa Magna Ars inveniendi est, qua destitutus non magis dicen-

dus quis est Mathematicus, quam qui Melodias omnifarias memori-  
 ter cantare didicit, propterea salutari solet Musicus, aut Arti musi-  
 ca docenda perfici. Quemadmodum enim talis, ut appposito hoc simi-  
 li utar, melodias omnes memoria mandatas prompte quidem sape,  
 & canora voce canere novit, sed iis decantatis exhausta simul om-  
 nis ejus est scientia; contra vero ille, qui Musicam ex artis princi-  
 piis addidicit, non opus habet ullam memoria imprimere, cum eas-  
 dem illas quas novit alter, & infinitas alias sibi oblatas, ex notis,  
 ut solemus loqui, decantare sciat: Ita etiam qui Algebra imbuti  
 sunt, arte sua confisi, non magna Theorematum & Problematum  
 ab aliis inventorum ac demonstratorum farragine memoriam suam  
 onerari patiuntur, cum ipsimet vel ignotas sibi, vel oblivioni tradi-  
 tas Propositiones de novo inveniendi & demonstrandi artificium ac  
 methodum norint. Quocirca officii mei ratio postulare videbatur, ut  
 meas quoque in praesentiarum vires in praclara hac inveniendi Arte  
 experirer; quem in finem tria selegi, non a me efficta, sed ab aliis  
 proposita Problemata, Arithmeticum, Geometricum, & Astrono-  
 micum, ex totidem Matheseos partibus, qua in Academia nostra  
 haecenus pro cathedra communiter tractari solebant. Illorum vero  
 solutioni subjunxi, ex universa Mathesi cognatisque disciplinis, non-  
 nulla Corollaria; ut Lector de nobilissima hac scientia, ejusque usu  
 latissimo dignas concipere discat ideas, Deoque O. M. pro rebus tam  
 praclaris, tamque utilibus, quas generi Mortalium revelare voluit,  
 debitas persolvat gratias.

SOLUTIO

# SOLUTIO

## TERGEMINI PROBLEMATIS.

---

### I. PROBLEMA ARITHMETICUM :

*Invenire , absque Algebrae subsidio , solius Arithmeticae Numerosae ope , Numerum , qui 12 & 36 ita dividat , ut si quorum utriusque addantur 8 , summae hinc emergentes sint in ratione 3 ad 5 .*



UM Problema istud, antehac ventilatum, Auctorem habeat insignem, Amico referente, Mathematicum, cui præter Algebram, per solam Numerosam Arithmeticam, vix solvi posse visum fuerit; omnino dignum censui nodum hunc, in quo solvendo vires meas experirer. N. XXVII

Hoc vero antequam præstem, sequentia præmonenda habeo.

I. Per *Algebram* intelligunt Mathematici Logisticam illam symbolicam, quæ loco numerorum symbolis quibusdam, videlicet litteris Alphabeti, aliisque characteribus, in suis calculis uti solet. Ejus præcipua & principalis pars vocatur *Analytica*, *Ars Resolutoria*, in eo consistens, ut quantitati quæsitæ, seu incognitæ, assignetur littera, & tum juxta Propositionis tenorem procedatur, nullo inter cognitæ & incognitam facto discrimine; donec, varia instituta reductione, quantitas incognita æquetur alicui pure cognitæ. Atque hic calculus non confundendus est cum alio cal-

**N.XXVII** culo symbolico, vel algebraico, qui Syntheticus magis est, quique in Theorematis demonstrandis ut plurimum adhibetur, qualis ille est, quo mox proprietatem Regulæ Falsi demonstratam dabimus: *Analysis* enim plerumque in Problematibus solvendis (quale nostrum est) in quibus aliquid faciendum vel invenendum præscribitur, locum habet; adeo ut Auctoris nostri mens haud dubie non sit, a solutione hujus Problematis symbola algebraica omnino arcere, sed innuere duntaxat, illud aliter quam *Analytice* solvi non posse.

II. Probe observari velim, Arithmeticam Numerosam non ita ab Algebra independentem esse, ut Regulas suas suismet debeat principiis, aut eas ex alio quam Algebrae fundo hauserit. Ipsæ enim pleræque vulgaris Arithmeticæ Regulæ, ut sunt, Regulæ falsi, Virginum, Alligationis, Societatis, imo ipsa Regula Trium, Algebrae subsidio aut primitus inventæ sunt, aut si nesciantur, vel oblivioni tradantur, saltem inveniri denuo & demonstrari possunt; omnesque Æquationes algebraicæ, quarum numero infinitæ sunt, nil aliud præstant, quam totidem novas suppeditare Regulas, quibus Arithmetica Numerosa quodammodo in immensum ditari posset. Et quidem ut talis Regula omnibus ejusdem generis exemplis accommodanda Analytice inveniatur, opus est, ut non tantum incognitæ, sed & cognitæ, datæque quantitates Alphabeti litteris designentur; quod ut in nostro exemplo palam fiat, sic proponi poterit.

*Invenire numerum aliquem (  $v$  ) qui duos datos (  $a$  &  $b$  ) ita dividat, ut si quorum utrique addatur datus numerus (  $c$  ), summa hinc emergentes sint in data ratione (  $d$  ad  $e$  ).*

*Analysis*

Analysis sic habet :  $\frac{a}{v} + c : \frac{b}{v} + c = d : e$ ,

$$\frac{a+cv}{v} : \frac{b+cv}{v} = d : e,$$

$$a+cv : b+cv = d : e$$

$$ae+cev = bd+cdv$$

$$cev - cdv = bd - ae$$

$$\text{tandemque } v = (bd - ae) : (ce - cd)$$

In quibus octo litteris universalis involvitur Regula, omnibus similibus exemplis solvendis inserviens, quæ quidem verbis sic enuntiabitur :

Regula: *Datos numeros (a & b) duc in alternos data rationis terminos (c & d): productum minus a majori subtrahere; quod reliquum est (bd — ae) erit Dividendus. Similiter numerum addendum (c) duc sigillatim in utrumque rationis terminum, iterumque productum minus a majori subtrahere: reliquum (ce — cd) erit Divisor, per quem si dividatur Dividendus, indigabit Quotiens numerum optatum (v).*

Ad hunc modum pro quolibet exemplorum genere, ope Algebrae, peculiaris invenitur Regula; interque infinitas istas Regulas hæc sola differentia est, quod paucae admodum illarum tantum, illæ videlicet quæ in vita civili insignem & frequentem præbent usum, vulgo in Systemata Arithmetica referri soleant; adeo ut vulgaris Arithmetica Numerosa, proprie loquendo, nihil aliud sit quam Complexio quinque vel sex Aequationum algebraicarum sive Regularum, præ cæteris in vita civili exitium & frequentem usum habentium.

Itaque cum quaestio est, *An aliquod exemplum solvi possit ope Arithmetica Numerosa?* sensus hic est, *An præter Regulam, quam unumquodque Exemplorum genus peculiarem sibi depascit, solvi quoque possit per aliquam illarum in Systematibus vulgo receptarum?* Ubi manifestum est, ut istud fieri queat, Exemplum propositum conditionem Problematum illa Regula solvendorum habere debe-

re;

N.XXVII re; vel si non habeat, eo reducendum esse, ut conditionem hanc acquirat.

Quod jam præsens nostrum spectat Problema, cuivis tentanti facile patebit, illud, ex. gr. per *Regulam Falsi* solvi non posse; quod quidem indicium præbet, deficere ipsi conditionem, quam requirunt Exempla per *Regulam Falsi* solvenda; interim vero levi opera eo reduci poterit, ut hanc conditionem induat.

Proprietas Regulæ Falsi vult; Ut *differentia numeri veri & numerorum assumptorum inter se existant ut mendacia.*

*Demonst.* Est enim  $v$ , Numerus verus, qui quæritur:  $v \pm m$ ,  $v \pm n$ , numeri assumpti; adeoque  $m$  &  $n$  differentiæ veri & assumptorum,  $p$  &  $q$  mendacia: Demonstratio sic habebit:

$$\begin{array}{r|l}
 \begin{array}{r}
 v+m \quad +p \\
 v+n \quad +q \\
 \hline
 vq+mq \quad vp+np \\
 \hline
 v = \frac{vp+np-vq-mq}{p-q} \\
 vp-vq = vp+np-vq-mq \\
 np = mq
 \end{array}
 &
 \begin{array}{r}
 v-m \quad -p \\
 v-n \quad -q \\
 \hline
 vq-mq \quad vp-np \\
 \hline
 v = \frac{vp-np-vq+mq}{p-q} \\
 vp-vq = vp-np-vq+mq \\
 np = mq
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 v+m \quad +p \\
 v-n \quad -q \\
 \hline
 vq+mq \quad vp-np \\
 \hline
 v = \frac{vp-np+vq+mq}{p+q} \\
 vp+vq = vp-np+vq+mq \\
 np = mq
 \end{array}$$

Quoniam semper deprehenditur  $vp = mq$ , erit  $m:n = p:q$ , id est, differentiæ veri & assumptorum, ut mendacia. Q. E. D.

Ut igitur in nostro Problemate requisita conditio adsit, & differentiæ istæ mendaciis suis proportionales fiant, designentur assumpti



sumpti numeri falsi per  $f$ , &  $g$ : verus per  $v$ , adeoque differentiae N. XXVII per  $f-v$ , &  $g-v$ . Jam quia mendacia debebunt esse, ut  $f-v$ , &  $g-v$ , erunt, substituto valore ipsius  $v$  reperto supra, ut  $f-(bd-ae):(ce-cd)$  &  $g-(bd-ae):(ce-cd)$ , id est, ut  $(cef-cdf-bd+ae):(ce-cd)$  &  $(ceg-cdg-bd+ae):(ce-cd)$ , id est, ut  $cef-cdf-bd+ae$  &  $ceg-cdg-bd+ae$ , id est, si pro uno mendaciorum ponatur  $cef-cdf-bd+ae$  [nempe differentia inter  $ae+cef$  &  $bd+cdf$ ] erit alterum pariter mendacium  $ceg-cdg-bd+ae$  [videlicet differentia inter  $ae+ceg$  &  $bd+cdg$ .] Mendacia autem ista habentur, si exploretur, num  $a+cf:b+cf=d:e$ . item  $a+cg:b+cg=d:e$ , id est, num producta ex  $a+cf$  in  $e$ , &  $a+cg$  in  $e$  sint aequalia productis ex  $b+cf$  in  $d$ , &  $b+cg$  in  $d$ . Si enim producta ista sint inaequalia (quod semper fiet, quando assumpti  $f$  &  $g$  a vero  $v$ , abluunt) eorum differentiae indigitabunt mendacia; quibuscum, si rite juxta praecepta Regulae Falsi duarum positionum opereris, obtinebis quaesitum.

Liquet hinc, quam levi mutatione opus sit, ut Problema nostrum naturam Exemplorum per Regulam Falsi solvendorum induat. Sic enim tantum proponendum foret:

*Quaeritur Numerus ita comparatus, ut si numeris 12 & 36 scorsim addatur productum ex quaesito & dato 8, summa hinc emergentes sint in ratione 3 ad 5.*

Aliter quoque rem expediui hac ratione: Consideravi, quotos (quos Problema innuit) eandem habere debere ad invicem rationem, quam habent ipsi numeri dati 12 & 36, adeoque etiam unum quotorum + 8, ad alterum quotorum + 8, eandem habere rationem, quam habet numerus 12 + numero  $cv$  (toties scilicet continente octonarium  $c$ , quoties alteruter dividendus continet suum quotum) ad 36 + eodem numero  $cv$ , per 15. V. El. Unde sequitur, si unus quotorum + 8, ad alterum + 8, est ut 3 ad 5; fore quoque numerum 12 + numero  $cv$ , ad 36 + numero  $cv$ , ut 3 ad 5. Positis ergo, pro hoc numero  $cv$ , duobus quibuscumvis, institui poterit per illos examen juxta Regulam Falsi; propterea quia mendacia differentiis veri & assumptorum

Jac. Bernoulli Opera.

Q q

rum

N.XXVII rum iterum erunt proportionalia, id quod facile demonstrari posset, si prolixitate hac foret opus. Reperietur autem in nostro Exemplo pro numero  $ev$ , 24: qui quia ter continet octonarium  $e$ , sequitur etiam ipsos dividendos 12, & 36, continere suos quotos ter; idest, numerum quæsitum  $v$  esse ternarium.

## I I.

## PROBLEMA GEOMETRICUM.

CUM versarer Amstelodami, Geometra quidam in plateis publicis sequens affixit Problema, invitato (qui Mathematicorum mos est) ad ejus solutionem Lectore.

*Fig. 1. 2. 3. Op een pladt ABC, in de welcke AB 50, BC 100, en den hoek ABC regt, sijn oppereggt de loodry hangenden AB 200, BE 150, en CF 100, in'tzelve plat te vinden alse stippen G, H, enz. alsoo dat (wanneer in een vierhoek IKLM de hoecken IKM en ILM in't besonder regte zyn, KL 33, beyde IK en IL t'samen 77, en beyde KM en LM t'samen 99) beyde IK en IM t'samen tot KM de selve reden hebben, als DG tot FG, DH tot FH, enz. Desgelijks also dat (wanneer in een gelijk beenigen driehoek NOP, wiens geliicke NO en NP in't besonder 100, en de grond-streep OP 56, drie aan-een-rakende ronden ingeschreven zyn) d'halfmid streep QR des ongelijken rondts tot d'halfmidstreepen ZT en VT der geliicke ronden in't bijsonder heeft een tweevoudige reden der gene, die EG tot FG, EH tot FH, enz. heeft. Te vinden seg ik DG, DH, enz. EG, EH, enz. en FG, FH enz.*

id est:

*Erectis super plano ABC, (in quo AB 50, BC 100, angulusque ABC rectus) tribus perpendicularibus, AD 200, BE 150 & CF 100, invenire in plano illo omnia puncta G, H, &c. ita comparata, ut (existentibus in quadrangulo IKLM angulis IKM & ILM sigillatim rectis, KL 33, ambabus IK, IL, simul sumptis 77, & ambabus KM, LM simul sumptis 99) ambabus IK, IM simul sumptis ad KM eam rationem habeant, quam DG*

DG ad FG, DH ad FH &c. Similiter, ut [inscriptis triangulo N. XXVII Ifascoli, cujus crura NO & NP sigillatim sunt partium 100, & basis OP 56, tribus circulis sese mutuo tangentibus] semidiameter inaequalis circuli QR ad semidiametrum alterutrius aequalium circulorum ZY vel VY, habeat rationem duplicatam ejus, quam habet EG ad FG, EH ad FH, &c. invenire, inquam, DG, DH, &c. EG, EH, &c. & FG, FH, &c.

Patet, Problema istud tria distincta Problemata in sinu fovere, quorum duo priora tertio principaliori Lemmatum instar prae-mittenda sunt.

### LEMMA I.

**D**atis in Quadrilatero IKLM, [Fig. 1.] latere KL, 33; IK + IL, 77; KM + LM, 99: angulisque IKM, ILM rectis; invenire seorsim latera IK, KM, IM: & proinde etiam IK + IM, rationemque quam habet IK + IM ad KM.

**SOLUTIO:** Constat ante omnia, circumferentiam circuli super diametro IM descripti transituram per puncta K & L, ob angulos IKM, ILM rectos; adeoque circa quadrilaterum IKLM circumscribi posse circulum. Quare IL in KM = IK in LM + KL in IM.

$$\text{Sunto jam } KL = a \quad \text{Item } KM = x$$

$$IK + IL = b \quad IL = y$$

$$KM + ML = c \quad IM = z$$

$$\text{adeoque } IK = b - y$$

$$LM = c - x$$

$$IKq + KMq [IMq] = LMq + ILq$$

$$bb - 2by + yy + xx = cc - 2cx + xx + yy$$

$$bb - 2by = cc - 2cx$$

$$2cx = cc - bb + 2by \text{ \& } x = (cc - bb + 2by) : 2c. \odot$$

$$2by = bb - cc + 2cx \text{ \& } y = (bb - cc + 2cx) : 2b,$$

$$\odot. xx = (c^2 + b^2 + 4bby - 2bbcc + 4bccy - 4b^2y) : 4cc. \text{ B}$$

$$\text{Atqui etiam } IKq + KMq = IMq$$

$$bb - 2by + yy + xx = zz$$

$$Qq \text{ 2}$$

Sub:

N. XXVII Substituto igitur in hac Æquatione valore ipsius  $x \times 5$ . Erit  
 $zz = (c^4 + b^4 + 2bbcc - 4b^3y - 4bccy + 4bby + 4ccyy) : 4cc, \mathcal{L}$ .  
 Porro  $KM$  in  $IL = KL$  in  $IM + IK$  in  $LM$

$$xy = az + bc - cy - bx + xy$$

$$bx + cy - bc = az$$

$$z = (bx + cy - bc) : a,$$

positoque valore ipsius  $x \odot$ , habebitur

$$z = (2bby + 2ccy - b^3 - bcc) : 2ac$$

$$zz = (4b^4yy + 4c^4yy + b^6 + bbc^4 + 8bbccyy - 4b^5y - 8b^3ccy - 4bc^4y + 2b^4cc) : 4aacc = (c^4 + b^4 + 2bbcc - 4b^3y - 4bccy + 4bby + 4ccyy) : 4cc, \mathcal{L}.$$

Facta utrinque multiplicatione per  $4aacc$ ,

$$4b^4yy + 4c^4yy + b^6 + bbc^4 + 8bbccyy - 4b^5y - 8b^3ccy - 4bc^4y + 2b^4cc = aac^4 + aab^4 + 2aabbcc - 4aab^3y - 4aabccy + 4aabbby + 4aaccyy.$$

Transponatur  $yy$  in unam partem,

$$(4b^4 + 4c^4 + 8bbcc - 4aabb - 4aacc)yy = (4b^5 + 8b^3cc + 4bc^4 - 4aab^3 - 4aabcc)y - b^6 - bbc^4 - 2b^4cc + aac^4 + aab^4 + 2aabbcc$$

Fiat divisio per quantitatem cognitam ipsi  $yy$  adhaerentem, eritque  $yy = by - bb : 4 + aacc : (4bb + 4cc - 4aa)$

$$y = \frac{1}{2}b + ac : 2\sqrt{(bb + cc - aa)}$$

$$x = \frac{1}{2}c + ab : 2\sqrt{(bb + cc - aa)}$$

$$z = (bb + cc) : 2\sqrt{(bb + cc - aa)}$$

Ergo positis  $KL = a = 33$

$$IK + IL = b = 77$$

$$KM + ML = c = 99$$

reperitur  $KM = x = 60$

$$IL = y = 32$$

$$IM = z = 63$$

unde  $IK = b - y = 25$

$$LM = c - x = 39$$

$$\& IK + IM = b - y + z = 90$$

adeoque

$$IK + IM : KM = 90 : 60 = 3 : 2$$

Constr. Geom. [Figura 4.] Ductis normalibus  $AC$ ,  $BL$ , abscindatur  $OL = b$ , &  $OA = c$ ; subtensa  $AL$  fiat diameter semicirculi  $AKL$ , in quo applicetur data  $LK$ , ducaturque  $KA$ . Fiant anguli  $OLC$  &  $OAB = LAK$ . Biscantur  $BL$  &  $AC$ , in  $D$  &  $E$ ;

& E; super KL erigantur  $\Delta KLI$  &  $KLM$ , ut sit  $LI = LD$ ,  $KI = DO$ ,  $KM = AE$ ,  $LM = EO$ , jungaturque IM. Erit IKLM optatum quadrilaterum.

## LEMMA II.

In Triangulo Isoscele NOP [Fig. 2.] cujus omnia latera data sunt, NO [NP] 100, & OP 56; inscribere tres circulos se mutuo & trianguli latera tangentes, eorumque invenire centra & radios; & proinde tum rationem, quam hi radii inter se habent, tum rationis hujus subduplicatam.

SOLUTIO. Observandum 1°. circulos ad basin esse necessario æquales: 2°. illos tangi debere a demissa perpendiculari NS, 3°. in hac perpendiculari fore centrum circuli ad verticem.

$$\begin{array}{l|l} \text{Sunto jam } SP = a & \text{Item } SW = VW = y \\ SN = b & QR = z \\ PN = \sqrt{(aa + bb)} = c & \text{adeoque } WP = a - y \\ PX = WP = a - y, \text{ ob congruent. Triang. } VPX, VWP \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} SP : PN = SW : NT & SP : SN = PW : WT \\ a : c = y : \frac{cy}{a} & a : b = a - y : b - \frac{by}{a} \end{array}$$

$$\text{Hinc } VT [WT - WV] = b - y - \frac{by}{a} : a \text{ q}$$

$$\& VTq = bb + yy + bbyy : aa - 2by - 2bby : a + 2byy : a$$

$$TXq(VTq - VXq) = bb + bbyy : aa - 2by + (2byy - 2bby) : a, *$$

$$SP : SN = VX : TX \text{ q}$$

$$a : b = y : \frac{by}{a}$$

Pro inveniendis centris circularum ad basin:

Modus I.

$$TXq = 2bbyy : aa = *bb + bbyy : aa - 2by + (2byy - 2bby) : a$$

$$2byy : a = 2bby : a + 2by - bb$$

$$2byy = 2bby + 2aby - abb$$

Qq 3

77

304 SOLUTIO TERGEMINI PROBLEMATIS.

N.XXVII

$$yy = by + ay - \frac{1}{2}ab$$

$$y = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - \sqrt{\left(\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb\right)}$$

$$\text{hoc est } y = (a + b - c) : 2, \text{ propter } \sqrt{(aa + bb)} = c$$

*Aliter brevius.*

$$NY [NS - SY] = NX [NP - PX], \text{ ob congr. Tr. NVY, NVX}$$

$$b - y = c - a + y$$

$$\text{adcoque } y = (a + b - c) : 2$$

*Modus II.*

$$2. NT + 2 TX + XP = NP$$

$$cy : a + by : a + a - y = c$$

$$cy + by + aa - ay = ac$$

$$cy + by - ay = ac - aa$$

$$y = (ac - aa) : (c + b - a)$$

*Modus III.*

$$SP : PN = VX : 2 VT$$

$$a : c = y : b - y - \frac{by}{a}$$

$$cy = ab - ay - by$$

$$cy + ay + by = ab$$

$$y = ab : (c + a + b).$$

*Pro inveniendō centro circuli ad verticem.*

$$\text{Esto } NX = d, \text{ quæ cognita } y, \text{ latere nequit, utpote } = NT + TX = (cy + by : a)$$

$$PS : SN = QR : NR$$

$$a : b = z : \frac{bz}{a}$$

$$\text{Hinc } RX [NX - NR] = d - bz : a$$

$$QVq = zz + 2yz + yy$$

$$QIq = (QR - VX)q = zx - 2yz + yy$$

$$IVq = QVq - QIq = 4yz = dd - 2bdz : a + bbz : aa = CRXq$$

$$4aayz = aadd - 2abdz + bbzx$$

$$bbzx = 2abdz + 4aayz - aadd$$

$$zx = (2abdz + 4aayz - aadd) : bb$$

$$z = (abd + 2aay - 2a\sqrt{(aby + aay)}) : bb.$$

Sive



Sive substituto valore ipsius  $d = (cy + by) : a$  &  $aa + bb = cc$  N. XXVII

$$z = (ccy + aay + bcy - 2ay\sqrt{(bc + cc)}) : bb$$

Ergo positis	$SP = a = 28$		Invenitur	$VW = y = 12$
	$SN = b = 96$			$NX = d = 84$
adeoque	$PN = c = 100$			$QR = z = 16\frac{1}{2}$

Hinc  $QR : VX = 16\frac{1}{2} : 12 = 49 : 36 = 7 : 6$  bis.

*Constr. Geom.* Producta perpendiculari  $NS$ , (*Fig. 5.*)  $SE = SP$ , abscissaque  $NC = NP$ , dimidio residui  $CE$  assumatur æqualis  $SY$ , super qua descriptis quadratis  $SV$  &  $SZ$ , erunt puncta  $V$  &  $Z$  centra circulorum ad basin; quæ quidem reperiuntur aliter, bisecando angulos  $NSP$  &  $SPN$ ; per 4. IV. EUCL. Deinde, protracto latere quadrati  $YV$ , usque ad  $I$  intersectionem  $NP$ , factaque  $NG = SY$ , ducantur rectæ  $IM$ ,  $FGH$ , illa perpendiculari  $NE$ , hæc basi  $OP$  parallela: ipsi vero  $FH$  assumatur æqualis  $YA$ , & agatur  $AB$  etiam parallela basi  $OP$ . Huic  $AB$  statuatur æqualis  $SD$ , centroque  $D$ , radio  $DS$ , describatur arcus  $SM$  secans rectam  $IM$  in  $M$ : iterumque centro  $V$ , radio  $IM$ , alius designetur arcus, secans perpendicularem in  $Q$ . Erit  $Q$ , centrum circuli ad verticem.

## PROPOSITIO PRINCIPALIS.

*Erectis super plano ABC: (Fig. 3) (in quo AB 50, BC 100, angulusque ABC rectus) tribus perpendicularibus, AD 200, BE 150, & CF 100, invenire in plano illo omnia puncta G, H, &c. ita comparata, ut DG sit ad FG, DH ad FH, &c. in ratione sesqui-altera (ea videlicet quam habet in quadrilatero Schem. 1, IK + IM ad KM.) Et ut EG ad FG, EH ad FH, &c. habeat rationem sesquisextam (subduplicatam nempe ejus, quam in Isoscele Schem. 2, QR habet ad VX.)*

Sunt	$AD = a$	$DG : FG = m : o$	$BT = x$
	$CF = b$	$EG : FG = n : o$	$TG = y$
	$BE = c$		$RT = d - x$
	$AB = d$		$CS = e - y$
	$BC = e$		$AG = z$

N.XXVII

$$\begin{aligned} AGq(ATq+TGq) &= dd - 2dx + xx + yy \\ DGq(AGq+ADq) &= dd - 2dx + xx + yy + aa \\ \text{Pariter } FGq(CSq+SGq+CFq) &= ee - 2ey + yy + xx + bb \end{aligned}$$

Unde Proportio

$$\begin{aligned} DGq: & FGq \\ dd - 2dx + xx + yy + aa: ee - 2ey + yy + xx + bb &= mm: oo \\ \text{eaque ad æqualitatem reducta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} mmee - 2mme y + mm yy + mmxx + mmbb &= oodd - 2oodx + ooxx + ooyy + oaaa \\ mmyy - ooyy - 2mme y &= mmxx + ooxx - 2oodx + oaaa + oodd - mmbb - mmee \\ yy - 2mme y: (mm - oo) &= xx - (2oodx - oaaa - oodd + mmbb + mmee): (mm - oo) \end{aligned}$$

Pro inveniendi loco Æquationis, consule Element. Curvarum Joh. DE WITT, inserta poster. Parti Geom. CARTES. Lib. 2. Cap. III. pag. 296. Quod ita fit :

$$\begin{aligned} x &= y - mme: (mm - oo), \text{ aut } y = x + mme: (mm - oo) \\ yy &= xx + 2mmez: (mm - oo) + m^4 ee: (mm - oo)^2 \\ 2mme y: (mm - oo) &= 2mmez: (mm - oo) + 2m^4 ee: (mm - oo)^2 \\ \text{Ergo } yy - 2mme y: (mm - oo) &= xx - m^4 ee: (mm - oo)^2 \\ \text{Hinc } xx - m^4 ee: (mm - oo) &= xx - (2oodx - oaaa - oodd + mmbb + mmee): (mm - oo) \\ xx + xx + 2oodx: (mm - oo) &= (oooo + oodd - mmbb - mmee): (mm - oo) + m^4 ee: (mm - oo)^2 \\ \text{Positoque } x + ood: (mm - oo) &= u \text{ seu } x = u - ood: (mm - oo) \\ xx + uu - o^4 dd: (mm - oo)^2 &= (oooo + oodd - mmbb - mmee): (mm - oo) + m^4 ee: (mm - oo)^2 \\ xx &= -uu + (oooo + oodd - mmbb - mmee): (mm - oo) + (m^4 ee + o^4 dd): (mm - oo)^2 \\ \text{Positoque } (oooo + oodd - mmbb - mmee): (mm - oo) &+ (m^4 ee + o^4 dd): (mm - oo)^2 = ff \\ \text{Erit } xx &= -uu + ff. \end{aligned}$$

Unde

Unde apparet, æquationem esse reductam ad formulam Theo- N. XXVII rematis XIV, Locumque quæsitum esse Circumferentiam Circuli, quæ quidem determinatur ita:

*Figura 6.* Producta BC, fiat  $BK = mme : (mm - oo)$ , ut CK sit  $mme : (mm - oo) - e$  seu  $ooe : (mm - oo)$ . Per K ducatur LK parallela ipsi AB, fiatque  $KM = ood : (mm - oo)$ , producta scilicet AC in LM, ut sit  $CB : BA = CK : KM$ , seu  $e$  ad  $d$ , ut  $ooe : (mm - oo)$  ad  $ood : (mm - oo)$ . Super M, radio  $MG = f$ , describatur circulus, cujus peripheria GNH est Locus optatus. Assumpto enim in illa puncto utcumque, veluti P, actaque in BA protractam, si opus sit, perpendiculari PS, si BS vocetur  $x$ , & SP,  $y$ ; erit  $LP (SP - SL)y = mme : (mm - oo) = z$ , & quoniam  $LM (LK + KM) = x + ood : (mm - oo) = u$ , hinc  $zz + uu (LPq + LMq) = MPq = MGq = ff$ . quare  $zz = -uu + ff$ . Q. E. D.

Quod si in Loci hujus investigatione punctum G extra angulum ABC, vel superne, vel inferne, vel a parte dextra, vel sinistra assumptum fuisset, in eandem perpetuo æquationem incidissemus, variatis tantum omnifariam signis + & - quantitatum  $2mme y : (mm - oo)$  &  $2ood x : (mm - oo)$ . Interim determinatio & constructio Loci prorsus manet eadem.

*Fig. 3. & 6.* Pro determinando Loco altero, qui responderet rationi EG ad FG, seu  $n$  ad  $o$ , haud absumili calculo reperitur Æquatio:  $yy - 2nney : (nn - oo) = -xx + (oooc - nnbb - nnee) : (nn - oo)$ , Positoque  $z = y - nne : (nn - oo)$  sive  $y = z + nne : (nn - oo)$  habetur  $zz = -xx + (oooc - nnbb - nnee) : (nn - oo) + n^4 ee : (nn - oo)^2$

Unde colligitur, Locum ipsum iterum esse Circumferentiam Circuli ita describendi: In producta BC, cape  $BO = nne : (nn - oo)$  seu  $CO = ooe : (nn - oo)$ , faciendo scilicet  $CK : CO = nn - oo : mm - oo$ , & super O, radio  $OG = \sqrt{((oooc - nnbb - nnee) : (nn - oo) + n^4 ee : (nn - oo)^2)}$ , fac peripheriam GQH, in qua optatus Locus est; cumque

Jac. Bernoulli Opera.

R r

hic

N.XXVII hic circulus priorem non nisi in duobus punctis G & H interfecare possit, sequitur non nisi duo hæc puncta satisfacere junctioni utrique rationi  $m$  ad  $o$ , &  $n$  ad  $o$ ; hoc est *ita esse comparata, ut ducta ad illa a perpendicularium extremitatibus D, E, F, rectæ DG, EG, FG, & DH, EH, FH, sint ad se invicem in rationibus  $m, n, o$ .*

Quoniam vero Problema nostrum in numeris propositum fuit, omnes istæ lineæ etiam numeris exprimendæ sunt:

$$\begin{aligned}\text{Positis autem } AD &= a = 200 \\ CF &= b = 100 \\ BE &= c = 150 \\ AB &= d = 50 \\ BC &= e = 100\end{aligned}$$

$$\text{Ratione vero } \frac{m}{\frac{n}{o}} = \frac{9}{6}$$

$$\begin{aligned}\text{Inveniuntur } BK &= mme : (mm - oo) = 180 \\ CK &= ooe : (mm - oo) = 80 \\ KM &= ood : (mm - oo) = 40 \\ BO &= nne : (nn - oo) = 376 \frac{13}{17} \\ CO &= ooe : (nn - oo) = 276 \frac{13}{17}\end{aligned}$$

$$MG \text{ vel } MH = f = \sqrt{32000}$$

$$\begin{aligned}OG \text{ vel } OH &= \sqrt{((oocc - nnbb - nnee) : (nn - oo) \\ &+ n^4 ee : (nn - oo)^2)} = \sqrt{128994 \frac{14}{17}}\end{aligned}$$

Sed quod in hoc speciali exemplo meretur observari, est, Quod altera intersectionum utriusque Circuli præcise cadat in ipsam hypothensam anguli recti ABC. Cum enim radius MG circuli GNH, centro M descripti, sit  $\sqrt{32000}$ , & CM  $g = CKg + KMg = 6400 + 1600 = 8000$ ; ideoque CM  $= \sqrt{8000}$ ; erit CM rectæ GM subdupla, quia illius quadratum subquadruplum hujus quadrati: Proinde GC = CM. Ergo & demissa in latus BC perpendicularis GR = 40 = KM, & RC = 80 = CK; unde RB = 20, adeoque RO (BO - BR) = 356  $\frac{13}{17}$ , cujus Quadratum 128994  $\frac{14}{17}$ , junctum GR  $g = 1600$ , pro-

producit  $2180000 : 169 = 128994 \frac{14}{169} =$  quadrato hypo N-XXVII  
thenusæ OG in Triang. Rectang. ORG: hinc ipsa hypothe-  
nusa OG  $= \sqrt{128994 \frac{14}{169}}$ , cui cum æqualis præcise sit radius  
circuli GQH, centro O descripti, sequitur peripheriam ejus tran-  
situram per idem punctum G, ibidemque communem esse utrius-  
que circuli intersectionem.

Et quoniam AG: AC = BR: BC, at BR =  $\frac{1}{2}$  BC, erit  
quoque AG =  $\frac{1}{2}$  AC. Insuper perpendicularis BG, demissa ex  
angulo recto in hypothensam AC, cadet in hoc ipsum punctum  
G. Cum enim BC: AB = BG: AG = GC: BG; at BC =  
2 AB, erit etiam BG = 2 AG & GC = 2 BG; ac proin seg-  
mentum GC = 4 segm. AG: unde AG =  $\frac{1}{5}$  totius AC: quare  
ambo circuli & perpendicularis BG hypothensam AC, in eo-  
dem puncto G, intersecant.

Quod si luberet, puncta quæsitæ G & H, absque inventione  
Locorum integrorum aliter determinare, possemus, facilioris  
operationis ergo, loco duarum supra inventarum æquationum  
indeterminatarum litteralium substituere ipsarum æquivalentes nu-  
merales, videlicet istas,  $yy - 360y = -xx - 80x - 2000$ ,  
&  $yy - 91\frac{1}{3}y = -xx - 17200$  juxta quarum priorem invenitur  
 $y = 180 - \sqrt{(-xx - 80x + 30400)}$ , juxta posteriorem  
vero  $y = 41\frac{2}{3} - \sqrt{(-xx + 2180000 : 169)}$ ; atque tunc in-  
ter diversos istos valores quantitatis y, pro determinanda x, de-  
nuo æquationem instituere, quæ duas admittet radices, unam af-  
firmativam + 40, numerandam ex B in T, alteram negativam  
- 176  $\frac{22}{113}$  capiendam in A B protracta, ex B in V: unde simul  
innotescet geminus valor ipsius y, nempe TG = 20 & VH =  
63  $\frac{761}{113}$ . *Quod erat inveniendum.*

## PROBLEMA ASTRONOMICUM.

**P**Ræcedenti Problemati subjunctum fuit in eadem scheda sequens Astronomicum, cujus proinde solutionem & hic adnectam, sed omisso, ne prolixior fiam, calculo, quem jam alibi \* publici juris feci :

*Temant peylende de Son te 6 uren na de middagh 12 graden boven den Horizon, en een uur en 12 min. na de se tijdt onder te gaan. Vrage op wat Aardrijks breete dito peyling geschiedt is.*

Id est :

*Observatur alicubi hora sexta pomeridiana Solis altitudo supra Horizontem 12 graduum, elapsis autem post momentum observationis hora una & 12 minutis occidit Sol. Queritur, sub qua latitudine [ adde, & quo anni tempore ] instituta fuerit observatio ?*

Esto ( Fig. 7. ) Arcus Horizontis CE, Æquatoris CD, Paralleli AE: Locus Solis hora sexta A, ejusdem punctum occasus E, altitudo Solis supra Horizontem hora sexta AB, ejus Declinatio AC vel ED, Tempus elapsum a momento observationis ad occasum Solis, respondens arcui Æquatoris CD, 1h. 12.

Positis jam Sinu toto - - - - -  $a =$  partium 10000.

Sinu altitudinis Solis AB, 12. grad.  $b =$  - - - 2079.

Sinu temporis elapsi ( horæ scilicet unius, cum 12. min. ) in gradus Æquatoris 18 conversi - - -  $c =$  - - - 3090.

Sinu quæsitæ declinationis Solis AC vel ED - - -  $x$ .

Reperitur Æquatio  $x^4 = aaxx + bbxx - aabbxx : cc - aabb :$  cujus radices  $x = \sqrt{((aa + bb) : 2 - aabb : 2cc \pm \sqrt{((a^4 - 2aabb + b^4) : 4 - (a^4bb - 1ab^4) : 2cc + a^4b^4 : 4c^4})}$

Quarum valor in numeros resolutus dabit,  $x = 7106$  fere & 2926 fere. Illius arcus in canone invenitur 45 gr. 17 min. hujus

\* Differt. De Gravitate Ætheris. pag. 160. seq.



hujus 17. gr. 1 min. pro quæsitâ Solis declinatione; e qua re-N.XXVII  
 perta, nec non & data Solis altitudine in Triang. A B C, vul-  
 gari Trigonometria innotescit angulus elevationis poli A C B,  
 qui vicissim reperitur vel 17 gr. 1 min. vel 45 gr. 17 min. adeo  
 ut ad satisfaciendum Problemati, gemino modo responderi pos-  
 set, nimirum observationem institutam esse, vel sub latitudine 45  
 gr. 17 min. Sole declinationem obtinente 17 gr. 1 min. vel  
 etiam sub latitudine 17 gr. 1. min. Solis declinatione vicissim  
 existente 45 gr. 17 min. si modo possibile esset, ut unquam  
 tanta existeret.

## C O R O L L A R I A.

I. *Ex Logica.* Sex sunt Universalia, seu Prædicabilia: Genus,  
 Species, Differentia, Proprium, *Commune*, & Accidens.

II. *Ex Physica.* Si gyratio Terræ Gravitatis causa sit, difficile  
 dictu est, cur lapsus gravium non fiat in plano Æquatori paral-  
 lelo? (a).

III. *Ex Meteorologia.* Pro captanda altitudine nubium novam  
 inveni methodum ex observato momento disparitionis coloris ru-  
 bicundi, qui nonnunquam post occasum Solis aliquandiu in nu-  
 bibus conspici solet. (b).

IV. *Ex Geometria Incommensurab.* Unum idemque *Binomium*  
 potest esse vel primum, vel secundum, vel tertium; item quar-  
 tum, quintum, vel sextum, non obstantibus *Propp.* 55. 56. 57.  
*Lib. X. EUCL.* Idem intellige de *Apotomis*.

V. *Ex Stereometria.* Pro dimetiendis Conis & Pyramidibus de-  
 curtatis, saltem iis, quæ bases habent parallelas & similes, hanc  
 Analysis Regulam simplicissimam suppeditat: *Summam basium me-  
 dique proportionalis inter illas duc in tertiam partem altitudinis;*

R r 3

pro-

(a) Videatur Numerus XIX.

(b) Videatur Num. XXX.

N. XXVII productum manifestabit quæsitum (c).

VI. *Ex Mechanica.* Perpetuum illud Mobile, Parisiis non ita pridem publicatum, inque *Nov. Reip. Litt. Art. 7. Mens. Sept. An. 1685.* descriptum, quod consistit in specie quadam Folliis 40 dig. alti, & mercurio repleti, Perpetuum stabile est. Neque enim in clauso ejusmodi Folle, etiam 100 digitorum possidente altitudinem, mercurius adhuc descensurus foret (d).

VII. *Ex Dioptrica.* Quæritur ratio, cur per vitrum plano planum ad axem visionis valde oblique positum objecta dextra appareant sinistra & vicissim? (e).

VIII. *Ex Perspectiva.* Frontales, Fugientes & Perpendiculares in eadem sectione existentes neutiquam æque fortiter tingendæ sunt, contra Regulam Dn. DES-ARGUES, & Praxin Dn. DE LA BOSSE, in eorum *Perspectiva*, Tom. 1. pag. 296.

IX. *Ex Gnomonica.* Divisio in partes æquales Instrumenti illius nocturni, quod descripsit MUNSTERUS, & ex illo Cl. STURMIUS parte 3, *Gnom. Welp. cap. XI.* æque vitiosa est, atque foret delineatio horologii æquinoctialis in plano verticali.

X. *Ex Ballistica.* Globi tormentorum bellicorum longissime progrediuntur ex elevatione 45 gr. explosi, siquidem ab aeris resistentia abstrahatur; hac enim posita, explosio maxima sub angulo tantillo minore contingere debet. Interim reperio, si vis gravitatis plusquam vicies semel superet vim resistentiæ aeris, globum ex 45 gr. emissum adhuc paulo longius ferri, quam ex 44 gr. Cæterum superflua est Practicorum opera in examinandis ad singulos elevatio-

(c) Sit  $b$  diameter vel latus basis majoris;  $c$ , diameter vel latus basis minoris;  $a$ , altitudo, seu distantia basium;  $x$ , altitudo coni (vel pyramidis) integri. Erit  $b:c = x:x-a$ , Ergo  $cx = bx - ab$ , aut  $x = ab:(b-c)$ , &  $x-a = ac:(b-c)$ . Conus integer  $= \frac{1}{3}bb \cdot ab:(b-c)$ : Conus resectus  $= \frac{1}{3}cc \cdot ac:(b-c)$ . Conus decurtatus  $\frac{1}{3}a$

$(b^3 - c^3):(b-c) = \frac{1}{3}a(bb + bc + cc) =$  tertiæ parti altitudinis ductæ in summam basium & medii proportionalis inter illas.

(d) Videantur N<sup>o</sup>. XXV. XXVI. XXVIII. XXXII. XXXIII.

(e) Credibile est Autorem falsa quadam specie deceptum, objecta reflexa pro refractis habuisse: neque enim idem experimentum tentantibus successit.

elevationis gradus explosionibus, quandoquidem, ex observata N. XXVII unica, reliquæ omnes calculo subduci possunt (f).

XI. *Ex Arte conjecturandi.* In Urnis sortium [Gallis *Lotteries*, nobis *Glückstopff* oder *Glückhafen*] quamdiu albæ tantum schedæ exeunt, nostris nominibus in capsâ restitantes, expectationes crescunt in progressionem Harmonicam: sed in Urna nupera, in qua 16000 schedulæ, augmentum istud tam erat exile, ut 348 schedæ albæ absque interruptione extrahendæ fuissent, antequam valor expectationis in quamlibet schedam crevisset unico sextante, & 333 aliæ, antequam duobus, iterumque aliæ 319 priusquam crevisset tribus; adeo ut in universum 1000 schedæ albæ continua serie exire debuissent, priusquam suam quis in capsâ adhuc latitantem schedam, quæ initio valebat 7 assibus cum semisse, alteri 8 assibus vendere potuisset.

XII. *Ex Arithmetica figurata.* Numerus diei mensis Januarii, quo huic disputationi conscribendæ ultimam imposui manum, est Radix *Pentakismyriohexakischiliotetracosiohexacontapentagonalis* ex 1580972. Quæritur dies? (g).

(f) De hoc argumento videantur quæ commentati sunt HUGENIUS, *Discours de la cause de la pesanteur*, sub finem; NEWTONUS *Princip. Phil. Nat. Math.* Lib. II. Sect. 1. & 2. VARIGNONIUS *Comment. Acad. Reg. Scient. An.* 1708, & 1709. HERMANUS *Phoronom.* Sect. IV. imprimis JOH. BERNOULLI *Acta Erud.* 1719.

*Mai.* & 1721. *Mai.* & EULERUS *Mechan.* Tom. I, Cap. 6.

(g) Resp. 8. Problema est, Datur 1580972, Numerus Polygonus, angulorum 56465. Quæritur latus? Solutionem hujus Problematis dat WOLFIIUS *Element. Analys.* §. 213.

F I N I S.

Nº. XXVIII,



Nº. XXVIII.

JACOBI BERNOULLI

Mathematicum Professoris Basileensis,

GEMINA APPENDIX

AD EXAMEN PERPETUI MOBILIS.

*insertum mense Decembri Aetorum Anno 1686.*

*Acta Erud.  
Lips. 1686.  
Jun. p. 314*

**P**RIOREM harum Appendicum a Clarissimo Autore submissam, incunte Januario Anni 1687 accepimus: quo ipso & Decembris Novellarum Batavarum ad nos perlatas, machina a D. PAPINO & PUJOLA impugnata defensionem, ab Auctore suo susceptam, nobis exhibuit. Non ingratam ergo Appendicis Autori fore putavimus publicationis eo usque moram, dum ipse de novo hoc responso quantocius certior redderetur, una fortassis opera iterato Machina defensa examine defuncturus. Sed dum scheda Batava Lipsia Basileam perferuntur, ejusque littera, segnins a latore curata, ad nos remeant, unus & alter mensis lapsus est: ut priori Appendici, Auctoris voto Mense Aprili publicanda, altera superveniret, junctim nunc cum illa publicanda. Caterum quae in Novellis Batavis Mensibus Maio, Junio, Septembri & Decembri A. 1686. pag. 577. 671. 1004. 1378. in utramque partem de perpetuo hoc mobili disceptata sunt, vel ideo huc transferre negleximus, quod ea in compendio referant Appendices Bernoullianæ. Sic autem illa.

I. Mi-

## I.

Num.  
XXVIII.

Mirabitur procul dubio Lector, quod postquam materiæ in diversis *Eruditorum Actis* ad ventilandum propositæ satis diu inter Doctos agitatæ fuerunt; Ego de novo & postliminio quasi earum examen aggredi soleam, prout jam aliquoties usu mihi venit. Sed mirari desinet, cum perceperit, *Acta* isthæc sero admodum, nempe *Novellas Reipublicæ litterariæ*, *Actaque Lipsiensia* bis duntaxat in anno, *Parisiensia* elapso demum anno, *Londinensia* nunquam ad manus nostras pervenire; iterumque aliquot præterlabi menses, priusquam Actorum Collectores schedarum mearum fiant participes. Transmiseram illis, instantibus ultimis nundinis Francofurtensibus, *Examen alicujus Perpetui Mobilis* in *Novellis* publicati, iisdemque demum finitis perlati ad nos Menses *Novellarum Aprilis, Majus, Junius*, e quibus a D. PAPINO & D. PUJOLAS in examine istius Machinæ præventum me esse cognovi. Sed quoniam diversam ab illis in hoc negotio viam inivi; nolo campum hunc prius deferere, quam quæ præterea, tum circa utriusque responsionem, tum circa instantias Autoris Machinæ, notanda mihi occurrerunt, publico impertivero.

Omnes tres in eo convenimus, quod in istiusmodi folle, qualem proponit Autor, nulla sequi possit alarum expansio, vel mercurii descensus. Ad hoc ostendendum, illi quidem tum pondus mercurii inclusi, tum partem pressionis atmosphæricæ, quæ mediante tubo mercurium inclusum afficit, junctim contemplantur: Ego, seposita hujus accessione, follem ut undique clausum consideravi, ostendique, solius inclusi mercurii pondere alas folli dilatari non posse: quo ipso satis refelli puto Autoris opinionem, saltem illam, qua persuasum habet, per hydrargyri descensum in summitate folli vacuum genitum iri: ut maxime enim pressio illa accessoria; digitorum mercurialium, juncta ponderi inclusi hydrargyri, tanta supponeretur, quæ dilatando folli sufficeret; ista tamen tunc dilatatio produceretur, non per subitaneum hydrargyri lapsum, sed per ejus detrusionem, succedente continuo per tubum alio mercurio, qui vacuum fieri impediret.

*Jac. Bernoulli Opera.*

S 1

Sed

Num.  
XXVIII.

Sed hoc obiter; neque enim vacuum ad experimenti successum necessarium esse existimō. Responsio interim P A P I N I huc reddit: Pressionem, quam atmosphæra exercet intra follem, a longitudine intervenientis tubi plus diminui, quam augeri eadem possit a pondere mercurii inclusi. Si quæras, qui hoc fieri queat, cum diminuatur 22 tantum, augeatur vero 40 digitis mercurialibus; adjicit ille, asserti sui veritatem facili subduci posse calculo: qua sua responsione ansam mihi præbet suspicandi, quod existimet inclusum mercurium in follem agere pro ratione folii suæ molis, sive ponderis: cum evidens admodum sit, si solam spectes molem, pyramidem 40 digitos altam minorem esse prismate in eadem quidem basi, sed altitudine 22 digitorum constituto: meus namque veriorque calculus, qui alas folli pro gemino vecte habet, viresque inclusi mercurii in premendis alis æstimat ex rationibus ponderum simul & distantiarum, tametsi satis planus sit & facilis, non tamen usque adeo obvius est, quin meruisset apponi a P A P I N O, si huc digitum intendisset. Cum itaque non apposuerit, omnino conjicio, in hac illum esse sententia, quod in folle undique clauso, non nisi triplo major, quam 27 digitorum altitudo requiratur, ad constituendum æquilibrium inter mercurium & externum aerem; cum ex calculo meo nupero † patefcat, quadruplo majorem in illo altitudinem deponci. Id cum in finem moneo, ut constet, quod si parva illa 5 digitorum accessio, qua vires inclusi ponderis augmentur, juxta P A P I N I calculum, dilatando folli 40 digitos tantum alto non sufficiat, multo minus illa, in mea hypothese, effectui huic producendo suffectura sit. Ex dictis autem porro liquet, mirum non esse, quod responsio D. P A P I N I minus satisfecerit Auctori Machinæ; qui duo regessit; quorum alterum [ nam in priori quod mutationem quarundam partium machinæ concernit, fateor me ejus mentem non assequi ] huc reddit, quod folli utique non dilataretur, si mercurius in illum ageret pro ratione molis suæ, more corporum solidorum, non vero pro ratione altitudinis; ut solent liquida; centies namque se expertum esse ait, si folli

† Supra N<sup>o</sup>. XXVI. pag. 288.



follis superne apertus intra liquidum aliquod aliquousque demergatur, accidere, ut liquor internus, vel ad eandem cum externo se componat altitudinem, siquidem homogeneous illi sit, vel ut altius humiliusve consistat, si eodem vel levior, vel gravior fuerit. Unde colligere vult, quoniam 27 digiti mercuriales æquiponderent altitudini atmosphæricæ, follem mercurio repletum, dictamque excedentem altitudinem, in aere perinde dilatatum iri, atque dilataretur si stagnanti alicubi mercurio immergeretur ad 27 digitorum profunditatem. Ad instantiam hanc diluendam, sciendum, longe aliam esse rationem follis aeri expositi, quam follis in hydrargyrum demersi, prout ex mea explanatione evidentissime liquere potest. Si follis aeri exponatur, omnia alarum puncta premuntur a filamentis atmosphæricis ejusdem altitudinis, quorum singula æquiponderant 27 pollicibus mercurii; sin demergatur in hydrargyrum, puncta, quo propiora basi follis, eo minori extrinsecus pondere afficiuntur, filamentis mercurialibus sensim decrefcentibus versus superficiem stagnantis hydrargyri, ubi tandem plane evanescent: adeoque follis homogeneo liquore adimpletus necessario consue, sive dilatabitur, sive constringetur, donec liquor intra extraque illum in eadem planitie horizontali constiterit; ut pote quæ casu, singulis ejus punctis intra extraque follem ejusdem respectivæ altitudinis & ponderis filamenta incumbunt. Hæc hæctenus.

Quantum ad D. PUJOLAS refutationem; sic ille ad everterendam hanc Machinam ratiocinatur: Argentum, inquit, in folle 40 digitos alto, non potest delabi ad 27 digitorum altitudinem, quin eo usque dilatetur follis, ut in ejus summitate plus relinquatur vacui spatii, quam antea occupatum fuerat a tredecim mercurii digitis, qui descenderunt. Vacuum istud impleri denuo, nec per mercurium tubi, nec per materiam subtilem potest; quoniam neutrum horum fluidorum aliis viribus in follem impelli posset, quam iisdem, quibus follis expanderetur: quæ vires non æstimandæ forent ex omnibus 40 digitis inclusi mercurii, ut pote quorum 27 ob atmosphære æquilibrium irriti redderentur, sed a reliquis duntaxat tredecim: hæ vires autem non possent adigere

Num.  
XXVIII.

Num.  
XXVIII.

in summitatem follis, nisi 13 alios mercurii digitos, qui non sufficerent ad implendum vacuum. Ergo &c. Verum enim vero, præter quam quod nulla in hoc ratiocinio evidentia est mathematica, multa quoque occurrunt, quæ vix admitti possunt.

*Primo*, cum dicitur, delapso ad 27 digitos mercurio, vacuitatem nasci majorem spatio a 13 delapsis digitis antea occupato; id perpetuo & absolute verum non est: posset enim nunc major, nunc minor esse dicto spatio, pro diversa ratione amplitudinis basis ad altitudinem follis.

*Secundo*, non necessum esset ut mercurius per tubum impelleretur in follem iisdem illis viribus, quibus dilatatur follis; numquid impelli posset pondere columnæ atmosphæricæ tubi vasculo incumbentis? Videtur hic Autor revocare velle circulum *Cartesianum*; constat autem, phænomena hydrostatica longe melius & felicius explicari per *PASCALII* columnas, quam per circulum *CARTESII*.

*Tertio*, si res foret explicanda per circulum, dicendo mercurium impelli per tubum in follem a pauculo aere folli circumfuso, qui per follis dilatationem loco pulsus fuit; tum sequitur pariter, in syphone cujus crus longius exæquat 40 digitos, argentum ex breviori pelli in longius, vi pauxilli aeris, qui per effluxum argenti e longiori exundavit; adeoque ascensum mercurii per crus brevius, tempore correspondere debere cum descensu ejus per longius; quod experientiæ refragatur, cum lapsus ejus per longius sit momentaneus, ascensus per brevius lentior & successivus.

*Quarto*, non tantum 27 digitis mercurii inclusi, sed tota ejus altitudo, etiamsi 100 exæquaret digitos, irrita redderetur a contrapondio atmosphæricæ, ut ex nostra explicatione liquet.

*Quinto*, nulla evidens ratio est, cur tredecim digiti mercurii non possint impellere in follem tantum argenti, quantum sufficit ad replendum totum vacuum; tametsi enim amplitudo hujus vacui major sit spatio, quod occupant tredecim delapsi digiti, ejus tamen altitudo 13 digitis necessario minor esse debet. Constat vero, vires liquidorum æstimandas esse ex sola altitudine, nulla habita ratione molis; prout parva liquoris alicujus quantitas angustiori

gustiori siphonis cruri infusa, ad eandem attollit altitudinem multo Num.  
majorem ejus molem in ampliori crure contentam. Atque hæc de XXVIII.  
insufficiencia responsionis D. PUJOLAS.

Idem refutavit objectionem ab Autore Machinæ sibi motam. Quoniam vero rationes ejus in *Novellis* non recensentur; superest, ut & hanc instantiam ex hypothesi mea diluam. Memorat Autor experimentum se cepisse cum folle 10 digitorum, cujus basi adaptatus erat tubus 30 digitorum mercurio repletus & superne sigillatus; follem enim sibi relictum expansum fuisse, descendente mercurio tubi ad consuetam altitudinem 27 digitorum.

Sed quotusquisque est qui in nostra explicatione non videat rationem disparitatis inter utrumque follem? In folle 40 digitorum, universa mercurii moles externi aeris pressioni, mediantibus alis compressibilibus, exposita est; in folle vero breviori, soli infimi 10 digiti ab aere laterali afficiuntur, totaque mercurii portio inclusa tubo, ob firmitudinem laterum ejus, a laterali aeris pressione immunis præstatur: unde cum solius longitudo tubi 27 digitos exsuperet, mirum non est, subsidere in illo mercurium. Num vero præcise ad 27 digitorum altitudinem descensus sit, subdubito; calculo diversitatem nonnullam exhibente.

Esto follis ABC, (*Fig. 1.*) cui adaptetur tubus DE. Ex hydrostaticis principiis notum est, a pauxillo liquore tubi DE, licet angustissimi, tantundem premi subjectam basin latissimam AC, quantum premeretur a multo majore ejus copia in tubo AG, ejusdem quidem altitudinis cum DE, sed amplitudinis longe majoris, nempe basi AC adæquatæ, contenta. Loco igitur tubi DE substituatur alius AG, repletus itidem mercurio, qui fingatur descendisse in I, ibique æquilibrium constituere cum externo aere L, qui alas AB, BC comprimit. Sunt autem in folle pyramidalis ABC, altitudo BD =  $a$  = 10 digitis, BA vel etiam DA =  $b$ , circumferentia basis =  $c$ , altitudo mercurialis 27 digitorum æquivalens altitudini atmosphæricæ L =  $d$ , altitudo quæsitæ DI =  $x$ . Deprehenduntur momenta infinitarum superficierum prismaticarum (circa communem axem IB constitutarum & exhaurientium soliditatem follis ABC, tubique AM) constituere ge-

Num.  
XXVIII.

minam seriem secundanorum, diminutam serie tertianorum, cujus ultimus terminus  $bcx + abc - abc$ ; adeoque summa momentorum  $\frac{1}{3}bbcx + \frac{1}{3}abbc - \frac{1}{3}abbc = \frac{1}{3}bbcx + \frac{1}{12}abbc$  (a). Momenta filamentorum atmosphæricorum L, alas AB, BC comprimentium constituunt seriem secundanorum, cujus ultimus terminus  $bcd$ , adeoque summa momentorum  $\frac{1}{3}bbcd$  (b). Unde  $\frac{1}{3}bbcd = \frac{1}{3}bbcx + \frac{1}{12}abbc \& x = d - \frac{1}{4}a = 27 - 2\frac{1}{2} = 24\frac{1}{2}$  digitis. Patet ergo, altitudinem argenti post descensum fore  $34\frac{1}{2}$  digitorum, si follis altitudinem una comprehendas; sin minus, tantum  $24\frac{1}{2}$  digitorum; illo nempe respectu majorem, hoc minorem 27 digitis.

Non nego tamen, altius in tubo sustentari posse, imo debere, si & ratio habeatur aeris externi, basi follis incumbentis, alarumque divaricationem tanto fortius prohibentis; cujus quidem nos considerationem hic negleximus.



## I I.

**J**ubes, ut examini subijciam iteratam Responsionem, quam Auctor Perpetui Mobilis, sub finem superioris anni, animadversioni

(a) Etenim si distantiae ab hypomochlio constituent seriem arithmetice progressionalium, 0, 1, 2, 3, &c. usque ad  $b = BA$ ; bases superficierum prismaticarum mercurialium constituent pariter seriem primanorum 0, (1c:b) (2c:b) (3c:b) &c. usque ad  $bc:b = \phi$ ; altitudines vero earundem seriem æqualium minutam serie primanorum, 0, (x+a-0) (x+a-1a:b) (x+a-2a:b) (x+a-3a:b) &c. usque ad (x+a-b):b = x. Quare momenta efficiunt [0, (1.1.cx: l+1.1.ca:b - 1.1.1.ca:bb) (2.2.cx:b+2.2.

ca:b - 2.2.2.ca:b) &c. usque ad  $bcx+bc a - bca$ ] seriem geminam secundanorum minutam serie tertianorum: cujus proinde summa  $= \frac{1}{3}bbcx + \frac{1}{3}bbca - \frac{1}{4}bbca = \frac{1}{3}bbcx + \frac{1}{12}bbca$ .

(b) At vero momenta filamentorum atmosphæricorum habentur, si priores duæ series primanorum per seriem æqualium d, d, &c. multiplicentur; unde nascitur series [0, (1.1.cd:b) (2.2.cd:b) (3.3.cd:b) &c. usque ad  $bcd$ ] secundanorum, cujus summa est  $\frac{1}{3}bbcd$ .

versioni D. PAPINI opposuit, cujusque me nuperrime participem <sup>Num.</sup> fecisti, transmissis *Novellarum Batavarum* ex mense *Decembri* fo- XXVIII. liis nonnullis. Id nunc, expedito quod nosti negotio, eo lubentius in me suscipio, quod ex discussione Responsionis hujus maximopere illustrari & confirmari videam illam meam hypothesein, quæ defectum Machinæ e vestris ratione deduxit.

Duabus Responsio memorata partibus absolvitur: in priorē Auctor, inversione totius Machinæ; in altera partium quarundam immutatione, pristino retento situ, objectioni satisfacere studuit. Quantum ad inversionem Machinæ, quo jam in sua prima Responsione digitum obscure intenderat Auctor, huc ejus conjicio redire mentem. Existimat perinde esse, quantum ad inclusi mercurii vires, quo situ erigatur Machina; itaque si externi aeris pressiones debiliores forte judicentur, invertendam duntaxat esse pyramidem, applicandumque tubum sursum spectanti vertici; inversum namque follem, a prævalente aere, non aliter atque in altero situ, compressum iri, extruso per tubum mercurio in vasculum; compresso folle, præponderaturum ejus verticem, atque ad situm horizontalem se demissurum; postmodum refluxurum esse e vasculo mercurium, follemque de novo dilatatum iri [quandoquidem tubi vasculum, 22 tantum digitis a vertice follis distans, altius consistat axe motus, qui, prope centrum gravitatis machinæ constitutus, 30 circiter ab eodem vertice digitis abest;] denique folle sic dilatato, erecturum se verticem, præponderante scilicet jam iterum basi; atque ita Machinam, recuperato pristino situ, alternas rotationis vices perpetuo continuaturam. Sic Auctor. At Ego, revocato ad examen ratiocinio isto, deprehendo eandem causam, quæ follis dilatationem nuper prohibuit, cum basis sursum spectabat, contraria nunc ratione, base deorsum versa, ejusdem compressionem impedire; adeo invida natura Protei ad instar contrarias induere solet formas, velut omni studio conatus nostros in tam nobili indagine delusura.

Cujus quidem diversitatis rationem nescio an dare poterit Cl. PAPINUS, qui solam hydrargyri molem spectare solet, cum hæc, in utroque follis situ, una eademque maneat. In nostra certe hypo-

Num.  
XXVIII.

hypothesi, discriminis causa evidens admodum est, quandoquidem, in priori follis situ, longiora filamenta mercurialia, quæ præcipuum machinæ momentum conferre deberent, inutilia & inertia existunt, incumbentia quippe solum ipsi follis vertici, seu vectum hypomochlio, partibusque illi vicinissimis; cum eadem, in situ altero, premendo partes a vertice remotissimas, insignè valde in divaricandis alis robur acquirant. Hinc enim fit, ut eadem mercurii inclusi quantitas, quæ uno in situ sustinendæ pressioni atmosphæricæ neutiquam par fuit, in altero ei multum prævaleat, follique dilatando abunde sufficiat. Ne vero quod dixi de insignibus viribus, quas mercurius in alas inversi follis exerat, scrupulum movere possit apud ignaros hydrostaticæ Scientiæ, qui sibi forte persuadent alas istas ab intercepto mercurio omnino non affici, utpote cujus filamentis nullatenus subjacent; observandum perinde se hic rem habere, atque cum situla aqua repleta, qualis repræsentatur *Figura 2.* ubi filamenta aquea *ab*, *ab* &c. nativo gravitatis impetu directe quidem fundum feriunt, sed ab ejus rigiditate reperiussa quasi, ad latera situlæ deflectunt, eaque in singulis punctis non minore afficiunt pressione, quam qua afficerent, si directe singulis incumberent: quod vel exinde colligitur, quia insertis hinc inde perforato utriusque lateri tubis *cd*, *cd*, aqua in singulis sursum impellitur ad altitudinem æqualem ei, quam intra cavitatem situlæ obtinet. Ad eundem scilicet modum in Folle perpendiculariter erecto, cujus basis ima respicit, singula alarum puncta *g*, *g* &c. (*Fig. 3.*) intelligenda sunt premi extrorsum a totidem filamentis mercurialibus *mn*, *mn* &c. inde ad verticem follis *n* protensis: nec alia utrobique differentia est, quam quod basis follis non sit rigida materia instar fundi situlæ, sed corium plicatile; e quo tamen aliud videtur nihil sequi, quam corium istud primo detrudendum esse ab incumbente pondere mercurii, donec expanso per detrusionem, quantum fieri potuit, & rigescente jam corio, conatus prementis hydrargyri in utramque deinceps, uti dictum, follis alam redundet; prout nullum dubium est, quin, si loco rigidi fundi situlæ substituaturs flexilis quædam materia, nihilominus aqua in tubis *cd*, *cd* &c. ad eandem,



eandem, cum inclusa, altitudinem assurrectura sit, postquam flexile fundum, quouique potuit, ab illa detrusum & extensum fuerit. Num. XXVIII.

Ut jam, consueto nostro calculo, determinemus accuratam pressionis quantitatem, qua utraque pyramidalis follis ala, tam intus a mercurialibus, quam extus ab aeris urgetur filamentis; notetur momenta harum pressionem componi ex tribus rationibus; ex ratione videlicet altitudinum filamentorum, latitudinum alarum follis, & distantiarum denique a vertice ejus, seu hypomochlio. Altitudines filamentorum mercurialium  $mn$ ,  $mn$  &c. [Fig. 3.] incipiendo a vertice  $n$ , constituunt seriem primanorum, cujus ultimus terminus est altitudo  $np = 40$  digitis  $= a$ ; atmosphaericorum autem  $gb$ ,  $gb$  &c. altitudines, seriem æqualium, quarum singulae æquivalent 27 digitis mercurii  $= b$ ; latitudines alarum, ut & distantiae ab hypomochlio, conficiunt duas itidem series primanorum, quarum ultimi termini sunt maxima alae latitudo ad basin, quæ sit  $c$ , & ejusdem longitudo  $on$ , vel potius recta  $op$ , directioni filamentorum  $hg$ ,  $hg$  &c. perpendicularis, quæ vocetur  $d$ . Erit itaque summa momentorum omnium totius mercurii  $\frac{1}{4}acdd$ , quæ se habet ad summam momentorum atmosphaericæ  $\frac{1}{3}bcdd$ , ut 3  $a$  ad 4  $b$ , id est, substituto valore ipsarum  $a$  &  $b$ , ut 120 ad 108, seu 10 ad 9 ( $c$ ). Fortior igitur pressio est ab intra profecta a mercurio, pressione ab extra, quam producit

*Jac. Bernoulli Opera.*

T t

aer;

( $c$ ) Posito, quod distantiae ab hypomochlio constituent seriem primanorum, 0, 1, 2, 3, &c. usque ad  $d$ ; quod altitudines efficiant pariter seriem primanorum, 0, (1  $a$ :  $d$ ) (2  $a$ :  $d$ ) (3  $a$ :  $d$ ) &c. usque ad  $da$ :  $d = a$ ; & quod latitudines alarum similiter efficiant seriem primanorum, 0, (1  $c$ :  $d$ ) (2  $c$ :  $d$ ) (3  $c$ :  $d$ ), &c. usque ad  $dc$ :  $d = c$ ; Momenta filamentorum mercurialium constituunt seriem tertianorum, 0, (1. 1. 1  $a$   $c$ :  $dd$ ) (2. 2.

2  $a$   $c$ :  $dd$ ) (3. 3. 3  $a$   $c$ :  $dd$ ) &c. usque ad  $da$   $c$ ; cujus itaque summa est  $\frac{1}{4}ddac$ .

Momenta vero filamentorum atmosphaericorum habentur, si loco seriei altitudinum, quæ secunda est, scribatur series æqualium  $b$ ,  $b$ , &c. Hæc igitur momenta constituunt seriem secundanorum 0 (1. 1  $b$   $c$ :  $d$ ) (2. 2  $b$   $c$ :  $d$ ) (3. 3  $b$   $c$ :  $d$ ) &c. usque ad  $db$   $c$ ; cujus summa  $\frac{1}{3}ddbc$ .

Num.  
XXVIII.

aer; quare dilatabitur follis, non constringetur, contra quam existimat ejus inventor. Quod si follis non pyramidalis, sed triangularis fiat [ qualem construi posse non est dubium ] tunc pressio ab intra ad pressionem ab extra erit, ut  $2a$  ad  $3b$ , hoc est, in folle 40 digitis alto, ut 80 ad 81 ( $d$ ): adeo ut hac tantillo majore existente, comprimi quidem valeat ejusmodi follis ab ambiente aere; id quod obtinendi motus perpetui spem aliquam facere posset, nisi tum nova a longitudine tubi & collocatione vasculi oboriretur difficultas, quæ ex nunc dicendis plenius elucebit. Reperi namque, eodem duce calculo, sequens generale Theorema, observatu valde dignum, ut pote quod omnem hac de re quæstionem statim dirimit: *In quovis folle perpendiculariter erecto, seu triangulari, seu pyramidali, cujuscunque sit altitudinis & quocunque adimpletus liquore, sive basis sursum, deorsumve spectet; pressio liquoris inclusi tanta est, quanta proficisci potest ab uniformi columna ejusdem liquoris, cujus altitudo sit aqualis distantia summitatis a centro gravitatis follis: adeoque si tubus summitati follis applicatus e regione centri gravitatis terminetur, representabit machina siphonem crurum aqualium, intercedente utrinque perfectio partium æquilibrium. (c).*

Hinc

( $d$ ) At si follis triangularis sit, alæ æqualem ubique latitudinem habent, ideoque series latitudinum, quæ inter præcedentes tertia erat, mutatur in seriem æqualium, 1, 1, 1, &c. Unde fit, ut momenta filamentorum mercurialium constituent seriem secundanorum, 0 (1. 1a:  $d$ ) (2. 2a:  $d$ ) (3. 3a:  $d$ ) &c. usque ad  $da$ , cujus summa  $\frac{1}{2}dda$ ; momenta verò atmosphæricorum filamentorum, constituent seriem primanorum 0,  $1b$ ,  $2b$ ,  $3b$ , &c. usque ad  $bd$ , cujus summa  $\frac{1}{2}bdd$ . Est autem  $\frac{1}{2}dda$ :  $\frac{1}{2}bdd = 2a:3b$ .

( $e$ ) Theorema istud non solum valet, quando follis est triangularis, vel pyramidalis, id est, quando alæ sunt parallelogramma vel triangula; Tab. 14  
Nº. 28. sed universaliter, quacumque figura sint præditæ. Nam sit AMLN, vel Am/N, follis erectus, vel inversus, liquore plenus usque ad QRT: Sitque S, centrum gravitatis liquoris; C, centrum gravitatis superficiæ QRLM, quam premit liquor; A, hypomochlium, per quod ducantur AC, & AS liquoris summitati occur-

Hinc constat primo, si basis follis sursum respiciat, in triangulari requiri ter 27, id est, 81; in pyramidali quater 27, hoc est, 108 digitorum altitudinem, ad constituendum æquipondium, inter externam atmosphæram & inclusum hydrargyrum: quandoquidem

Num.  
XXVIII.

occurrens in P. Et, si concipiatur liquor divisus per innumera plana horizontalia EFG, *efg*; momentum liquoris in trapeziolum EF *se* æquale cum sit producto ex pondere columnæ basin EF *se* [ EF. Dd ] altitudinem PI habentis, in distantiam AD ab hypomochlio; erit summa momentorum omnium, sive pressio totius liquoris in superficiem QRLM =  $\int (EF. Dd. PI. AD)$  quæ summa ita sumi debet, ut evanescat, quando AI evadit æqualis AP. Nunc, si ponamus superficiem QRLM insistere columnam uniformem ejusdem liquoris, cujus altitudo sit PS; ejus momentum æquale erit producto ex AC [ distantia centri gravitatis ab hypomochlio ] & [ pondere columnæ ] PS. QRLM: quod momentum ut supputetur, necesse est invenire magnitudines AC & PS. Per vulgarem methodum investigandi centra gravitatis, AC invenitur, si summa momentorum omnium particularum superficiem QRLM dividatur per ipsam superficiem. Igitur AC =  $\frac{\int (EF. Dd. AD)}{QRLM}$ .

Et, eadem lege, PS =  $\frac{\int (EF. FG. Ii. PI)}{\int (EF. FG. Ii)}$

quæ omnes summæ evanescere debent, cum AI sit æqualis AP.

Ergo pressio columnæ uniformis, altitudinem PS habentis, est =  $\frac{\int (EF. Dd. AD) \int (EF. FG. Ii. PI)}{QRLM}$   
 $\frac{QRLM}{\int (EF. Dd. AD) \times \int (EF. FG. Ii. PI)}$   
 $= \frac{\int (EF. FG. Ii)}{\int (EF. FG. Ii)}$

Jam vero, Ii est ad Dd, ut AK ad AB; & FG [aut DH] ad AD, ut Bb ad AB: hoc est Ii =  $\frac{AK}{AB} Dd$

& FG =  $\frac{Bb}{AB} AD$ : quibus substitutis, sit  $\int (EF. FG. Ii. PI) = \int (EF. \frac{Bb}{AB} AD. \frac{AK}{AB} Dd. PI) = \frac{Bb. AK}{AB. AB} \times \int (EF. AD. Dd. PI) & \int (EF. FG. Ii) = \frac{Bb. AK}{AB. AB} \int (EF. AD. Dd)$

Ergo pressio columnæ uniformis altitudinem PS habentis =  $\int (EF. Dd. AD) \times \frac{Bb. AK}{AB. AB} \int (EF. AD. Dd. PI) = \frac{Bb. AK}{AB. AB} \int (EF. AD. Dd.) = \int (EF. AD. Dd. PI)$  æqualis pressioni liquoris in folle contenti.

Num.  
XXVIII.

quidem tum centrum gravitatis, ibi tertia, hic quarta solum parte altitudinis a summitate distat: sin vero basis deorsum spectet, sufficere in triangulari folle  $40\frac{1}{2}$ , in pyramidalis 36 digitos, quoniam tum centrum gravitatis, ibi duabus tertiis, hic tribus quartis partibus altitudinis, utrobique scilicet 27 digitis a summitate abest; adeoque hoc in situ sufficere illi subduplam, huic subtriplam ejus, quæ in priori situ requirebatur, altitudinem.

Constat etiam secundo, mercurium folli triangularis 40 digitos alti, cujus basis sursum spectat, æquipollere non nisi  $13\frac{1}{2}$  digitis; pyramidalis vero paris altitudinis, duntaxat 10 digitis; [ non 20, ut putat Cl. PAPINUS: ] sin vicissim basis deorsum vergat, illius mercurium æquivalere  $26\frac{2}{3}$ , hujus 30 digitis.

Constat denique tertio, quod ubicunque statuatur tubi vasculum, Auctor Machinæ necessario spe sua frustrandus sit. Nam in folle, cujus basis sursum conversa est [ Fig. 4. ] si vasculum  $r$ , humiliter collocetur axe motus, sive huic vicino centro gravitatis  $f$ ; præponderabit ex natura siphonis argentum tubi; comprimetur ergo folle, non dilatabitur, ut vellet Auctor: sin altius constituatur, præponderabit equidem argentum in folle, eumque dilatabit; sed rotata postmodum circa axem, & situm horizontalem adepta machina, non poterit argentum e folle in vasculum elevatius retrofluere. Vice versa in folle cujus basis ima respicit, [ Fig. 5. ] si vasculum supra axem statuatur, prævalebit hydrargyrum in folle; quare dilatabitur, non constringetur, ut optaret Auctor: sin infra axem, constringetur quidem, sed facta deinceps rotatione nullus jam mercurii, e loco humili in altiorrem, e vasculo in follem, dabitur refluxus.

Atque ita confido, me non tantum absolutam impossibilitatem consequendi hac ratione motus alicujus perpetui, ex meo principio Sole clarius ostendisse; sed & Regulam simul universalem exhibuisse, pro æstimandis quibuscumque in Triangulo vel Pyramide compressibili contentorum liquorum pressionibus: id ipsum est, quod Auctor Machinæ in fine dissertationis suæ a Doctis indagari desiderat, quodque contemplationis insignis & usus fore non exigui recte conjicit. Hæc de prima responsionis parte.

Quod

Quod jam ad alteram atinet quæ, pristino retento situ, vel pro-<sup>Num.</sup>  
longatione folliis, vel abbreviatione tubi, Machinæ suæ medelam <sup>XXVIII</sup>  
offerre studuit; ei non est cur immoremur: quandoquidem non  
meum, sed *Papinianum* calculum enervat: quocirca, quid ad  
correctionem hanc ex suis principiis sibi respondendum sit, ipse  
viderit PAPINUS. Quod ad me spectat; prolonget, abbreviet  
Auctor, quantum volet; quid profecturus sit, unico supra alla-  
to dilemmate edoceri poterit. Nolo etiam bina Experimenta de  
Folle in aquam demerso, alioque adaptatum in basi tubum ha-  
bente, quorum mentionem iteratam in Responsione sua injicit,  
hic recoquere; postquam disparem, inter hos folles & controver-  
sam Machinam, rationem in prima mea *Appendice* liquido of-  
tendi.

Unicum est quod non possum quin occasione dictæ Appendicis  
memorem; me videlicet parumper justo æquius in illa de PA-  
PINI calculo sensisse: conjecturabam enim illum, seposita vectis  
consideratione, Mercurii pressionem in folle juxta molem æsti-  
masse, adeoque subtripulam ejus, quæ a columna uniformi & æ-  
que alta proficiscitur. Video autem, ab ipso statui omnino sub-  
duplam: cum tamen ignorare non debuerit, pyramidem subtri-  
plam esse, non subduplam æque alti prismatis ejusdem basis.

*Videantur Numeri XXXII & XXXIII.*

# SOLUTIO ALGEBRAICA PROBLEMATIS

de Quadrisectione Trianguli Scaleni , per  
duas Normales rectas.

*Autore* JAC. BERNOULLI *Math. Profess.*  
*in Academia Basileensi.*

*Acta Erud.*  
*Lips. 1687.*  
*Novemb.*  
*pag. 617.*

**P**roblema hocce , quod summum hujus ævi Mathematicum non ita pridem occupatum tenuit , tam parum ex voto eisdem successisse audio , ut ultra quadragesimam potestatem , si bene memini , & credere fas est , assurrexerit. At , cum intra octo dimensiones illud coerceri posse deprehendam , operæ pretium esse duxi , ut tanti discriminis pateret ratio , viam , quam in ejus analysi ingressus sum , publico exponere. Quam in rem sequentia præmitto Lemmata :

LEMMA I. *Utraque linearum quadrifecantium bisecat Triangulum ; quod per se clarum.*

*Fig. 1.*

II. *Neutra quadrifecantium normalium terminari potest in angulo Trianguli Scaleni :* DEM. Si fieri potest , cadat una quadrifecantium AD , in angulum A ; tum altera terminabitur vel in utroque crure anguli A , vel in alterutro tantum : Terminetur primo in utroque crure , ut recta EF. Quoniam igitur Triang. AEL ponitur = Triang. ALF , erit EL = LF ; & propter commune latus AL , angulosque interceptos ALE , ALF rectos , ang. EAL = LAF , sive BAD = DAC : quare BA = AC =



$AC = BD : DC$ ; & quia  $BA >$  vel  $<$  ponitur  $AC$ , erit quoque  $BD >$  vel  $<$   $DC$ , ac Triang.  $BAD >$  vel  $<$  Triang.  $DAC$ ; quocirca recta  $AD$  non bilecat Triang.  $BAC$ ; propterea per *Lemma* I. non potest esse quadrifecantium una. Terminetur autem *secundo*, in alterutro crure tantum, ut recta  $GH$ , ducanturque rectæ  $IC$ ,  $IB$ ; quoniam Trapezium  $AIHC = Tr. IDH$  erit  $Tr. AIC <$   $Tr. CID$ , &  $AI <$   $ID$ : haud secus, quia  $Tr. AIG = Trapez. IGBD$ , erit  $Tr. AIB >$   $Tr. IBD$ ; &  $AI >$   $ID$ : igitur  $AI$  simul  $>$  &  $<$   $ID$ . *Q. E. A.*

III. *Neutra quadrifecantium normalium parallela vel perpendicularis esse potest ulli lateri Trianguli Scaleni*: DEM. Esto, si fieri potest, recta  $FG$ , parallela lateri  $BC$ ; cadetque perpendicularis  $DE$ , in alterutrum latus  $AC$  vel  $AB$ ; nec enim angulo  $A$  occurrere potest, per præcedens *Lemma*: Occurrat itaque priori in  $D$ , & ducatur  $DF$ , quæ producta offendat productam  $EB$  in  $I$ . Quoniam igitur Triang.  $GHD = Trap. CDAF$ , erit  $Tr. GHD >$   $Tr. HDF$ , & recta  $GH >$   $HF$ , &  $CF >$   $EI$ , unde  $CE$  nullo  $>$   $EB$ . Cum ergo in Trap.  $GGHE$  &  $HEBF$ , duo latera  $GH$ ,  $CE$  majora sint duobus lateribus  $HF$ ,  $EB$ , utrumque utroque, & perpendicularis  $HE$  communis, erit  $Trap. CGHE >$   $Trap. HEBF$ : Igitur non quadrifecatum est Triangulum  $ABC$ , contra hypothesin.

IV. *Bina rectæ quadrifecantes Triangulum quodcunque, non terminantur duabus extremitatibus in uno Trianguli latere, & duabus aliis in alio*. DEM. Terminentur, si fieri possit, in latere  $AB$  extremitates  $D$  &  $F$ , ac in latere  $BC$  extremitates  $G$  &  $E$ , junganturque  $DG$ ,  $FE$ . Quoniam Triangula  $DHF$  &  $GHE$  ponuntur æqualia, habebunt latera circum verticales angulos reciproce proportionalia,  $FH : HG = HE : HD$ ; & quia  $FH >$   $HG$ , [quandoquidem  $Tr. FHD =$  quinquangulo  $ADHGC$ , ac proinde  $>$   $Tr. DHG$ ] erit quoque  $HE >$   $HD$ ; quare &  $Tr. HEF >$   $Tr. HDF$ , seu  $Trap. HEBF$ , pars toto. *Q. E. A.*

*Coroll.* Cum igitur Trianguli non nisi tria sint latera, duarum autem quadrifecantium quatuor extremitates, quarum nulla terminari

Fig. 2.

Fig. 3.

# 330 QUADRISECTIO TRIANGULI SCALENI

N. XXIX. minari potest in angulo, nec binæ in uno, binæ in alio latere; necesse est, ut duæ illarum occurrant uni lateri, singulæ vero reliquarum singulis reliquis lateribus. Illud vero latus, cui duæ occurrunt quadrifecantium extremitates, ex inventa æquatione cognovi, plerumque tantum esse medium, nunquam maximum, raro minimum; nempe tum demum, cum Triangulum Scalenum quam proxime ad Isopleuron accedit. Sequitur nunc ipsa Propositionis

## ANALYSIS.

Fig. 4.5.6. Sit factum, estoque Triangulum Scalenum ABC [Fig. 4.5.6.] quadrifecatum per rectas DE, FG, se mutuo secantes ad rectos angulos in H. Demissis in latus AC [productum si opus fit,] tribus perpendicularibus BK, EL, GI, ductisque ex puncto H aliis tribus rectis ad singulos angulos figuræ, HA, HB, HC; sunt

$$\begin{array}{lll} AC = a & KB = d & CD = x \\ CB = b & KC = e & AF = y \\ BA = c & KA = f & \end{array}$$

$$\text{erit } Tr. ABC = \frac{1}{2}ad, Tr. DEC [Tr. FAG] = \frac{1}{2}ad, Tr. DHF [Tr. HEBG] = \frac{1}{2}ad$$

$$EL = \frac{Tr. DEC}{\frac{1}{2}DC} = \frac{ad}{2x}, GI = \frac{Tr. FAG}{\frac{1}{2}AF} = \frac{ad}{2y}$$

$$BK:EL = BC:EC = KC:LC$$

$$d: \frac{ad}{2x} = b: \frac{ab}{2x} = e: \frac{ae}{2x}$$

$$BK:GI = BA:GA = AK:AI$$

$$d: \frac{ad}{2y} = c: \frac{ac}{2y} = f: \frac{af}{2y}$$

Hinc

Hinc in 4 & 6 Fig. .... in 5. Fig.

N. XXIX.

$$DL (CD - CL) = x - \frac{ac}{2x}, DL (CD + CL) = x + \frac{ac}{2x}$$

... in 4 & 5 Fig. .... in 6 Fig.

$$IF (AF - AI) = y - \frac{af}{2y}, IF (AF + AI) = y + \frac{af}{2y}$$

$$DF : DC = Tr. DHF : Tr. DHC$$

$$x + y - a : x = \frac{ad}{8} : \frac{adx}{8x + 8y - 8a}$$

$$Tr. DEC - Tr. DHC = Tr. CHE$$

$$\frac{ad}{4} - \frac{adx}{8x + 8y - 8a} = \frac{adx + 2ady - 2aad}{8x + 8y - 8a}$$

$$EC : EB = Tr. CHE : Tr. EHB$$

$$\frac{ab}{2x} : \frac{ab}{2x} = \frac{adx + 2ady - 2aad}{8x + 8y - 8a} : \frac{2dxx + 4dxy - 5adx - 2ady + 2aad}{8x + 8y - 8a}$$

$$\text{Similiter } DF : AF = Tr. DHF : Tr. AHF$$

$$x + y - a : y = \frac{ad}{8} : \frac{ady}{8x + 8y - 8a}$$

$$Tr. FAG - Tr. AHF = Tr. AHG$$

$$\frac{ad}{4} - \frac{ady}{8x + 8y - 8a} = \frac{2adx + ady - 2aad}{8x + 8y - 8a}$$

$$AG : GB = Tr. AHG : Tr. GHB$$

$$\frac{ac}{2y} : \frac{ac}{2y} = \frac{2adx + ady - 2aad}{8x + 8y - 8a} : \frac{4dxy + 2dyy - 5ady - 2adx + 2aad}{8x + 8y - 8a}$$

$$Tr. EHB + Tr. GHB = \text{Trap. HEBG}$$

$$\frac{2dxx + 4dxy - 5adx - 2ady + 2aad}{8x + 8y - 8a} + \frac{4dxy + 2dyy - 5ady - 2adx + 2aad}{8x + 8y - 8a} = \frac{ad}{8}$$

Jac. Bernoulli Opera.

V u

unde

# 332 QUADRISECTIO TRIANGULI SCALENI

N.XXIX. unde reperitur  $yy = 4ay - 4xy - 2\frac{1}{2}aa + 4ax - xx$  pro  
priori Aequatione.

Rursus quia Triangula G I F, D L E sunt similia, cum habeant  
angulos ad I & L rectos, ac præterea angulum D E L [qui an-  
guli E D L complementum existit] æqualem angulo G F I qui  
ejusdem quoque E D L est complementum, ob angulum D H F  
rectum; hinc erit

$$GI: IF = DL : EL$$

$$\frac{ad}{2y} : y \pm \frac{af}{2y} = x \pm \frac{ae}{2x} : \frac{ad}{2x}$$

& proportionem ad æqualitatem reducta

$$yy = \pm \frac{1}{2}af + \frac{aad}{4xx \pm 2ae}$$

sive in omni Triangulo substitutis loco perpendicularis  $d$ , & seg-  
mentorum basis,  $e, f$ , eorum valoribus [ut pote qui ex datis  
Trianguli lateribus  $a, b, c$ , facile innotescunt] habebitur pro al-  
tera Aequatione,

$$yy = \frac{aaxx - bbxx + ccxx - \frac{1}{4}a^4 + \frac{1}{2}aabb + \frac{1}{4}aacc}{4xx - aa - bb + cc}$$

Qua porro cum priorē debite collata, obtinetur sequens Aequa-  
tio determinata octo dimensionum, solumque est Problema:

$$\begin{aligned} x^8 - 8ax^7 + 17aax^6 - 10a^3x^5 - 4\frac{1}{2}a^4x^4 + 5a^5x^3 - \frac{1}{4}a^6xx - \frac{1}{2}a^7x + \frac{1}{16}a^8 = 0 \\ + 3bb - 2abb - 9\frac{1}{2}aabb + 12a^3bb - 1\frac{1}{2}a^4bb - 2\frac{1}{2}a^5bb + \frac{1}{4}a^6bb \\ - 3cc + 2acc + 6aacc - 6a^3cc + aab^4 + a^5cc - \frac{1}{8}a^6cc \\ - \frac{1}{4}b^4 + ab^4 - 1\frac{1}{2}aabbcc - 2a^3b^4 + \frac{1}{4}a^4b^4 \\ + 1\frac{1}{2}bbcc - 2abbcc + \frac{1}{4}aac^4 + 2\frac{1}{2}a^3bbcc - \frac{1}{4}a^4bbcc \\ - \frac{1}{4}c^4 + ac^4 - \frac{1}{2}a^3c^4 + \frac{1}{16}a^4c^4 \end{aligned}$$

Quod si expuncta littera  $c$ , æquatio instituat in litteris  $a$ , &  $e$ ;  
tunc quindecim membris evadet brevior, ultimusque terminus  
trium tantum erit membrorum: Si loco incognitæ  $x$  ponatur  
F C, pro A C vero  $2a$ ; C B,  $2b$ ; B A,  $2c$ ; rursus devenietur  
ad

ad Æquationem totidem dimensionum, sed secundo termino, & N. XXIX. fractionibus carentem; &c.

SCHOL. I. Si rectæ DE, FG (*Fig. 4. 5, 6.*) sigillatim bisecent Triangulum ABC, sitque  $DF = AD + FC + \sqrt{(2ADq + 2FCq)}$ , tunc quadrifecabunt Triangulum; & si quadrifecent, erit  $DF = AD + FC + \sqrt{(2ADq + 2FCq)}$ . Fluit hoc Porisma ex priore Æquatione indeterminata, quæ quadrifecctionem respicit,  $yy = 4xy - 4xy - 2\frac{1}{2}aa + 4ax - xx$ . Etenim si ponatur  $AD = p$ ,  $FC = q$ ,  $DF = z$ ; adeoque  $y = p + z$ ,  $x = q + z$ ,  $a = p + q + z$ : atque hi valores loco litterarum  $y$ ,  $x$ ,  $a$  in æquatione hac substituantur, prodibit  $z = p + q + \sqrt{(2pp + 2qq)}$ .

Quare si quadrifecctum sit Triangulum per rectas DE, FG, sitque  $AD = FC$ , erit  $DF = 4AD$ , & tota  $AC = 6AD$ : Si vero  $AD = 1$ ,  $FC = 7$ , erit  $DF = 18$ : si illæ = 7 & 17, erit hæc = 50: si illæ = 7 & 23, erit hæc = 64, &c. Sequitur etiam, si data quædam recta linea AC, modo quo requiritur, secta sit in D & F, & quaecunque Triangulum super data AC constitutum fuerit, posse ex punctis sectionis duas inflecti rectas, quæ Triangulum illud quadrifecent.

II. Ex collatione porro utriusque æquationis indeterminatæ constare potest, latus illud Trianguli, in quo terminantur duæ quadrifecantium normalium extremitates, nunquam posse esse maximum: Nam AD existente =  $p$ , &  $FC = q$ , DF est  $= p + q + \sqrt{(2pp + 2qq)}$  per 1. Schol; adeoque tota AC [ $a$ ] =  $2p + 2q + \sqrt{(2pp + 2qq)}$ ; CD [ $x$ ] =  $p + 2q + \sqrt{(2pp + 2qq)}$ ; AF [ $y$ ] =  $2p + q + \sqrt{(2pp + 2qq)}$ : hinc posita  $b \leq a$ , seu  $bb \leq aa$ , quantitate aliqua  $l$ , ut sit  $bb = aa - l$ ; si pro litteris  $a$ ,  $b$ ,  $x$  &  $y$ , aut  $aa$ ,  $bb$ ,  $xx$ ,  $yy$ , hi valores, eorumve quadrata in æquatione altera

$$yy = \frac{aa xx - bb xx + cc xx - \frac{1}{2}a^4 + \frac{1}{2}aa bb + \frac{1}{2}aa cc}{4xx - aa - bb + cc}$$

subrogentur, & æquatio ita ordinetur, ut  $cc$  ab una parte extet sola,

N. XXIX. sola, reperietur  $cc = (32p^3q + 52ppqq + 56pq^3 + 34q^4 + 3ppl + 2pql + (24ppq + 40pqq + 24q^3 + 2pl) \sqrt{(2pp + 2qq)}) : (2pq + 3qq + 2q \sqrt{(2pp + 2qq)})$ , & quandoquidem valore ipsius  $aa$  ad fractionem ejusdem nominis redacto, inveniatur tantum  $aa = (28p^3q + 50ppqq + 52pq^3 + 34q^4 + (20ppq + 36pqq + 24q^3) \sqrt{(2pp + 2qq)}) : (2pq + 3qq + 2q \sqrt{(2pp + 2qq)})$ , manifestum est,  $cc > aa$ , &  $c > a$ . Eodem pacto, si supponatur  $c < a$ , reperietur  $b > a$ . Quare  $a$  non potest esse latus maximum.

At vero quia si ponatur  $b > a$ , seu  $bb > aa$  quantitate quam  $m$ , reperitur  $cc = (32p^3q + 52ppqq + 56pq^3 + 34q^4 - 3ppm - 2pqm + (24ppq + 40pqq + 24q^3 - 2pm) \sqrt{(2pp + 2qq)}) : (2pq + 3qq + 2q \sqrt{(2pp + 2qq)})$ , adeoque  $cc - aa = (4p^3q + 2ppqq + 4pq^3 - 3ppm - 2pqm + (4ppq + 4pqq - 2pm) \sqrt{(2pp + 2qq)}) : (2pq + 3qq + 2q \sqrt{(2pp + 2qq)})$ , evidens est,  $c$  posse esse  $>$  vel  $<$   $a$ , prout hæc quantitas vel positiva est, vel negativa, id est, prout  $4p^3q + 2ppqq + 4pq^3 + (4ppq + 4pqq) \sqrt{(2pp + 2qq)} >$  vel  $<$  est, quam,  $3ppm + 2pqm + 2pm \sqrt{(2pp + 2qq)} : sive prout (p+q) 2q - (2p+8q) pq : (3p+2q+2\sqrt{(2p^2+2q^2)}) >$  vel  $<$   $m$ , quorum utrumque fieri potest. Quare si major sit, latus  $a$  utroque reliquorum  $b$  &  $c$  minus erit: sed tum alia quoque duæ normales e medio latere inflecti possunt, idem Triangulum quadrifecantes; ut si  $a = 484$ ,  $b = 490$ , &  $c = 495$ , possunt optatæ rectæ educi tum ex latere  $a$ , segmentis ejus existentibus 62, 324, 98; tum ex latere  $b$  segmentis ejus factis circiter 131, 339, 20.

III. In Triangulo rectangulo & obtusangulo, latus  $a$ , in quo terminantur duæ quadrifecantium normalium extremitates, necessario medium est: Cum enim subtenſa anguli recti vel obtusi esse non possit (quia maximum latus esse non potest, ut jam ostensum) hinc vel  $b$ , vel  $c$  subtenſa hæc erit; adeoque ejus quadratum vel  $=$  vel  $>$   $aa +$  quadrato alterius, id est, (si & altera



altera hæc supponatur  $> a$ ) majus duplo  $aa$ , quo tamen multo N. XXIX. minus esse ostendit calculus.

IV. Latus e quo inflectuntur ambæ quadrifecantes normales, medietate alterutrius reliquorum semper majus est; quoniam enim  $\text{Tr. DHF} = \text{Trap. HFCE}$ , erit  $\text{Tr. DHF} > \text{Tr. HFE}$ , &  $\text{DH} > \text{HE}$ ; cumque anguli  $\text{DHF}$ ,  $\text{EHF}$  recti, &  $\text{HF}$  perpendicularis communis, erit  $\text{DF} > \text{FE}$ , &  $\text{DC} > \text{FE} + \text{FC} > \text{EC}$ . Hinc quia  $\text{CE} = ab : 2x$ , erit  $x > ab : 2x$ , &  $xx > ab : 2$ , &  $aa (> xx) > ab : 2$  &  $a > \frac{1}{2}b$ . Similiter quoque ostendetur  $a > \frac{1}{2}c$ . Hinc in solo Triangulo oxygonio, & quidem illo tantum, quod æquilatè affine est, latus minimum optatam proprietatem habet, ut recipere possit duas normalium quadrifecantium extremitates.

V. Posito  $a$  latere medio,  $b$  minimo, &  $c$  maximo; nempe  $bb = aa - l$ , &  $cc = aa + m$ , substitutisque in reperta Æquatione his valoribus, exurgit  $4p^3q + 2ppqq + 4pq^3 + (4ppq + 4pqq)\sqrt{(2pp + 2qq)} = 2pqm - 2pql + 3qqm - 3ppl + (2qm - 2pl)\sqrt{(2pp + 2qq)}$ ; unde liquet, quia prior pars est positiva, alteram quoque talem esse debere; adeoque si  $m =$  vel  $< l$ ,  $q$  fore  $> p$ , si verò  $p =$  vel  $> q$ ,  $m$  fore  $> l$ : id est, si differentia quadratorum lateris maximi & medii æqualis vel minor est differentia quadratorum medii & minimi; tunc segmentum lateris medii, adjacens lateri minimo, majus est segmento adjacenti lateri maximo: sin vero hoc segmentum æquale vel majus illo; tunc differentia illorum quadratorum major est differentia horum. Prætereo alias Problematis determinationes.

*Videatur Nūmeri LXXVII Articulus 2.*



No. X X X.

JACOBI BERNOULLI

Mathematicum Professoris Publici,

NOVA RATIO METIENDI

ALTITUDINES NUBIUM:

Actorum Eruditorum Collectoribus  
communicata*in litteris Basileæ A. 1688. mense Januario datis.*

*AA&Erud.*  
*Lipf. 1688.*  
*Febr. p. 98.* **A** Nsam huic tentamini dederunt observatæ mihi crebrius, sudor & sereno cælo, fluctuantes hinc inde nubeculæ, quæ vespere Sole occidente, & post ejus occasum purpureo aliquandiu colore tinctæ conspiciebantur, donec exacto horæ quadrante, vel semihora circiter, colore hoc subito evanescente, iterum pallescerent. Quoniam enim ratione & experientia quotidiana edocebar, Solis occidui radios discedere primum a locis depressioribus, tardius ex altioribus, primum ex arvis & pratis, inde deferere ædificiorum culmina, postmodum montium cacumina, omnium autem tardissime obscurari nubes, citius quidem orientales, tardius occidentales; non dubitavi colligere, hanc nubium rubedinem aliunde non provenire, quam a reflexione radiorum solarium ipsas directe illustrantium; quæque propterea disparere necessum habeat, tum cum Sol post Terræ tumorem se abscondit. Quo principio posito, inquirere cepi, num ex observato tempo-  
re

re disparitionis coloris hujus rubicundi, venari possimus nubium No. XXX. altitudinem.

Admittit autem hoc Problema tres quatuorve casus, quos ordine enodabimus.

## I. CASUS,

*Cum Nubes verticalis est.*

Esto [Fig. 1.] ACE Globus terraqueus, E locus spectatoris, B Nubes verticalis; ac proinde EB ejus distantia a Terræ superficie; BDF planum circuli verticalis per Solem transeuntis. Sol, existens in D lambit Terram radiis suis in E, id est, illic loci occidit; promotus in F eandem radit in C, subrepturus deinceps nubi B lumen suum: DF est arcus depressionis verticalis Solis sub horizonte, quæ Trigonometricè invenitur, ex observata temporis differentia inter momentum occasus Solis & momentum disparitionis rubedinis in Nube.

Antequam pergamus, ostendendum, quod arcus depressionis Solis DF sit similis arcui terrestri CE: quod facile probatur. Ductis enim rectis DA, FA, apparet Triangula DEA, FCA, similia & æqualia esse; quocirca angulus DAF = angulo FAC, & ablato communi DAC, angulus CAE = angulo FAD, id est, arcus CE similis arcui DF.

Quo demonstrato, manifestum, in Triangulo CAB, ut Sinus totus ad Secantem anguli CAB, vel FAD, ita semidiameter Terræ AC, ad distantiam Nubis a centro Terræ BA; e qua si auferatur semidiameter Terræ AE, obtinebitur distantia Nubis a superficie Terræ BE.

## II. CASUS,

N. XXX.

## II. CASUS,

*Cum Nubes tempore observationis reperitur in eodem Verticali cum Sole, sed extra verticem.*

[Esto adhuc [Fig. 2. 3.] B locus Nubis; BEH ejusdem elevatio supra horizontem quadrante capta; AG perpendiculum e centro Terræ per locum stationis sursum productum ad intersectionem usque radii solaris FCB. Quo facto, quoniam angulus depressionis verticalis Solis DAF, id est [per Lemma præcedens] angulus CAG datus est, una cum semidiametro Terræ AC, invenientur quoque anguli AGC & AGB [qui in Fig. 3. coincidunt] ut & recta AG; subtractaque semidiametro Terræ AE, recta EG. Et quia in Triangulo BEG, præter modo inventum latus EG, noti etiam sunt anguli [quippe angulus BEG ipsius BEH complementum est ad rectum] innotescet hinc quoque latus BE, e quo & Terræ semidiametro AE, anguloque intercepto AEB [qui compositus est ex recto & dato HEB] in Triangulo AEB patefiet porro latus AB: unde dempto radio AL, remanebit tandem LB, pro quæsitâ distantia a superficie Terræ.

## III. CASUS,

*Cum Nubes nec verticalis est, nec in eodem plano verticali cum Sole existit.*

Casus iste præcedentibus difficilior: Observetur differentia azimuthalis Solis & Nubis, seu angulus, quem verticalis Nubis cum

cum verticali Solis constituit; eo momento quo rubedo in Nu-No. XXX. be disparet. Sit angulus iste,

1°. *Rectus*: Considera, radios e centro Solis egressos, Terræ superficiem, qua diei & noctis sunt confinia, & circumcirca radendo circulum in illa describere [quem *Circulum penumbra* appellare lubet,] adeoque conum efformare, qui ob verticem acutissimum in centro Solis pro cylindro haberi potest; notabisque Nubem, eo momento quo pallescere incipit, existere in superficie hujus conii cylindrive: quare si secetur conus iste plano verticali per Nubem transeunte [quod ad axem conii sub Terra depressum est obliquum] nascetur inde Ellipsis, in cujus circumferentia reperietur Nubes. Centrum hujus Ellipsis coincidit cum centro Terræ A [Fig. 4.] maxima ejus semidiameter AC est linea verticalis, porrecta ex centro Terræ A, per oculum Spectatoris E, usque ad occursum radii solaris GC Terram lambentis in G; estque hæc linea AC cognita, Secans scilicet anguli GAC, id est, depressionis Solis infra horizontem [per præmissum *Lemma*]: minima Ellipsis semidiameter AD est ipsa semidiameter Terræ, vel sinus totus. Quoniam enim circulus verticalis Solis transit per punctum perpendiculariter sub Sole situm, ceu polum circuli penumbrae; hinc circulus penumbrae & verticalis Solis sese secant ad angulos rectos, quare & ille vicissim transit per polos hujus; sed per hujus polos transit quoque verticalis Nubis [quia per hypothesin eum recte secat]: ergo etiam verticalis Nubis & circulus penumbrae sese in polo illo intersecant: unde radius qui lambit polum hunc, ibidem offendit planum Ellipsis; quod cum fiat in superficie Terræ, erit ejus distantia a centro Terræ æqualis hujus semidiametro; cumque in circulo verticali Nubis, quadrante distet a linea verticali AC; sequitur, si hæc sit semissis axis majoris, semidiametrum Terræ esse semissem minoris.

Ductis itaque seorsim [Fig. 5.] lineis AD, AC, ad rectos sese decussantibus in A; describatur per ipsarum extremitates D & C quadrans Ellipsis CBD; &, propter oculum Spectatoris existentem in perpendiculari AC, fiat in illa AE = AD; erit-

No. XXX. que E locus observationis, super quo constituendo angulum CEB æqualem distantiae Nubis a vertice, designabis punctum B locum Nubis in Aere. Qui si analytice inveniendus sit, posito  $AD [AE] = a$ ,  $AC = b$ ,  $BG = x$ , & ratione BG ad GE  $= a : m$ . data ob angulum BEF vel BEG datum; habebitur  $x = (-aam + ab \sqrt{(bb + mm - aa)}) : (bb + mm)$ ; (\*) e qua inventa, ut & GA  $[AE + EG] = a + mx : a$ , facile elicitur AB; unde si subtrahatur Terræ semidiameter AE, obtinebitur quæsita distantia perpendicularis Nubis a superficie Terræ. Q. E. I.

2°. *Obliquus*: Cum circuli verticales Solis & Nubis se mutuo secant oblique, neuter per alterius transibit polos: quare etiam verticalis Nubis & circulus penumbræ alio loco, quam in polo verticalis Solis, nimirum supra infrave horizontem se intersectabunt: & quandoquidem hæc intersectio determinet minimam diametrum Ellipseos, sequitur lineam verticalem [quia plus minusve ab illa intersectione quam quadrante abest] non posse esse maximam. Maxima vero semidiameter ita reperitur: Ut Sinus totus ad Sinum differentiae azimuthalis Solis & Nubis; ita Sinus complementi depressionis Solis infra horizontem, ad Sinum complementi anguli, cujus secans est semissis axis majoris; dum semissis minoris existit, ut antea, ipsa Terræ semidiameter, seu Sinus totus.

Ductis igitur axium semissibus AL & AD, [Fig. 6, 7, 8] per eorum extremitates describatur quadrans Ellipsis LCD, vel paulo amplius: cujus peripheriæ, ex centro applicetur recta AC, Secans anguli depressionis Solis infra horizontem [per superius Lemma] ut pote designans lineam perpendicularem e centro Terræ per Spectatoris oculum educam: In hac accipiat AE

= AD,

(\*) Nam AG (ex natura Ellipseos)  $= \frac{b}{a} \sqrt{(aa - xx)} = AE + EG = a + mx : a$ . Ergo, quadrando,  $bb - bxx : aa = aa + 2mx + m m x x : aa$ . Unde  $xx + 2a^2 mx : (bb + mm) = (aabb - a^4) : (bb + mm)$  &  $x = (-aam + ab \sqrt{(bb + mm - aa)}) : (bb + mm)$ .



$\equiv AD$ , eritque punctum  $E$  locus observationis, super quo con- No. XXX.  
 stituendus proin angulus  $CEB$ , æqualis distantiae Nubis a ver-  
 tice (versus  $AD$  quidem, cum Nubes occidentalis est; at versus  
 $AL$ , cum est orientalis: occidentalem voco, ubi differentia a-  
 zimuthalis Solis & Nubis est quadrante minor; orientalem, ubi  
 major) eritque  $B$  locus Nubis, qui quandoque, cum nubes orien-  
 talis est, cadere potest ultra verticem Ellipseos  $L$ , in alterum e-  
 jus quadrantem, ut *Fig. 8*: quod tamen contingere nequit, nisi  
 cum differentia azimuthalis Solis & Nubis a quadrante parum  
 differt, Nubesque horizonti admodum propinqua est. Ad inve-  
 niendum locum Nubis analytice, dimittantur perpendiculares  $CK$   
 in  $AL$ ,  $BG$  in  $AC$ , &  $BH$  in  $AD$ , ac producantur, si opus  
 sit,  $AC$  &  $HB$  ad communem concursum in  $M$ ; statuatur-  
 que  $AD [AE] = a$ ,  $AC = b$ ,  $AL = c$ , ratio  $BG$  ad  $GE$   
 data  $= a : m$ , &  $AH = x$ : quo facto, invenitur, primo  $AK$   
 $= c \sqrt{(bb - aa)} : \sqrt{(cc - aa)}$  &  $KC = a \sqrt{(cc - bb)}$ ;  
 $\sqrt{(cc - aa)}^{(a)}$ ; pro quibus brevitatis causa scribamus  $d$  &  
 $e$ : deinde ulterius contrahendi calculi ergo ponatur differentia  
 rectangulorum  $ae$  &  $dm = pp$ , summa eorundem  $= qq$ , sum-  
 ma rectangulorum  $ad$  &  $em = rr$ , differentia eorundem  $= ff$ :  
 sic reperitur  $(b)$

X x 2

In

(\*) Sit  $CK = e$ , &  $AK$ , ex  
 Ellipsis, natura erit  $= \frac{c}{a} \sqrt{(aa - ee)}$ . At vero  $AC^2 [bb] =$   
 $KC^2 [ee] + AK^2 [cc - cc ee : aa]$ .  
 Ergo  $aabb = aace + aacc - ccee$ .  
 Unde  $e = a \sqrt{(cc - bb)} : \sqrt{(cc - aa)} = KC$ ; &  $d [AK] =$   
 $\frac{c}{a} \sqrt{(aa - ee)} = a \sqrt{(bb - aa)}$ ;  
 $\sqrt{(cc - aa)}$ .

(b) Demittatur  $BO$ , normalis  
 ad  $AL$ , occurrens in  $I$  ipsi  $AC$ ;  
 & erit  $AK [d] : KC [e] = AO$

(quam vocabimus  $z$ ):  $OI = ex : d$ .  
 Igitur  $BI = BO - OI$  (*Fig. 6*)  
 vel  $OI - BO$  (*Fig. 7*) vel  $BO +$   
 $OI$  (*Fig. 8*),  $BI$ , inquam, est  $x -$   
 $ex : d$ , aut  $ex : d - x$ , aut  $x + ex :$   
 $d$ , id quod ambigue designabimus  
 sic,  $x \oslash ex : d$ . Rursus, (ob similia  
 triangula  $ACK$ ,  $AIO$ ,  $BIG$ ) est  
 $AC [b] : AK [d] = AI : AO$   
 $= BI (x \oslash ex : d) : BG = (dx$   
 $\oslash ex) : b$ ; & quoniam  $a : m =$   
 $BG : GE$ , erit  $GE = (dmx \oslash$   
 $emz) : ab$ . Igitur  $AG = AE +$   
 $EG = a + (dmx \oslash emz) : ab =$   
 $(aab)$

No. XXX. In 6. Fig. angulo CEB existente  $\angle$  CAD, quo casu etiam  $ae \angle dm$

$$x = \frac{-a^2 b p p + a c r r \sqrt{(a a p^2 + c c r^2 - a^2 b b)}}{a a p^2 + c c r^2}$$

angulo CEB existente  $\angle$  CAD, quo casu itidem  $ae \angle dm$ .

$$x = \frac{+a^2 b p p + a c r r \sqrt{(a a p^2 + c c r^2 - a^2 b b)}}{a a p^2 + c c r^2}$$

angulo CEB existente  $=$  CAD; evanescit quantitas  $pp$ , utpote  $ae = dm$ , estque

$$x = \frac{a}{bc} \sqrt{(bbcc - aadd)}$$

In 7. Fig. angulo CEB existente  $\angle$  CAL, quo casu quoque  $ad \angle em$ ,

$$x = \frac{+a^2 b q q - a c f f \sqrt{(a a q^2 + c c f^2 - a^2 b b)}}{a a q^2 + c c f^2}$$

angulo CEB existente  $\angle$  CAL, quo casu pariter  $ad \angle em$ .

$$x = \frac{+a^2 b q q + a c f f \sqrt{(a a q^2 + c c f^2 - a^2 b b)}}{a a q^2 + c c f^2}$$

angulo CEB existente  $=$  CAL, evanescit quantitas  $ff$ , utpote  $ad = em$ ,

$$\text{fitque } x = \frac{ae}{b}.$$

In

$(aab + dmx \oslash emz) : ab$ . Nunc quoniam  $AG^2 + GB^2 = AB^2 = AH^2 + HB^2$  erit  $AG^2 [(aab + dmx \oslash emz)^2 : aabb] = AH^2 + HB^2 - GB^2 [xx + zz - (dx \oslash ez)^2 : b^2]$ ; aut  $(aab + dmx \oslash emz)^2 = aabbxx + aabbzz - aa(dx \oslash ez)^2 = (quia bb = dd + ee) aaddxx + aacexx + aaddzz + aacezz - aaddxx \pm 2aadexz - aacezz = aaeezz + aaddzz \pm 2aadezz$

$= (aex \oslash adz)^2$ . Ergo  $aab + dmx \oslash emz = aex \oslash adz$ , vel  $aab = (ae \oslash dm)x \pm (ad \oslash em)z$ : hoc est, in casu Fig. 6.  $aab = ppx + rrz$ ; in casu Fig. 7.  $aab = qqx + ffz$ , in casu Fig. 8.  $aab = ffz - qqx$ . Hinc, separando  $z$ , & quadrando, & pro  $zz$  substituendo  $cc - cexx : aa$ , habentur æquationes quadraticæ, quarum solutiones dant Auctoris formulas.

In 8. Fig. ubi angulus CEB perpetuo existit  $\triangleright$  CAL, adeo- No. XXX.  
que &  $ad \triangleright em$ ,

$$x = \frac{-a^2 b q q + a c \sqrt{(a a q^2 + c c f^2 - a^2 b b)}}{a a q^2 + c c f^2}$$

Inventâ quantitate  $x$ , vel AH, facile tandem est, ex illa, &  
recta BH  $= \frac{c}{a} \sqrt{(a a - x x)}$ , investigare AB; a qua sub-  
tracta Terræ semidiameter AE relinquet quæsitam Nubis altitu-  
dinem. Q. E. I.



No. XXXI.

# JACOBI BERNOULLI

## ANIMADVERSIO

### IN GEOMETRIAM CARTESIANAM,

& *Constructio quorundam Problematum*  
*Hypersolidorum.*

Quamquam subinde extiterint, qui CARTESIUM in Physi-  
cis, aliisque, humani quippiam passum fuisse ostenderent, AB. Erud. Lips. 1688. Jun. P. 123.  
nemo tamen, quod sciam, hætenus in ejus Geometria  
quicquam, quod alicujus momenti esset, censura dignum adno-  
tavit; quale quiddam in sequentibus aperire constitui, postquam  
de primario Autoris in illa scopo pauca nonnulla prælibavero,  
quæ errorem ejus magis conspicuum, minusque excusabilem red-  
dere possunt.

CARTESIUS, in tribus *Geometria* suæ libris, præcipue ver-  
satur in eo, ut ostendat, Problematis cujusque constructionem

X x 3

sem-

N. XXXI. semper eligendam esse lineam simplicissimam, cujus ope id ipsum solvi queat, hoc est, ( prout se explicat ) non tam talem, quæ Problematis constructionem aut demonstrationem faciliorem reddat, quam quæ sit simplicissimi generis. Hoc enim posito, docet deinceps, solius lineæ rectæ & circuli ope, non posse construi nisi Problemata simplicia & plana, id est, *Æquationes unius duarumve dimensionum*, & ope Sectionis alicujus Conicæ non nisi Problemata solida, hoc est, *Æquationes trium quatuorve dimensionum*; & ope Parabolæ, ut vocat, secundi generis, *Æquationes duntaxat quinque vel sex dimensionum*; cæterasque altiorum graduum *Æquationes* requirere *eadem curvas gradatim in infinitum magis magisque compositas*. Quod tantundem est, ac si generaliter dixisset, *per curvas cujusque generis construi solummodo posse Æquationes duplo plurium dimensionum, quam sint illæ, quibus earundem curvarum natura exprimitur*. Quæ Regula a nemine huc usque in dubium vocata fuit; licet ejus falsitas facile potuisset detegi a SCHOOTENIO, HUDDENIO, aliisque, qui perspectam habebant methodum adinveniendi *Æquationum* constructiones; nisi, Magistri sui auctoritate præventi, veritatem dictorum ejus supponere quandoque, quam examinare maluissent.

Existimo namque demonstratu haud difficile esse, quod cujuslibet generis curva apta sint ad construendas *Æquationes* tot dimensionum, quot indigitat quadratum numeri dimensionum, ad quas ascendunt *Æquationes* curvarum illarum naturam exprimentes. Sic ope curvarum, quarum natura exprimitur per *Æquationem* cubicam, construi possunt non solum *Æquationes* bis trium seu sex, sed ter trium seu novem dimensionum; & quarum natura exprimitur per *Æquationem* biquadraticam, earum auxilio non modo *Æquationes* bis quatuor seu octo, sed quater quatuor seu sexdecim dimensionum resolvuntur, &c. plane ut hinc appareat, CARTESIUM ejusdem, quod ipse perstringit, vitii reum esse, dum ad constructionem Problematum superiorum graduum, præter necessitatem, adhibere docet curvas magis compositas, quam eorundem natura deposcit. Quod enim circa Sectiones  
Conicas



N. XXXI. illas curvas, quarum *Æquationes* vel ad surdesolidum; vel ad quadrato-cubum adscendunt, promiscue sub eodem curvarum genere complectitur.

Quicquid igitur sit de distinctione hac curvarum, certum est, *Æquationem* supra allatam ex sententia CARTESII construere non posse, nisi ope curvæ, quæ Sectiones Conicas ad minimum duobus gradibus excedit: cum tamen eandem construam facile adminiculo solius curvæ Paraboloidicæ cubicalis, quæ Sectiones Conicas uno duntaxat gradu superat. Constructio talis: Descripto (*Fig. 1.*) vulgari Paraboloide cubicali  $AG$ , cujus latus rectum  $AB$  seu  $1$ , vertex  $A$ , & axis  $AF$ ; sumatur in hoc axe  $AE = p$ , & ex puncto  $E$  excitetur perpendicularis  $EC = (p^3 - r) : q$ , circa quam ut axem, vertice  $C$ , & latere recto  $CD = \sqrt{q}$ , describatur aliud Paraboloides cubicale  $CG$ , interfecans alterum in puncto  $G$ ; e quò si dimittatur in axem  $AE$  perpendicularis  $GF$ , erit hæc radix *Æquationis* propositæ. DEM. Etenim, si linea  $GF$  sic inventa vocetur  $y$ , erit, ex natura Paraboloides,  $AF = y^3$ , ac proinde  $HG = EF = AE - AF = p - y^3$ , &  $HG^3 = p^3 - 3py^3 + 3py^6 - y^9 = (\text{propter Paraboloides } CG) DC^2$  in  $CH = DC^2$  in  $CE - GF = (per construct.) q$  in  $(p^3 - r) : q - y = p^3 - r - qy$ ; hoc est, *Æquatione* ordinata  $y^9 - 3py^6 + 3py^3 - qy - r = 0$ , quæ eadem est cum proposita: unde liquet, inventam lineam  $GF$ , quæ nominata fuit  $y$ , *Æquationis* hujus esse radicem. Q. E. D.

Potest vero etiam ipsa hæc *Æquatio* adhuc aliter construere, ope unius ejusdemque Paraboloides cubicalis, id est, duorum eandem parametrum habentium, hoc modo: Ductis (*ead. Fig. 1.*)  $EA$ ,  $EC$  perpendicularibus indefinitis, abscissaque  $EC = (p^3 - r) : q$ , ut antea, fiat  $EA = p : \sqrt[3]{q}$ ; & describantur circa axes  $AE$ ,  $CE$ , sumtis verticibus  $A$  &  $C$ , ac communi Parametro  $AB$  vel  $CD = \sqrt[3]{q}$ , duo Paraboloides cubicalia  $AG$ ,  $CG$ , sese interfecantia in puncto  $G$ ; demissa enim in  $AE$  perpendicularis  $GF$ , iterum *Æquationis* propositæ radicem designabit.

DEM.



DEM:  $(p^3 - 3pp^2y^3 + 3py^6 - y^9): \sqrt[4]{q^3} = ((p - y^3): \sqrt[4]{q})^3$  N. XXXI.  
 $= (EA - GF^3: AB^2)^3 = (EA - FA)^3 = HG^3 = DC^2$   
 $\times CH = DC^2 (CE - GF) = \sqrt[4]{q}((p^3 - r): q - y) = \sqrt[4]{q}$   
 $(p^3 - r - qy): q = (p^3 - r - qy): \sqrt[4]{q^3}$ : factaque mul-  
 tiplicatione per  $\sqrt[4]{q^3}$ , habetur, ut supra,  $p^3 - 3pp^2y^3 + 3py^6$   
 $- y^9 = p^3 - r - qy$ , sive  $y^9 ** - 3py^6 ** + 3pp^2y^3 * -$   
 $- qy - r = 0$ ; quare constat rursus GF Aequationis hujus  
 radicem fore. Q. E. D.

Dixi solam GF fore Aequationis radicem, non LM, vel IN,  
 vel OP, ut pote quæ radices sunt differentium Aequationum:  
 nam LM est radix vera hujus Aequationis,  $y^9 ** - 3py^6$   
 $** + 3p^2y^3 * + qy - 2p^3 + r = 0$ : IN radix falsa istius,  
 $y^9 ** + 3py^6 ** + 3pp^2y^3 * + qy + r = 0$ : & OP falsa  
 hujus,  $y^9 ** + 3py^6 ** + 3pp^2y^3 * - qy + 2p^3 - r = 0$ .  
 Quod cum primo animadvertissem, suspicari simul cœpi, curvas  
 AN & CL non easdem esse cum AG & CG; reque ulterius  
 perpenſa, mox verum deprehendi, quod curva AG infra axem  
 AE non continuetur sinistrorsum per AN, sed potius dextror-  
 sum per AQ, & similiter curva CG ultra axem CE non in-  
 flectatur deorsum versus L, sed sursum versus R: meminique  
 postea, id ipsum etiam jam olim a WALLISIO, sed alia occa-  
 sione, observatum esse, in Præfatione ejus ad *Tractatum contra*  
*MEIBOMIUM*. Etenim intersectiones harum curvarum RCGN,  
 & LGAQ, dicta ratione inflexarum supra axem AP, determina-  
 bunt omnes radices veras Aequationis nostræ, & reliquæ infra  
 axem omnes falsas: possunt autem se interfecare, supra axem  
 AP, ad summum in tribus punctis, & infra, in duobus, si ul-  
 timus Aequationis terminus habeat signum —, quod fit, si  $ES <$   
 $EA$ ; at si habeat signum +, id est, si  $ES > EA$ , possunt se  
 interfecare, supra axem, in quatuor punctis, & infra, in uno  
 solo: sic ut, illo casu, Aequatio tres admittere possit veras radi-  
 ces, & duas falsas; hoc vero, quatuor veras, & unam duntaxat  
 falsam: reliquæ enim quatuor semper hic imaginariæ sunt.

Quemadmodum vero Aequatio ista incompleta novem dimen-  
 sionum constructa est, adminiculo curvæ, quæ uno tantum gradu

*Jac. Bernoulli Opera.*

Y y

supra

N. XXXI. supra Sectiones Conicas est composita: ex eodem curvarum genere seligi omnino puto posse tales, per quas omnes, etiam completæ Æquationes totidem dimensionum generaliter resolvi ac construi queant.

Sed ut veritatem usumque eorum, quæ dixi, etiam in speciali aliquo Problemate, eoque celebri admodum, circa inventionem nimirum mediarum quarundam proportionalium, palam faciam; proponantur inveniendæ sex mediæ proportionales inter duas datas  $a$  &  $q$ : ubi constat, quod si pro prima earum ponatur  $x$ , perveniatur ad Æquationem bis-sur-solidam,  $x^7 - a^6 q = 0$ ; quæ, si CARTESIO fides adhibenda, aliter construi nequit, nisi adhibendo curvam, cujus natura exprimitur per Æquationem, in qua alterutra indeterminatarum ad biquadratum assurgit: At ego illam construo facillime, ope duarum curvarum, quarum natura intra limites Æquationis cubicæ coercetur. Ductis enim [Fig. 2.] normalibus rectis AD, AC; si circa illas ut axes, communi vertice A, parametris AB =  $a$ , & AF =  $q$ , describantur duæ Paraboliformes curvæ AGL & AGM, sese interfecantes in puncto G; quarumque illa sit vulgaris Paraboloidica cubicalis; hæc vero, alia Paraboloidica ejus naturæ, ut solidum ex ductu lateris recti in quadratum segmenti axis, sit æquale cubo ordinatim applicatæ; erit perpendicularis GE, ex puncto intersectionis G in axem AE demissa, radix Æquationis inventæ, id est, prima sex mediarum proportionalium, quarum tertia est AE.

DEM.  $aa y = AB^3 \times AE =$  (ex natura Paraboloidis AGL)  $EG^3 = x^3$ ; hinc  $y = x^3$ :  $aa$  &  $y^3 = x^3 : a^6$ : Rursus  $qxx = AF \times AH^2 =$  (ex natura Paraboloidis AGM)  $HG^3 = y^3 = x^3 : a^6$ , unde  $x^3 = a^6 qxx$ ; factaque divisione per  $xx$ ,  $x^7 - a^6 q = 0$ : quæ, quia cum superiore convenit, patet propositum. Notandum hac occasione: quia Æquatio, ad quam primo pervenitur, dividi potest per  $xx$ , sequitur illam, præter rectam GE, adhuc duas alias habere æquales radices, quales singulæ sint æquales nihilo; adeoque duas curvas in communi vertice A sese tangere debere: quo indicio, denuo cognovi, ad quas partes inflectantur curvæ ultra verticem; deprehendique non con-

tinuari

tinuari per AP & AO ; cum absurdum foret, curvas LAP, N. XXXI. MAO sic inflexas se in A contingere : sed priorem ( quod cum WALLISIO jam annotavi ) continuari per AQ, posteriorem vero ( quod a nemine huc usque observatum legi ) per AS : hac enim ratione contactus utriusque curvæ manifestus est.

Haud absimili observatione invenientur 10, 12, 16, pluresque proportionales : nam si curva AGL sit Paraboliformis biquadratica expressa per  $a' y = x^4$  ; & curva AGM Paraboliformis cubica denotata per  $a q x = y^3$  , erit GE prima decem proportionalium inter  $a$  &  $q$ , & AE quarta : sin & hæc sit biquadratica indicata per  $q x^4 = y^4$  erit GE prima duodecim proportionalium, & AE quarta &c. Quales quidem juxta CARTESIUM inveniri non possent, nisi ope curvarum, multis adhuc gradibus supra Paraboliformes istas compositarum.

Præterea sciendum, etiam quatuor medias proportionales inveniri posse ope Parabolæ & vulgaris Paraboloidicæ cubicalis ; quæ tametsi sit generis ejusdem cum illa, qua utitur CARTESIUS, tamen & constructionem multoties expeditiorem & demonstrationem planiorem efficit. Si enim ( *in eadem figura 2.* ) AGL fingatur esse vulgare Paraboloides cubicale, cujus latus rectum  $AB = a$ , & AGM Parabola, cujus latus rectum  $AF = q$  ; erit GE prima quatuor proportionalium inter  $a$  &  $q$ , & AE tertia. Quæ constructio conferri potest cum prolixissima illa *Cartesiana* quæ habetur sub finem Libri tertii.

Quibus omnibus rite perpenſis, nihil prorsus video, quid CARTESIUM hoc in passu ab ἀνευρησις vitio, quod ipsemet perstringit sæpius, liberare queat ; præterquam quod dici forte possit. ea propter Geometram hunc coactum fuisse, in construendis Æquationibus quadrato-cubum excedentibus, adhibere curvam nostram altiore, quia alteram curvarum, quarum intersectione determinari debent radices, perpetuo in omnibus suis constructionibus voluerit esse circularem, quæ simplicitate sua vicissim compenset quicquid altera nimium habet compositi. At ficulneum hoc esse præsidium, ipse si revivisceret, CARTESIUS haud gravatè agnosceret : quippe nemini, puto, condonaret, qui Proble-

N.XXXI. blemata plana, quæ duorum circulorum intersectione resolvi possunt, construere mallet ope Sectionis alicujus Conicæ & Lineæ rectæ, sub prætextu, quod sicut Sectio Conica circulo magis est composita, ita Linea recta vicissim eodem sit simplicior; neque etiam magis ab eo veniam impetraret, qui, in constructionibus Æquationum cubicarum, Circulo & Parabolæ præferret Lineam rectam & Paraboloidicam cubicalem, quarum una magis, altera minus illis est composita: ut maxime omnes Æquationes cubicæ Lineæ rectæ & unius ejusdemque Paraboloidis ope, non minus ac Circuli & Parabolæ adminiculo, scite & expedite construi possint hoc modo: Descripto (*Fig. 3.*) vulgari Paraboloide cubicali  $FEA$ , continuato, ut supra monui, per  $AH$ , cujus axis sit  $CAL$ , vertex  $A$ , & latus rectum  $AB = 1$ , abscindatur in axe [sinistrorsum, si sit  $z' = * - pz + q$ ; dextrorsum vero, si habeatur  $z^2 = * + pz + q$ , aut,  $z' = * + pz - q$ ]  $AM = p$ , &  $AI = q$ , junctaque  $BM$ ; ducaturque per  $I$  huic parallela  $IE$ , tangens vel secans curvam in puncto, vel punctis, a quibus demissæ ad axem perpendiculares denotabunt omnes Æquationis radices; nempe  $ED$  radicem veram primæ formulæ;  $LH$  veram, &  $FG$ ,  $ED$  falsas secundæ: sicut illa falsam, hæc veras tertiæ (\*). Cum itaque Constructiones istæ tam elegantes, tamque faciles, nihilominus e Geometria eliminantur a CARTESIO; perspicuum utique est, etiam modum, quem præscribit pro construendis Æquationibus quadrato-cubum excedentibus, repudiandum potius esse hoc nomine, quia curvam adhibere docet, utraque nostra magis compositam, quam excusandum, quod pro altera

(\*) Nam si dicatur  $LH, z$ ;  $DE$  &  $GF, -z$ , erunt, ex natura parabolæ cubicalis,  $AL = z^3$ ;  $AD$ , &  $AG = -z^3$ . Igitur  $IL = z^3 - q$ ,  $ID$  &  $IG = -z^3 + q$ . Sed  $AM (p)$  ad  $AB (1)$ , ut  $IL (z^3 - q)$  aut  $ID, IG (-z^3 + q)$ , ad  $HL (z)$  aut  $DE, FG (-z)$ . Igitur  $z^3 - q = pz$ , aut  $-z^3 + q = -pz$ ,

id est  $z^3 = pz + q$ .

Quod si posuissimus  $LH, -z$ ;  $DE$  &  $FG, +z$ , habuissimus  $z^3 = pz - q$ .

At vero, si  $ED = z$ , erit  $AD = z^3$ , &  $Di = q - z^3$ . Ergo  $Am (p) : AB (1) = Di (q - z^3) : DE (z)$  dat  $q - z^3 = pz$ , aut  $z^3 = -pz + q$ .

altera assumat circulum, qui iisdem simplicior existit.

N. XXXI.

Ut taceam de eo quod nequidem semper opus sit, in nostra methodo, quætere radices per intersectionem duarum diversarum curvarum, sed quod sæpe una sola sufficiat; prout ostendi in constructione posteriore *Æquationis* supra allatæ novem dimensionum, quam absolvi ope unius ejusdemque *Paraboloidis*, diversimode tantum positi: Cum, secundum *CARTESIUM*, semper describendæ sint duæ diversæ curvæ, quarum intersectionibus radices optatæ *Æquationum* inveniantur.



N°. XXXII.

DIONYSII PAPINI

MELETEMATA

AD GEMINAM APPENDICEM

De Perpetuo Mobili,

*Actis Erudit. Lips. A. 1687, mense Junio  
insertam. \**

**P**ervolvi paucis abhinc diebus *Acta Eruditorum* Mensis Junii A. 1687, ibique a pagina 315. usque ad paginam 324. observavi *Acta Erud. Lips. 1688.*  
Clarissimum Virum D. BERNOULLI Mobile quoddam perpetuum acriter quidem, at frustra, impugnare; quia circumstantia, Jun. p. 336.  
ex qua Machinæ defectum deducit, nequaquam est essentialis, sed facil-  
limo

Y y 3

\* *Supra Num. XXVIII.*

Num. limo negotio potest immutari; sicque ipsius obiectio tota subito corruet,  
XXXII. salva interim remanente Machina, prout jamjam videbitur. Ibidem præ-  
terea perspicacissimum illum Virum video etiamnum ambigere, utrum mea  
contra idem inventum exceptio sufficiens, necne, habenda sit: verisimi-  
le est itaque, quamplures alios itidem ea de re addubitatos; metuen-  
dumque esse ne Publicum spe successus Perpetui Mobilis in posterum de-  
ludatur: operæ igitur pretium fore existimo, si ostenderim objectionem  
meam admodum esse peremptoriam, ipsumque controversiæ jugulum re-  
cta impetere.

Figura I. Machinam exhibet inversam, ampliori nimirum parte deor-  
sum, acumine vero sursum spectante, contra quam in priori descriptione  
fuerat supposita. Ut jam disquirere liceat, an nova hæc dispositio fel-  
ciores contra me successum sortitura sit; præterea, ut ipsam tuear a  
*Bernoullianis* telis, quæ sane in priori descriptione metuenda erant; sup-  
pono jam follem ABCDE, quadraginta digitos altum, prismaticum  
potius quam pyramidalem, esse ex illorum genere, quorum alæ non  
circa axem quendam moventur, sed in dilatatione & contractione sem-  
per parallelæ remanent: exempli gratia, cum ala ABC accedet ad DE  
distantiæ AE, CD pariter decrescent sibi invicem perstabuunt æqua-  
les: sic nulla amplius vestis ratio haberi poterit, ex qua tamen Machi-  
næ defectum deducit *BERNOULLIUS*. Supponendum est insuper  
follem mercurio plenum esse, & vas H mercurium etiam continens  
collocatum altius axe motus F, qui medio Machinæ affixus supponitur.

Sic sperat inventor fore ut follis gravitate aeris comprimatur, mer-  
curiumque suum per tubum AKH in vas H effundat; unde inferior pars  
BCD, levior facta, molem G superiori parti affixam æquiponderare  
amplius non valeat, deprimaturque pars superior AE: hæc autem, dum  
ad altitudinem axis F devenerit [fig. 2.], artificio aliquo poterit detine-  
ri, ne ulterius descendat, atque ita follis in situ horizontali remanebit.

Jam quoniam vas H supra axem positum est, poterit mercurius ex  
dicto vase per tubum KA in follem defluere; donec pars latior BCD,  
admisso mercurio, tantum pondus acquisierit, ut alteri parti AE moli-  
que ipsi affixæ præponderet, proindeque depressa Machinam in pristinum  
statum restituat: hoc facto, ab externo aere iterum comprimetur follis,  
motusque, successione jam descripta, semper continuabitur. Sic, inquam,  
sperat Author; an merito? Jam dispiciam.

Supponamus vas H duobus digitis, verbj gr. supra axem F positum  
esse; sicut & in priori descriptione, illud duobus digitis inferius axe  
collocaverat Author: Sequitur jam (cum follis sit quadraginta digitos  
altus) perpendicularem altitudinem tubi HA [fig. 1.] esse octodecim  
digitorum, mercuriumque in dicto tubo contentum ea altitudine acri  
externo, contra niti; adeoque atmosphæræ gravitas (quæ viginti septem  
mercurii



mercurii digitos æquare supponitur) debet, per dictum tubum H A, Num.  
XXXII.  
exerere in interiora follis pressionem novem mercurii digitis æqualem : quia scilicet mercurius H A octodecim ex viginti septem detrahit. Jam ut pressionem a mercurio in folle incluso factam indagemus, eadem methodo procedendum est, quam in *Novellis Batavis* Mensis Septembris Anno 1686. ex *Transactionibus Philosophicis Londinensibus* desumptam legere est : Observandum scilicet partes omnes alarum follis a dicto mercurio inæqualiter premi, prout magis vel minus a summitate distant : sic enim partes infimæ a quadraginta mercurii digitis comprimuntur ; supremæ vero, cum nullum mercurium supra se habeant, nullam possunt ab ipsius gravitate pressionem pati : partes in medio ad axem sitæ viginti digitos in superiori parte stagnantes sustinent ; ac sic de cæteris, pressio semper proportionaliter cum distantia a vertice, minuitur, vel augetur. Cum autem istud pressionis augmentum progressionem arithmeticam sequatur ; patet quod omnes illæ variæ pressionēs, simul sumptæ, efficiunt idem quod pressio uniformis, quæ ubique viginti mercurii digitos æquaret : addendo igitur viginti digitos novem illis per tubum H A prementibus, de quibus supra ; fient omnino viginti novem digiti, qui in interiora follis pressionem exerant : extus vero atmosphæræ pressio viginti septem digitos ubique æquare supponitur : ergo prævalebit interior pressio, follisque dilatabitur ; cum tamen ex Authoris sententia comprimi debuisset : Atque ita nova hæc dispositio feliciorē superiori successum non sortietur.

Notandum hic, quod, quemadmodum in *Novellis Batavis* supra citatis, nullam ad motum alarum circularem, neque ad ipsarum inæqualem latitudinem, attentionem feceram ; sic iterum dictam alarum inæqualitatem negligendam hic arbitror. Dum enim circumstantiæ ejusmodi mihi favent, non metuendum est, ne Adversarius objectionem illam moveat ; sic enim se ipsum jugulandum exponeret : mihi autem, cum istis minus essentialibus subsidiis non opus sit, multo satius est brevitati studere, atque ex sola liquorum altitudine ( quæ genuina est gravitationis ipsorum mensura ) argumentum desumere, quam fusiori discursu superfluas vocando suppetias, aliquam Antagonistæ excipiendi ansam præbere ; unde fiat ut controversia multo difficilius ad finem perducatur.

Jam si quis quærat rationem, cur follis aperiri hic debeat, cum tamen in superioris descriptionis examinibus ipsum claudi debere demonstraretur ? Respondeo vas H, prout infra vel supra axem collocatur, in causa esse, cur follis erectus aliquando comprimi debeat ; aliquando etiam dilatari. In priori enim descriptione, cum vas H esset duobus digitis depressius quam axis Machinæ, tubus H A æquabat viginti duos digitos, atque ita mercurius in eo contentus aeri externo eousque resistebat, ut totalis in folle pressio esset solummodo viginti quinque digitorum ; unde  
seque-

Num.  
XXXII.

sequebatur follis ab exteriori aere constrictio: in posteriori autem descriptione, quam hic exhibuimus, idem vas H supra axem collocandum est; unde tubus HA, brevior factus, permittit ut atmosphæra fortiolem in interiora follis pressionem exerat, follemque aperiat; prout ex computo supra ostensum est. Si quæretur ulterius, cur vasis H positio sic immutanda sit? In promptu iterum responsio est. In priori scilicet Machinæ descriptione, follis ad horizontalem situm adductus, mercurium suum effundere debuit in vas H, quod proinde infra axem collocari oportuit: in posteriori autem descriptione, idem follis, dum horizontalem positionem obtinet, mercurio ex vase H defluente debet repleri; ac proinde dictum vas altius ponatur necesse est: res nimium facilis est, quid plura? Quoniam tamen (in secunda *Appendice* †) Clarissimus BERNOULLIUS supponit, axem motus affigendum esse Machinæ e regione centri gravitatis; cum nos dictum axem in media inter utrumque extremum distantia collocemus; metuendum est, ne quid negotii ejusmodi discrepantia Lectoribus facessat: proindeque illos hic monitos velim, Cl. BERNOULLIUM præproperum hic etiam tulisse iudicium, infidamque iterum Hypothesin assumpsisse. Rem enim paulo attentius inspectanti facile patuisset in Machina, de qua tractabat, axem motus & centrum gravitatis in eadem altitudine non posse collocari: posita namque illa æqualitate altitudinis, quantumcunque follis mercurio repleretur, nunquam tamen basis præponderare posset: ac proinde optata rotationis vicissitudo frustra expectaretur. Fatendum igitur axem motus ab inventore Machinæ recte fuisse medio infixum, meamque contra dictum Automa objectionem *Bernoullianis* esse anteponendam.

Manum jam de tabula sumerem, quodque Cl. BERNOULLIUS crassæ me in Geometricis inscitæ infimulat, quasi pyramidis ad prisma ejusdem basis atque altitudinis rationem subtripulam esse ignoraverim, omitterem libentissime: at Clarissimi Viri verba ea ratione, hoc in loco, conscripta sunt, ut plurimos Lectores in errorem facile inducant. Ille enim me culpât, quod vasis pyramidalis capacitatem juste non æstimaverim, dum mercurii in folle pressionem computavi; quasi nimirum liquidorum pressiones ab ipsorum quantitibus, aut vasorum capacitatibus penderent. Necessarium igitur duxi tyrones hic monere, in computationibus ejusmodi nullam prorsus figuræ aut capacitatis vasorum rationem habendam: in ipso enim Hydrostatices principio demonstratur, liquidorum pressionem petendam esse solummodo ex extensione partis compressæ, & perpendiculari altitudine comprimentis liquoris; nequaquam vero ex ipsius quantitate: ideoque, in omnibus a me circa hoc argumentum

† *Supra*, pag. 326.

mentum scriptis, apprime cavi ne ullam aut capacitatis follis, aut molis hydrargiri rationem haberem: quodque contrarium astruere videatur Clariss. BERNOULLIUS, festinationi potius quam ignorantiae adscribendum est.

Num.  
XXXII.



Nº. XXXIII.

JACOBI BERNOULLI

APPENDIX TERTIA

AD EXAMEN PERPETUI MOBILIS,

*Quæ*

ad Meletemata DIONYSII PAPINI

*menſe Junio hujus Anni publicata reſpondetur.*

**C**lariffimus Vir in iſtis *Meletematis* duo ſibi præſtituta habet; unum, ut oſtendat me fruſtra impugnâſſe Machinam; alterum, ut ſuam refutationem genuinam eſſe probet: at

*Alta Erud.  
Lipſ. 1688.  
Nov. pag.  
591.*

quantum in utroque præſtiterit, mox palam me facturum ſpero: non quod huic labori non parcere maluiſſem, ſi exiſtimâſſem de ſola detecti erroris gloria inter nos diſceptari, ut pote quam Excel. PAPINO, ſiquis attribuire volet, ego certe non invideo: ſed quia ſentio, agi hic præcipue de quantitate virium controverſæ Machinæ, de qua erudiri publico pluris intereſt, & in qua æſtimanda non leviter diſſentimus, neceſſarium eſſe duxi, Lectorem de rei veritate uberius paulo inſtruere.

I. Dicit me fruſtra impugnare Machinam; circumſtantiam enim vectium, e qua Machinæ defectum deduco, ei non eſſentialem eſſe, levique negotio ſic immutari poſſe, ut nulla amplius vectis habeatur ratio. Hoe vero mihi tantundem videtur eſſe, ac ſi

*Jac. Bernoulli Opera.*

Zz

quem-

Num.  
XXXIII.

quempiam, qui, ex natura vectis, ostenderet potentiam bilibrem vecti applicatam pondus unius libræ, sed triplo ab axe remotius, movere non posse, culpæ vellet, propterea quod eadem potentia eidem ponderi citra vectem sic applicari possit, ut sequatur motus. Etenim, si vel maxime verum esset, quod facta, quam innuit, mutatione Machinæ, obtineretur motus optatus; non tamen inde colligi posset, considerationem vectis in ea dispositione Machinæ, quam proposuit Auctor, quamque solam refutandam susceperam, minus essentialē esse. Largior quod absque vecte follis possit esse follis; at quod tum cum folli vectis inest, ejus vires, seposita vectis consideratione, calculo æstimari & subduci possint, sicuti possunt non attendendo ad materiam vel colorem alarum, aliavē ejusmodi accidentia, id vero nemini facile persuadebit. Sed deinde, quod rei caput est, si quicquam adversus me efficere voluisset Clarissimus Vir, non acquiescere debuisset nova sua Machinæ fabrica; sed insuper ostendere, quod per eam salvetur motus perpetuus ex meis principiis; quod quia non fecit (neque sane facere potuit) apparet eum calculi mei rationem, vel non attendisse, vel dissimulasse: quippe si Machinæ sic dispositæ vires, juxta hunc calculum, examinare sustinuisset; facile animadvertisset, eam non majori quam antea usui futuram, tametsi nunc vectis ratio in illa cesset. Imo si inspiciatur ejus iconismus, vel absque novo calculo liquere potest, quod vires, quas habet follis, cujus alæ ABC & DE [Fig. 1.] parallelo motu feruntur, non aliæ sint, quam quas idem haberet, si parallelogramma EB, EC, in alas conversa, & circa firmum axem AE rotabilia conciperentur. Nam primo series filamentorum mercurialium & atmosphaericorum in alas agentium, in utraque Machinæ dispositione, eadem manent; tum vero latitudines inæquales alarum prioris dispositionis, proportionales sunt inæqualibus distantis ab axe vectium, in posteriore; sicut e converso etiam æquales alarum latitudines posterioris dispositionis, proportionales censeri possunt distantis ab axe vectium prioris; quandoquidem hæ distantia in motu parallelo alarum, ceu vectium, ubi axis velut infinite distans concipitur, itidem æquales habentur. Itaque, cum  
vires

vires harum machinarum æstimari debeant ex rationibus ponderum filamentorum, latitudinum alarum, & distantiarum ab axe; Num. XXXIII. sequitur omnino illas, in utraque Machinæ dispositione, easdem esse; adeoque quod de una demonstratum est, id perinde quoque valere de altera. Demonstravi in superioris anni *Actis* \*, quod omnes ejusmodi folles, qui alas habent circum axem rotatiles, inque vertice adjunctum tubum, ad centrum usque gravitatis descendentem, siphones referant crurum æqualium; quare idem quoque sentiendum de ea follium dispositione, qua alæ parallelo motu moventur, hoc est, circa axem infinite distantem rotari concipiuntur †: unde sponte tandem fluit, quod in ista structura *Papiniana*, ubi coaptatus tubus HA non descendit ad mediam profunditatem F, nedum ad centrum gravitatis, pressio intra follem externæ pressioni multum prævalere debeat; sicque efficere, ut follis dilatetur, non constringatur; quod ex meis principiis ostendendum erat. Qua insuper occasione non possum non denuo conqueri de sinistro sensu, in quem verba mea rapuit Clarissimus PAPINUS; quasi existimem, axem motus ipsi centro gravitatis machinæ affigendum esse, ad expectandam rotationis vicissitudinem: quod enim axem motus in vicinia hujus centri collocatum supposuerim, id ideo factum, ut Inventori Machinæ (quem, uti mox explicatius ostendam, plus juvat ut propius, quam ut remotius ab illo statuatur) tanto plus largirer, eoque ipso docerem, quod si perpetuus motus non succedat, cum axis Machinæ prope gravitatis centrum assumitur, is adhuc multo minus successurus sit, ubi longius ab illo removetur. Ut præteream, & hoc falsum esse, quod nequeat axis motus in eadem altitudine cum centro gravitatis ita collocari, ut pars una alteri præponderet: si enim alterutri alæ ad latus dicti centri, applicetur; nunquid movebitur erecta Machina, cum totum ejus pondus tunc sit ad unam partem. & nihil ad alteram?

Z z 2

Sed

\* Supra pag. 324.

† Eadem enim remanet Theorematis Demonstratio, quæ in Annot. ad pag. 324. habetur, sive AD finita, sive infinita ponatur. Infinita autem respondit casui alarum motu parallelo laterum.



Num.  
XXXIII.

Sed denique nec hoc tacendum est, Clarissimum PAPINUM; nova sua Machinæ fabrica, vel eo quoque nomine nihil contra me proficere, quod existimet, alas ejus parallelo motu latum iri. Quis enim, obsecro, non videt, quod alæ istæ, tametsi solutæ sunt & nullo vinculo sibi inhærent, non possint tamen ita ferri, nisi ambabus extremitatibus æqualiter premantur? Sed ipso asserente PAPINO, premuntur inæqualiter; in partibus scilicet infimis fortius ab incluso mercurio, quam ab externo aere, & in supremis ab hoc fortius, quam ab illo: unde, sive omnes pressiones ab intra omnibus ab extra simul sumptis prævaleant, sive hæ illis, semper id efficietur potius, ut dum alæ infra magis distenduntur, supra propius ad se invicem accedant, donec in ipso vertice coeant; & sic sponte rationem vectium induant, quam tamen hac fabrica evitare studuit Clarissimus Vir. Quare dum tela mea, ut vocat, in vectium hypothese metuenda esse agnoscit; eo ipso & contra hanc suam structuram eadem non minoris efficaciz esse faretur.

II. Atque ita Responsum meam *Papinianis* telis frustra impetitam, satis quidem me defendisse auguror. Sed quid si nunc eadem in Auctorem retorqueam, & Sole clarius ostendam illius calculo controversæ Machinæ jugulum ita peti, ut, in quacunque dispositione, ad ictum hunc declinandum levissima immutatione indigeat? Utique fatebitur Clarissimus Vir, non me, sed se præpropere & festinanter egisse. Existimat, in Machina quadraginta digitorum quomodocunque disposita, seu pyramidalis, seu prismatica, & sive basis sursum spectet, sive deorsum, vires inclusi mercurii perpetuo easdem esse, & pressioni uniformi viginti digitorum, ceu dimidiæ altitudinis æquipollere. Spectet igitur primo sursum erectæ Machinæ basis; atque intelligatur axis motus applicari intermedio quodam loco inter centrum gravitatis & dimidiam altitudinem, puta circa decimum sextum: a base digitorum, vasculum vero duobus infra axem digitis statui; qua ratione tubus ad summitatem Machinæ pertingens altitudinem habebit octodecim digitorum; quibus ex viginti septem detractis, relinquuntur novem digiti, pro quantitate pressions quam atmosphæra per tubum



bum in interiora folli exierit; cumque inclusus mercurius, secundum PAPINI æstimationem, æquivalet viginti digitorum pressioni; fiet, additis novem ad viginti, totalis pressio viginti novem digitorum, prævalebitque externæ, quæ tantum est digitorum viginti septem; idcirco dilatabitur folli, reliquæ ex voto Inventoris succedere debebunt. Spectet deinde basis Machinæ deorsum; iterumque axis motus inter machinæ medium & centrum gravitatis statuatur; hoc est, in isto situ, circa vigesimum quartum a vertice digitum; vasculum autem duobus supra hunc axem digitis, sic ut viginti duobus adhuc a vertice distet; quo pacto, quinque tantum atmosphæræ digiti intra follem prement, qui, juncti viginti illis a mercurio incluso profectis, efficiunt totalem pressionem viginti quinque digitis, minorem externa pressione viginti septem digitorum. Unde nunc contraria ratione constringetur folli, quo constricto cætera iterum optatum successum ex mente Inventoris, ut prius, consequentur. Quæ cuivis attendenti manifesta sunt ex eo quod, in utroque machinæ situ, centrum gravitatis, respectu axis rotationis, ad eam partem reperitur, ad quam post dilatationem aut constrictionem alarum præponderare ac deprimi debet Machina, ut obtineatur rotationis vicissitudo; quod utique depressionem hanc, & exinde motus perpetuitatem certo secuturam argueret. Unde apparet, quam largus virium hujus Machinæ æstimator fuerit Clarissimus Vir; e cujus calculo id futurum sequeretur, cujus impossibilitas hodie, a maxime eximius Mathematicis, tantum non pro principio assumi solet.

Quibus allatis rationibus, Clarissimo Adversario omnino satisfactum iri spero. Quod si tamen iis locum dare adhuc delectet; agendum experimentis litteram nostram terminemus. Quæstio inter nos agitata uno verbo huc redit; An, in æstimandis viribus controversæ Machinæ, solius altitudinis mercurii; an etiam latitudinis alarum, & vectis ratio haberi debeat? Si sola mercurii altitudo spectanda sit, ut arbitratur Clarissimus Vir; tunc vires ejus in eadem altitudine perpetuo eadem erunt, & pressionem columnæ uniformis altitudinis exæquabunt, siue machina pyramidalis, siue prismaticæ sit figuræ, & siue basis sursum,

Num.  
XXXIII.

sive deorsum respiciat. At si præterea etiam consideratio vectis ; & latitudinis alarum , in censum venire debeat , ut quidem ego sentio ; tunc vires istæ æquivalent pressioni columnæ tantæ longitudinis , quanta est centri gravitatis machinæ ab ejus summitate distantia ; adeoque pressioni nunc majori , nunc minori , prout follis hujus , vel illius est figuræ , basinque suam , vel deorsum , vel sursum obvertit. Itaque si folli cuicunque in summitate applicetur tubus descendens ad ejus medium usque ; is , juxta *DN. PAPINUM* , nec dilatabitur , nec constringetur , sed in perfecto erit æquilibrium cum tubo : juxta me , dilatabitur , si basis deorsum spectet ; constringetur , si sursum. Rursus , si tubus inter centrum gravitatis & medium follis terminetur ; tunc , juxta *Clarissimum Virum* , base sursum spectante , follis dilatabitur ; secundum me , constringetur : at base deorsum versa , juxta illum , constringetur ; & juxta me , dilatabitur.

Quæ cum , in folle etiam minimo & vix decem , duodecimve excedente digitos , locum invenire debeant ; idcirco rei veritatem , exiguo sumptu & labore , experiri licebit : præsertim , si id sibi negotii præscribat *Celeberrimus PAPINUS* , cujus dexteritas ac industria in experimentis instituendis jam dudum Orbi literato notissima est. Verbulum igitur deinceps hac de re non addam , quo usque *Natura Judex* , ad cujus nunc tribunal adversam partem provoco , pro alterutro nostrum sententiam dixerit ; quam si sibi favituram autumet *Illustis Adversarius* , paratum inveniet , qui contra se , deposita , si velit , pecunia , contrarium tueatur.

Nº. XXXIV.

Nº. XXXIV.  
POSITIONES MATHEMATICÆ  
DE  
RATIONIBUS  
ET  
PROPORTIONIBUS,

*Sub Præsidio*

JACOBI BERNOULLI  
Mathematicum Professoris Publici,

*Ad diem 5. Octobris M. DC. LXXXVIII.*

Ad disputandum propositæ.

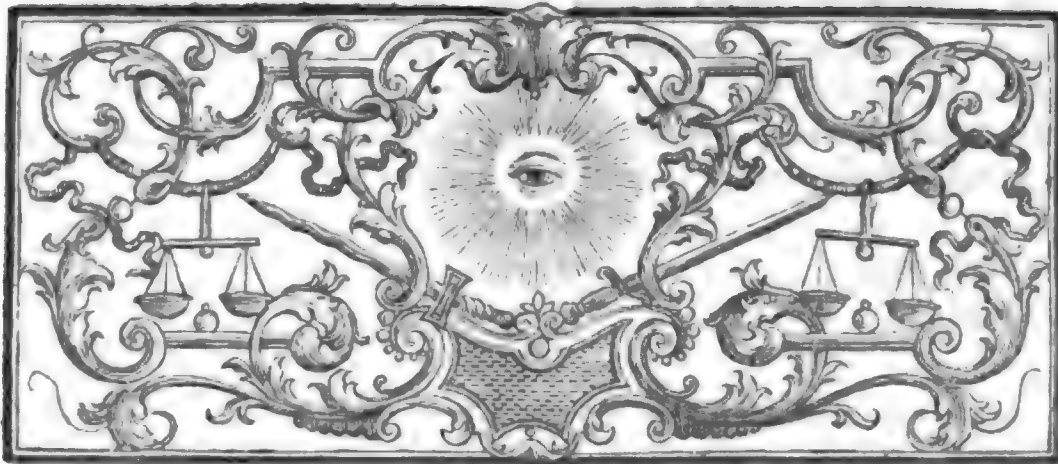
---

Editæ primum

BASILEÆ,

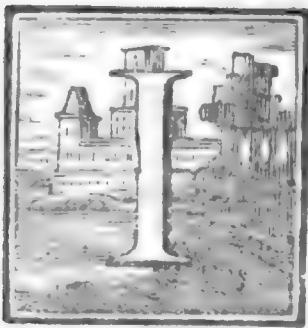
1688.





POSITIONES MATHEMATICÆ  
DE  
RATIONIBUS  
ET  
PROPORTIONIBUS.

## I.



D quod hac vice tractandum suscepimus, EUCLIDI Λόγος, Latine *Ratio*, dicitur; vel quod in percipiendis rerum rationibus præcipua Rationis vis appareat, vel quod in rebus ipsis Ratio vix quicquam aliud cognoscat, quam rationes & relationes quasdam, quas inter se habent.

Num.  
XXXIV.

## I I.

Hoc ipsum præ cæteris in Mathesi perspicuum est: ubi nullius rei quantitatem absolutam, seu, quanta sit in se, cognoscimus;

*Jac. Bernoulli Opera.*

A a a

sed

Num. XXXIV. sed solummodo quam magna, vel quam parva sit relative ad alias, investigamus: unde, non sine ratione quis a nobis factum judicabit, quod Doctrinam Rationum, quæ relationes istas magnitudinum explicat, & utramque in hac Scientia paginam facit, nonnullis Positionibus enucleatam demus.

## I I I.

Definimus itaque *Rationem*, quod sit affectio rerum qua se-cum invicem comparari possunt secundum quantitatem.

## I V.

*Comparari* dicuntur duæ res *secundum quantitatem*, dum consideratur, quoties una major minorve sit altera; seu quoties una alteram contineat, vel in eadem contineatur.

## V.

Illa vero, quæ hoc pacto inter se comparantur, sunt tum *Numeri*, tum *Res numeratae*; interque has primario *Magnitudines*; secundario etiam alia, quæ ex magnitudinibus cognitis, quibuscum relationem quandam habent, æstimantur; ut *Pondera*, *Tempora*, *Celeritates*, *Vires*, *Soni*, *Divitiæ*, *Sortes Aleatorum*, &c.

## V I.

Unus enim Motus altero tanto celerior tardiorve dicitur; ut & Sonus unus alio Sono tanto gravior vel acutior; quanto linearum eodem tempore decursarum, vel chordarum sonos hos e-dentium, una altera longior, breviorque existit.

## V I I.

Cætera quæ, vel cum nullis, vel cum incognitis magnitudinibus relationem habent, accurate comparari, ac proinde cognosci non possunt; qualia sunt, *Eruditio*, *Prudentia*, *Facundia*, *Pulchritudo*, *Agilitas*, *Colores*, *Sapores*, *Odores*, &c.

## V I I I.

Quanquam enim sciamus, Hominem homine doctiorem, vel pulchriorem, Rosam rosâ fragrantiorē, & Cibus cibo suavio-rem esse, si quidem sat magna inter utrumque disparitas inter-cedat;



cedat ; attamen quanto unum altero his qualitatibus antecellat , Num. XXXIV.  
ignoramus. Idem fere dicendum de qualitatibus tactilibus , *Calore* , *Frigore* , *Humiditate* , *Siccitate* ; ut maxime earum gradus ,  
ope Thermometri & Hygrometri , quodammodo metiri didi-  
cerimus.

IX.

Numeri quamcunque rationem exprimentes , ejus *Termini* vo-  
cantur ; quorum is qui ad alium refertur , *Antecedens* , *ἡ γὰρ μέν* ;  
& is ad quem refertur , *Consequens* , *ἡ ἐπὶ μέν* , dicitur.

X.

Si termini sunt æquales , *Ratio æqualitatis* , *Λόγος ἰσότητος* ; si  
inæquales , *Inæqualitatis* : *Majoris* quidem , *Περίλογος* , cum major  
terminus minoris est antecedens ; at *Minoris* , *Υπόλογος* , cum e-  
jusdem est consequens. Sic 5 ad 5 , 6 ad 6 , rationem habet  
æqualitatis ; 3 ad 2 inæqualitatis majoris ; 5 ad 6 , minoris.

XI.

Si duarum rationum iisdem terminis constantium una est ma-  
joris , altera minoris inæqualitatis , altera alterius *Reciproca* dicitur :  
Sic ratio 3 ad 2 reciproca est rationis 2 ad 3 , & hæc illius.

XII.

Ratio æqualitatis est singularis & individua. Inæqualitatis Ra-  
tio est *Simplex* , vel *Multiplex* , & hæc , vel præcise , vel non præ-  
cise talis.

XIII.

Si major terminus minorem semel tantum continet , & præter-  
ea unam ejus partem aliquotam ; ratio est *Simplex Superparticula-  
ris* , *Λόγος ἑπιμόειος* ; sin plures partes aliquotas , ratio *Simplex Su-  
perpartiens* , *Λόγος ἑπιμερής*.

XIV.

Si major terminus minorem aliquoties exacte continet ; ratio est ,  
*Multiplex* , *Πολλαπλάσιος* ; si vero insuper unam ejus partem , est  
*Multiplex Superparticularis* *Πολλαπλάσι ἐπιμόειος* ; si plures , *Multi-  
plex Superpartiens* , *Πολλαπλάσι ἐπιμερής*.

A a a 2

XV. Omnes

Num.  
XXXIV.

## X V.

Omnes rationes, numero quidem explicabiles, ad unam harum specierum referri possunt; ad quam autem quælibet referri debeat, palam facit ejus *Exponens*, qui est quotus resultans ex divisione majoris termini per minorem.

## X V I.

Numerus integer hujus exponentis, si est unitas, indigitat *rationem simplicem*: si quis multitudinis numerus, *multiplicem*; puta *duplam*, si binarius; *triplam*, si ternarius; *decuplam*, si denarius: & si qua exponenti fractio adhæret, ea denotat rationem esse vel *Superparticularem*, vel *Superpartientem*: Superparticularem, cum fractionis numerator est unitas; Superpartientem, cum est numerus aliquis multitudinis.

## X V I I.

Superparticularis ratio specialem suam nomenclationem accipit a denominatore fractionis, præfixa vocula *sesqui*; ut *sesqui-altera*, *sesqui-tertia*, *sesqui-quarta*, &c. Superpartiens ab utroque fractionis termino, ut *Superpartiens duas tertias*, *tres quartas*, &c. quæ & ita efferuntur, *Superbipartiens tertias*, *Supertripartiens quartas*, &c.

## X V I I I.

Exemplis res fiet clarior. Ratio 6 ad 3, vocatur *dupla*, quia  $6 : 3 = 2$ . Ratio 12 ad 4, *tripla*, quia  $12 : 4 = 3$ . Ratio 3 ad 2, *sesqui-altera*, quia  $3 : 2 = 1\frac{1}{2}$ . Ratio 5 ad 4, *sesquiquarta*, quia  $5 : 4 = 1\frac{1}{4}$ . Ratio 19 ad 7, *dupla superquintupartiens septimas*, quia  $19 : 7 = 2\frac{5}{7}$ .

## X I X.

Si fractio exponenti adhærens numeris compositis constet, quod fit quotiescunque ipsi rationum termini inter se compositi fuerint; tunc prius reducenda est ad terminos simplicissimos: alias ratio videri posset superpartiens, quæ non nisi est superparticularis: sic ratio 6 ad 4, non dicenda est superbipartiens quartas, ut maxime  $6 : 4 = 1\frac{1}{2}$ ; sed *sesqui-altera*, quia  $\frac{3}{2}$  æquipollent  $\frac{1}{2}$ .

XX. Ratio

## X X.

Rationes minoris inæqualitatis eodem pacto exprimuntur, quo <sup>Num.</sup> XXXIV. earum reciproca, præmissa, discriminis ergo, syllaba *Sub*: ut *Ratio* 3 ad 6 est *subdupla*: 4 ad 12 *subtripla*: 2 ad 3 *subsesqui-altera*: 4 ad 5 *subsesquiquarta*: 7 ad 19, *subdupla subsuperquin-tupartiens septimas*.

## X X I.

Sciendum tamen, barbara ista Veterum vocabula obsoleta fere nunc esse, & modernos Mathematicos rationem quamlibet frequentius ipsis terminis innuere: Malunt enim ex. gr. dicere, circumferentiam Circuli ad diametrum se habere in ratione 22 ad 7, aut 223 ad 71, quam in ratione tripla sesquiseptima, vel tripla superdecupartiente septuagesimas primas.

## X X I I.

Si duæ Rationes inæquales comparantur invicem; illa dicitur *Major*, cujus antecedens sæpius continet suum consequentem, vel majorem consequentis partem: Idcirco Ratio majoris inæqualitatis major est quavis Ratione minoris inæqualitatis: duarum vero Rationum majoris inæqualitatis, illa major est, quæ majorem sortitur exponentem; at duarum minoris inæqualitatis illa major, quæ minorem.

## X X I I I.

Hinc inæqualium magnitudinum major ad eandem, majorem habet rationem, quam minor: sed eadem ad minorem majorem rationem habet, quam ad majorem. Ex. gr. 8 ad 3 majorem habet rationem, quam 7 ad 3: Contra 3 ad 7 majorem habet rationem, quam 3 ad 8.

## X X I V.

Si rationes æquales invicem comparantur, existit *Proportio*, quæ proinde nihil aliud est, quam rationum æqualitas, & denotatur ita ::, ut  $A. B :: C. D$ ; quo significatur, A ad B eandem habere rationem, quam habet C ad D; seu quantitates A, B, C, D proportionales esse.

A a a 3

XXV. De

Num.  
XXXIV.

## X X V.

De Proportionalibus hæc capiantur Theoremata : Si termini rationis cujuscunque , per communem aliquem numerum , seu multiplicentur , seu dividantur ; habebunt producti , vel quoti , eandem cum illis rationem. Sic 6 ad 4 eandem habet rationem , quam bis 6 ad bis 4 , ter 6 ad ter 4 , dimidium 6 ad dimidium 4 , &c.

## X X V I.

Quatuor proportionalium prima ducta in ultimam , idem efficit , atque secunda in tertiam ; quæ proprietas Regulæ Aureæ fundamentum existit.

## X X V I I.

Si totum ad totum , ut ablatum ad ablatum ; erit etiam reliquum ad reliquum , ut totum ad totum : hoc est , Si  $A. B :: C. D.$  erit etiam  $A - C. B - D :: A. B.$

## X X V I I I.

Si quotcunque magnitudines proportionales fuerint  $A. B :: C. D :: E. F :: G. H$  , &c. erit ut una antecedentium ad unam consequentium , ita omnes antecedentes simul ad omnes consequentes , id est , erit  $A. B :: A + C + E + G. B + D + F + H.$

## X X I X.

Si  $A. B :: C. D$  , erit *invertendo*  $B. A :: D. C$  ; *permutando*  $A. C :: B. D$  ; *componendo*  $A + B. B :: C + D. D$  ; *dividendo*  $A - B. B :: C - D. D$  ; *convertendo*  $A. A - B :: C. C - D$  ; *sumendo antecedentium dupla*  $2 A. B :: 2 C. D.$

## X X X.

Si quotcunque magnitudines  $A. B. C. D.$  fuerint ab una parte , toridemque ab altera  $E. F. G. H$  ; sitque  $A. B :: E. F$  , &  $B. C :: F. G$  , &  $C. D :: G. H$  , erit *ex aquo ordinate*  $A. D :: E. H.$  Sin vero  $A. B :: G. H$  , &  $B. C :: F. G$  , &  $C. D :: E. F$  , erit *ex aequalitate perturbata*  $A. D :: E. H.$

Atque hi , præter nonnullos alios , sunt modi illi argumentandi , quos Geometræ , in Propositionum maxime perplexarum demonstra-

monstrationibus, ingeniose admodum & magno legentium emolumento adhibent. Num.  
XXXIV.

## XXXI.

Si duæ Rationes sint æquales, & consequens primæ conveniat cum antecedente secundæ, *Proportio continua* dicitur. Hæc, si per terminos plures continuetur, *Progressio* vocatur; quæ vel *Ascendens* est, si ratio per quam progreditur, est minoris inæqualitatis, ut 1. 3. 9. 27. &c. vel *Descendens*, si majoris, ut 8. 4. 2. 1.

## XXXII.

Omnis Progressio continuari potest per infinitos terminos: descendendo tamen, nulla potest per terminos integros continuari; ascendendo potest, si ratio per quam continuatur, sit exacte multiplex.

## XXXIII.

Dato primo, secundo, & ultimo Progressionis cujuscunque termino, Summa omnium ita invenitur: Primus terminus ducatur in differentiam primi & ultimi; Productum dividatur per differentiam primi & secundi; Quoto addatur ultimus, & habebitur Progressionis Summa.

## XXXIV.

Quoniam in Progressione descendente infinitorum terminorum, postremus terminus perpetuo 0 est; ideo duntaxat quadratum primi per differentiam primi & secundi dividendum: Quæ insuper differentia si sit unitas; ipsum statim quadratum primi Summam prodit.

## XXXV.

Patet hinc, qua ratione infinitæ numero magnitudines finitam summam constituere possunt; quod ignaris forte mirum videbitur, quanquam sit verissimum. Ita, si quis facturus iter 100 miliarium, primo die conficeret miliaria 10, secundo 9, tertio  $8\frac{1}{10}$ , & sic, quolibet sequentium dierum, itineris præcedentis dici  $\frac{9}{10}$  partes, ac per totam æternitatem iter faceret, nunquam 100 miliaria abolveret.

XXXVI. Si

Num.  
XXXIV.

## XXXVI.

Si quotcunque rationes proponantur, productum omnium antecedentium ad productum omnium consequentium habere dicitur *Rationem compositam* ex rationibus propositis.

## XXXVII.

Hinc datis quotcunque magnitudinibus, Ratio primæ ad ultimam *composita* censetur ex Ratione primæ ad secundam, secundæ ad tertiam, tertiæ ad quartam, & sic porro usque ad ultimam.

## XXXVIII.

Omnia Triangula, Parallelogramma, Pyramides, Prismata, Coni, Cylindri, rationem habent ex rationibus basium & altitudinum compositam.

## XXXIX.

Si duæ rationes æquales componantur; Composita, alterutrius componentium *Duplicata* dicitur; si tres, *Triplicata*; si quatuor, *Quadruplicata*; & vicissim una componentium, compositæ *subduplicata*, *subtriplicata*, *subquadruplicata*. E quibus patet immane discrimen esse inter Rationem duplam & duplicatam, Λόγον διπλάσιον, καὶ διπλάσιον; adeoque perperam a nonnullis, quos inter MEIBOMIUS in *Dial. de Proportionibus*, confundi.

## XL.

Infertur hinc, Quadrata habere rationem duplicatam, Cubos triplicatam laterum suorum. Et si quantitates aliquot continue proportionales sint, Rationem primæ ad tertiam esse duplicatam, primæ ad quartam triplicatam, primæ ad quintam quadruplicatam rationis ejus, quam prima habet ad secundam.

## XLI.

Similes superficies duplicatam, similia solida triplicatam habent rationem laterum homologorum. Intellige hæc etiam de Circulis ac Sphæris.

## XLII. Cate-



## XLII.

Num.  
XXXIV.

Cæterum animadvertimus, ARCHIMEDEM, *Lib. 2. De Sphæra & Cyl. Prop. 9.* ipsas rationes compositas denuo inter se comparare, dum Rationem triplicatam rationis alicujus ejusdem duplicatæ *sesquialteram* \* vocat, unde Ratio quasi *decomposita* exsurgit.

## XLIII.

Si ratio quæcunque addita rationi æqualitatis componat aliquam; Composita non differt a Componente. Hinc est, quod Triangula, Parallelogramma, Pyramides, Prismata, Coni, Cylindri, & quæcunque Figuræ ex rationibus basium & altitudinum componuntur, in basibus æqualibus se habeant ut altitudines, & in altitudinibus æqualibus, ut bases. Item, quod momenta ponderum æqualium se habeant ut distantiae ab axe motus; & vice versa momenta æqualiter distantium, ut pondera.

## XLIV.

Si duæ rationes reciprocae componantur; exsurgit ratio æqualitatis: Hinc recensitæ figuræ sunt æquales, quotiescunque ipsarum bases & altitudines reciprocantur; & momenta sunt æqualia, quotiescunque pondera se habent in ratione reciproca distantiarum.

## XLV.

Explicata Rationum doctrina; verbo adhuc indicandum est, quænam sint illa, quæ inter se rationem habere possunt, vel non possunt. Rationem non suscipiunt heterogenea; sic Pondus ad Tempus, Sonus ad Colorem, Linea ad Superficiem, rationem nullam habet. Nihilominus, quia, in Arithmetica Infinitorum, linea, ut pars infinitesima corporis concipitur; potest ejus ad superficiem *Ratio dici infinite exigua*.

## XLVI.

Finitum quoque ad infinitum, licet homogeneous, linea finita ad infinitam, rationem nullam, vel, si dicere mavis, infinite exiguam habet.

*Jac. Bernoulli Opera.*

B b b

XLVII. Mag-

\* Recentiores *Sesquiplacatam* dicere malunt.

Num.  
XXXIV.

## XLVII.

Magnitudines homogeneæ finitæ sunt, vel Rationales,  $\rho\eta\tau\alpha\iota$ , quæ numero integro, fracto, aut misto exprimi possunt, vel Irrationales,  $\alpha\lambda\omicron\gamma\alpha\iota$ ; quæ non possunt. (Obiter notamus URSTIS IUM, qui Cap. 3. Arith. mistos numeros absurde surdis accenset.) Omnes magnitudines rationales; quia sunt commensurabiles, hoc est, quia mensuram aliquam communem admittunt, rationem habent numero explicabilem. Inter rationalem & irrationalem contra, quamvis ratio sit, hæc tamen, ob asymmetriam earum, numero explicari nequit. Sic Ratio inter latus quadrati & diagonium ejus, vel inter 1 &  $\sqrt{2}$ , nullo numero exprimi potest. Inter duas irrationales ratio plerumque quidem numero est inexplicabilis, velut inter  $\sqrt{2}$  &  $\sqrt{7}$ : quandoque tamen numero comprehendi potest, sic  $\sqrt{2}$  ad  $\sqrt{8}$  rationem habet exacte subduplam, eam videlicet quam habet 1 ad 2.

## XLVIII.

Quin etiam nulla datur earum, quæ numero exprimi possunt, quæ non etiam in irrationabilibus locum inveniat: & hoc omnium forte in Geometria admirabilissimum, quod dentur tales quantitates; quæ, seorsim quidem acceptæ, nullo numero intelligibili exprimuntur, inter se tamen collatæ rationem habent exacte cognitam & numero determinatam.

## XLIX.

Imo, ipsi quoque infinito hæc quodammodo accommodari possunt. Quemadmodum enim rationale ad irrationale nullam habere potest rationem numero determinabilem; potest tamen unum irrationale ad aliud irrationale: Sic quamvis finitum inter & infinitum nulla ratio sit; ea tamen inter duo infinita obtinere potest: quandoquidem unum infinitum alterius infiniti concipere possum duplum, triplum, decuplum, centuplum, millecuplum, infinitecuplum, infinities infinitecuplum. Finge Cubo ad latus meridionale apponi alium æqualem Cubum, huic alium, huic iterum alium, & alium sine fine; qua ratione nascetur Parallepi-

lepipedium oblongum, quod bis, ter, quater, & tandem infinities majus fiet Cubo proposito: Huic, a plaga meridionali interminato, versus orientem adjice secundum, tertium, quartum, usque ad infinitum: quod inde conflabitur ab ortu & meridie interminatum corpus, infinities superabit Parallelepipedum; adeoque infinities infinitis vicibus Cubum. Idem præsta versus occidentem, & producet corpus bis infinities infiniteduplo majus Cubo; cui si ex parte septentrionali simile adjeceris, habebis discum versus omnes horizontis plagas infinite extensum; qui Cubum quater infinities infinitis vicibus superabit. Huic disco si infinitos alios æque crassos substernas, totidemque superstruas, corpus habebis, quod omne conceptibile spatium replebit, eritque octies infinities - infinities - infinities majus Cubo. Deinde quia hedra est pars infinitesima Cubi; & Cubi latus pars infinitesima hedræ; & punctum lateris: Idcirco immensa illa moles, quæ Cubum octies inf. inf. infinities vicibus superat, superabit punctum 8 inf. inf. inf. inf. inf. infinitis vicibus. Sic ut secundum hunc conceptum, dicendum quod Corpus in omnes mundi plagas conceptibiles infinite extensum habeat ad atomum rationem octies inf. inf. inf. inf. infinities infiniteduplam.

Num.  
XXXIV.

## L.

Quanquam vero isthæc insanientium deliriis non absimilia ple-  
risque videbuntur; nihilominus vix aliter se exprimere poterit  
sana mens, quæ, secundum conceptus a Deo sibi inditos, loqui  
volet. Fateor multis contradictionibus involuta esse; forte prop-  
terea, quia finito intellectui infiniti comprehensio impossibilis;  
forte etiam, quia nihil est, nec esse potest, extra mentem nostram,  
quod his conceptibus respondeat. Deus solus est is, quem  
scimus & actu esse, & infinitum esse, ad quem cætera omnia,  
quantacunque sunt, ne umbram quidem rationis habent. In hu-  
jus cognitione summa Sapientia, in fruitione summa Salus. Hoc  
qui potitur, habet omnia; etiam si nihil haberet: qui caret, ni-  
hil habet; tametsi infinitorum mundorum opes possideret.



Nº. XXXV.  
POSITIONES ARITHMETICÆ  
DE  
S E R I E B U S  
I N F I N I T I S,

Earumque  
S U M M A F I N I T A.

*Quas*

Auctore Præfide  
JACOBO BERNOULLI Math. Pr. P.

defendit

J O H. J A C. F R I T Z I U S, Basil.  
*Ad diem 7. Junii M. DC. LXXXIX.*

---

Editæ primum  
B A S I L E Æ.

1689.

AD DN. RESPONDENTEM  
*P R Æ S E S.*

Ut non finitam seriem finita coerces

Summula, & in nullo limite limes adest :

Sic modico immensi vestigia Numinis hærent

Corpore, & angusto limite limes abest.

Cernere in immenso parvum, dic, quanta voluptas !

In parvo immensum cernere, quanta, Deum !

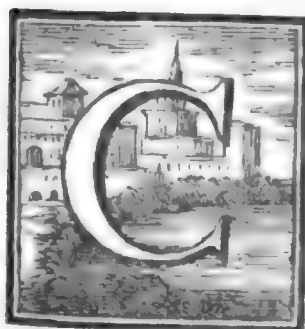




POSITIONES ARITHMETICÆ  
DE  
SERIEBUS  
INFINITIS.

---

PRÆFATIO.



*UM non ita pridem in Serierum Infinitarum speculationem incidissem, prima cujus summa, post geometricam Progressionem ab aliis jam tractatam, mihi sese offerebat, erat Series fractionum, quarum denominatores geometrica, numeratores arithmetica progressionem crescunt: quod cum Fratri indicassem, non tantum mox idem adinvenit ille, sed & præterea nova cujusdam fractionum Series, cujus denominatores Trigonalium, ut vocantur, numerorum dupli erant, summam pervestigavit; quam vero & ipse,*  
cum

cum significasset, postridie detexi; propositis ei vicissim aliis nonnullis, qua interea, ut clavus clavum trudere solet, occasione hac repereram. Quibus inventis certatim alter alterum sic exercuimus, ut paucorum dierum spatio non tantum serierum illarum, quas Celeb. LEIBNITIUS in Actis Erud. Lips. Anno 1682. M. Febr. & 1683. M. Octob. recenset, nosque paulo antea mirati fuimus, summas dare possemus, sed & plura alia, eaque non contemnenda, ex gemino duntaxat fundamento invenerimus, quorum unum consistit in resolutione Seriei in alias infinitas Series, alterum in subductione Seriei, uno alterove termino mutilata, a seipsa integra. Horum vero precipua [cum eorum nihil apud hos, quos legi hactenus, publicatum viderim] enucleanda proponam, pramissis nonnullis, qua passim apud alios quoque vulgata prostant, Propositionibus, ne illas aliunde petere opus esset. Caterum quanta sit necessitatis pariter & utilitatis hac Serierum contemplatio, ei sane ignotum esse non poterit, qui perspectum habuerit, ejusmodi Series sacram quasi esse anchoram, ad quam in maxime arduis & desperata solutionis Problematis, ubi omnes alias humani ingenii vires naufragium passa, velut ultimi remedii loco, confugiendum est.

A X I O.

# A X I O M A T A

*seu*

## P O S T U L A T A.

I.



M N E quantum est divisibile in partes se mi- N. XXXV.  
nores.

I I.

Omni quantitate finita potest accipi major.

I I I.

Si quantitas quæpiam multata parte sui aliqua subtrahitur a seipsa integra, relinquitur illa pars.

## P R O P O S I T I O N E S.

I.

**Q**uod data quavis quantitate minus est, illud est non-quantum seu nihil.

DE M. Nam si quantum esset, dividi posset in partes se minores, per Axiom. 1. Non igitur esset data quavis quantitate minus, contra hypothesin.

I I.

*Quod data quavis quantitate majus est, infinitum est.*

Nam si finitum esset, illo posset accipi quantitas major, per Ax. 2. Non igitur quavis data quantitate foret majus, contra hypothesin.

*Jac. Bernoulli Opera.*

C c c

III. Omnia

*Omnis Progressio geometrica continuari potest per terminos infinitos.*

Semper enim fieri potest: Ut primus terminus ad secundum, sic postremus ad sequentem, & sequens ad alium, & alium sine fine in infinitum; quorum quidem terminorum nullus æquari potest vel nihilo, vel infinito, cum secus ad illum præcedens eam rationem habere non posset, quam habet primus ad secundum, contra definitionem progressionis.

## I V.

*Si sit Progressio geometrica quacunque A, B, C, D, E; & alia arithmetica totidem terminorum A, B, F, G, H, incipiens ab iisdem terminis A & B, erunt reliquorum singuli in geometrica singulis ordine sibi respondentibus in arithmetica majores, tertius tertio, quartus quarto, ultimus ultimo, adeoque omnes omnibus.*

Quia enim  $A : B = B : C = C : D = D : E$ . erit per 25. 5. EUCL. tum  $A + C > 2B = (ex\ nat.\ Progr.\ arith.) A + F$ ; unde  $C > F$ : tum  $A + D > B + C > B + F = A + G$ ; unde  $D > G$ : tum  $A + E > B + D > B + G = A + H$ ; unde  $E > H$ . *Quæ erant demonstranda.*

## V.

*In Progressione geometrica crescente A, B, C, D, E, perveniri tandem potest ad terminum E quovis dato Z majorem.*

Incipiat ab iisdem terminis Progressio arithm. A, B, F, G, H, continuata quousque ultimus H superet Z [ id enim fieri posse claret, ] tum vero continuetur geometrica per terminos totidem, eritque, per præced. postremus  $E > H > Z$ . Q. E. D.

COROLL. Hinc in Progr. geom. crescente infinitorum terminorum postremus terminus est  $\infty$ , per Prop. II. [ $\infty$  est Nota Infiniti.]

## VI.

*In Progress. geometrica decrescente A, B, C, D, E, pervenitur tandem ad terminum E quovis dato Z minorem.*

Constituatur Progressio ascendens Z, Y, X, V, T, in ratione B ad

$B$  ad  $A$ , quousque ultimus terminus  $T$  superet  $A$ , [ quod fieri N.XXXV posse, per præced. constat; ] tum continuetur altera descendendo per totidem terminos  $A, B, C, D, E$ ; eritque ultimus  $E < \text{dato } Z$ . Quia enim Progressiones  $A, B, C, D, E$ ; &  $T, V, X, T, Z$ , per eandem rationem  $A$  ad  $B$  progrediuntur, & terminos numero æquales habent, erit ex æquo  $A : E = T : Z$ . sed  $A < T$ , per constr. Ergo &  $E < Z$ . Q. E. D.

COROLL. Hinc in Progr. geomet. decrescente in infinitum continuata, ultimus terminus est 0, per Prop. I.

## VII.

In omni Progr. geom.  $A, B, C, D, E$ , primus terminus est ad secundum, sicut summa omnium, excepto ultimo, ad summam omnium, excepto primo. [  $A : B = A + B + C + D : B + C + D + E$ . ]

Quia enim  $A : B = B : C = C : D = D : E$ . erit per 12. 5. EUCL.  $A : B = A + B + C + D : B + C + D + E$ . Q. E. D.

## VIII.

Progressionis geom. cujuscunque  $A, B, C, D, E$ , summam  $S$  invenire.

Per præc. est  $A : B = S - E : S - A$ ; quare convertendo  $A : A \oslash B = S - E : A \oslash E$ ; unde  $S - E = A \times (A \oslash E) : (A \oslash B)$ , &  $S = A \times (A \oslash E) : (A \oslash B) + E$ . ( $\oslash$  denotat differentiam duarum quantitatum, quibus interferitur, cum non definitur, penes utram sit excessus.)

COROLL. Si Progressio geometr. descendendo continuetur in infinitum, adeoque ultimus terminus per Coroll. VI. evanescat, erit summa omnium  $Aq : (A - B)$ ; unde liquet, quo pacto infiniti etiam termini finitam summam constituere possunt.

## IX.

Si Series infinita continue proportionalium  $A, B, C, D, E, \&c.$  decrescat in ratione  $A$  ad  $B$ , erunt summa omnium terminorum, omnium dempto primo, omnium demtis duobus primis, &c. etiam continue proportionales, & quidem in eadem ratione  $A$  ad  $B$ .

**N. XXXV** Quoniam  $A : B = B : C = C : D$ , erit tum  $Aq : Bq = Bq : Cq$ ; tum etiam  $A : B = A - B : B - C = B - C : C - D$ , quare dividendo rationes æquales per æquales,  $\frac{Aq}{A - B} : \frac{Bq}{B - C} = \frac{Bq}{B - C} : \frac{Cq}{C - D}$ , hoc est, per Cor. præced., Summa omnium ad omnes sequentes primum, ut hi ad omnes sequentes secundum. Q. E. D. Et proinde per 19. §. EUCL. summa omnium ad omnes sequentes primum, ut primus ad secundum. Q. E. D.

## X.

*Seriei infinita fractionum,  $a : b, (a + c) : (b + d), (a + 2c) : (b + 2d), (a + 3c) : (b + 3d)$ , &c. quarum numeratores & denominatores crescunt Progressione arithmet. ultimus terminus est fractio  $c : d$ , cujus numerator & denominator sunt communes progressionum differentia.*

Ad hoc analytice investigandum, consideretur quæsitus terminus ut cognitus, & vocetur  $t$ ; numerus vero termini ut quæsitus, & dicatur  $n$ ; critque ex generatione progressionis terminus optatus  $t = (a + nc - c) : (b + nd - d)$ , ideoque  $n = 1 + (bt - a) : (c - dt)$ , quod æquari debet infinito: & quia numerator hujus fractionis est finitus [nam infinitus esse non potest, alias  $t$  deberet esse  $= \infty$ ; ideoque esset  $c - dt$ , ipsaque adeo fractio negativa quantitas, quod absurdum,] oportet ut denominator sit æqualis nihilo, ac proinde  $c = dt$ , &  $t = c : d$ . Q. E. D.

Brevius ita: Ex seriei genesi patet, terminum infinitesimum esse  $(a + \infty c) : (b + \infty d) = \infty c : \infty d = c : d$ . Q. E. D.

**COROLL.** Summa omnium terminorum, sive ultimus primo major sit, minorve, necessario infinita est; infiniti enim termini minori horum duorum æquales infinitam dant summam: Unde a fortiori, &c.

## XI. Fractio.



## XI.

N. XXXV.

*Fractionis ad aliam ratio composita est ex ratione directa numeratorum & reciproca denominatorum.*

Nam  $\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{AD}{BD} : \frac{BC}{BD} :: AD : BC = A : C + D : B$ . Q. E. D.

## XII.

*In serie fractionum, quarum numeratores crescunt Progressione arithmetica, denominatores geometrica, aut vice versa, ut  $A : F$ ,  $(A + C) : G$ ,  $(A + 2C) : H$ ,  $(A + 3C) : I$ , aut  $F : A$ ,  $G : (A + C)$ ,  $H : (A + 2C)$ ,  $I : (A + 3C)$ ; Si  $N$  nomen ordinis ultimi termini ad unitatem majorem rationem habeat, quam  $G$  ad  $G - F$ , erit ille terminus ibi sequenti major, hic minor.*

1. Hyp. Quia  $N : 1 > G : G - F$ , erit convertendo  $N : N - 1 < G : F$ , &  $CN : CN - C < G : F$ . Ergo  $(CN - C) \times G > CN \times F$ ; ergo fortius [ob  $AG > AF$ ]  $(A + NC - C) \times G > (A + CN) \times F$ . hoc est, Numerator termini  $N$  in  $G >$  Numeratore termini sequentis in  $F$ : Sed ita se habet terminus  $N$  ad terminum sequentem, per præced. Quare terminus  $N$  major sequenti, & ita deinceps ab illo omnes. Q. E. D.

2. Hyp. Inversis invertendis eodem modo demonstratur.

## XIII.

*Si infinita sint fractiones  $\frac{A}{B}, \frac{C}{D}, \frac{E}{F}, \frac{G}{H}, \frac{I}{L}, \frac{M}{N}, \frac{O}{P}$ , &c.*

*quarum numeratores crescant progr. arithm. & denominatores geom. erit ultimus terminus 0; sin illi crescant geometr. hi arithm., erit ultimus  $\infty$ .*

1. Hyp. Si primus terminus secundo non sit major, continuari saltem poterit Progressio, quousque præcedens superet sequentem, per præced. Esto  $G : H > I : L$ , & sint infiniti continue proportionales  $G, I, Q, R$ , &c. unde propter  $H, L, N, P$ ,

continue proport. erunt & ipsæ fractiones  $\frac{G}{H}, \frac{I}{L}, \frac{Q}{N}, \frac{R}{P}$  &c.

N.XXXV continue proport. quæ ob  $G : H > I : L$ , in nihilum tandem abeunt per Cor. VI. Quare cum  $Q > M$ ,  $R > O$ , &c. per IV. multo magis  $\frac{G}{H}$ ,  $\frac{I}{L}$ ,  $\frac{M}{N}$ ,  $\frac{O}{P}$ , &c. in nihilum abibunt. Q. E. D.

2. *Hyp.* Nisi primus secundo minor sit, continuetur progressio, quousque præcedens sequenti minor fiat, per præced. Esto  $G : H < I : L$ , & sint infiniti  $H$ ,  $L$ ,  $S$ ,  $T$ , &c. contin. proport. unde propter  $G$ ,  $I$ ,  $M$ ,  $O$ , &c. contin. proport. & ipsæ fractiones  $\frac{G}{H}$ ,  $\frac{I}{L}$ ,  $\frac{M}{S}$ ,  $\frac{O}{T}$ , &c. proportionales erunt, quæ ob  $G : H < I : L$  in infinitum desinunt per Cor. V. Quare cum  $S > N$ ,  $T > P$ , &c. per IV. multo magis  $\frac{G}{H}$ ,  $\frac{I}{L}$ ,  $\frac{M}{N}$ ,  $\frac{O}{P}$ , &c. in infinitum excreſcent. Q. E. D.

## XIV.

*Invenire summam Seriei infinita fractionum, quarum denominatores crescunt progressionem geometrica quacunque, numeratores vero progrediuntur, vel juxta numeros naturales 1, 2, 3, 4, &c. vel trigonales 1, 3, 6, 10, &c. vel pyramidales 1, 4, 10, 20, &c. aut juxta quadratos 1, 4, 9, 16, &c. aut cubos 1, 8, 27, 64, &c. eorumve æquemultiplices.*

1. Si Numeratores progrediuntur juxta numeros naturales :

Summa invenitur, resolvendo seriem propositam  $A$  in alias infinitas series  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$ , &c. quæ singulæ geometricæ progrediuntur, quarumque summæ [ si primam hic excipias ] novam geometricam progressionem  $F$  constituunt per IX. cujus quidem, uti cæterarum, summa per Coroll. VIII. reperitur. En operationem :

A =

$$A = \frac{a}{b} + \frac{a+c}{bd} + \frac{a+2c}{bdd} + \frac{a+3c}{bd^3} \&c. = B + C + D + E + \&c.$$

$$B = \frac{a}{b} + \frac{a}{bd} + \frac{a}{bdd} + \frac{a}{bd^3} \&c. = \frac{ad}{bd-b}$$

$$C = \frac{c}{bd} + \frac{c}{bdd} + \frac{c}{bd^3} \&c. = \frac{c}{bd-b}$$

$$D = \dots + \frac{c}{bdd} + \frac{c}{bd^3} \&c. = \frac{c}{bd^2-bd}$$

$$E = \dots + \frac{c}{bd^3} \&c. = \frac{c}{bd^3-bdd}$$

$$\&c. = \dots \&c. = \&c.$$

$$\left. \begin{array}{l} F = cd : b (d-1)^2 \\ \text{cui additus primus ter-} \\ \text{minus } ad : b (d-1) \\ \text{producit totius propo-} \\ \text{sitæ seriei } A \text{ summam} \\ = ad : b (d-1) \\ + cd : b (d-1)^2. \end{array} \right\}$$

2. Si Numeratores sunt juxta Trigonales :

Series proposita  $G$  resolvenda est in aliam  $H$ , cujus numeratores sint juxta præcedentem hypothesin, hoc modo :

$$G = \frac{c}{b} + \frac{3c}{bd} + \frac{6c}{bdd} + \frac{10c}{bd^3} \&c.$$

$$\frac{c}{b} + \frac{c}{bd} + \frac{c}{bdd} + \frac{c}{bd^3} \&c. = \frac{cd}{bd-b}$$

$$+ \frac{2c}{bd} + \frac{2c}{bdd} + \frac{2c}{bd^3} \&c. = \frac{2c}{bd-b}$$

$$+ \frac{3c}{bdd} + \frac{3c}{bd^3} \&c. = \frac{3c}{bd^2-bd}$$

$$+ \frac{4c}{bd^3} \&c. = \frac{4c}{bd^3-bdd}$$

$$\&c. = \&c.$$

$$\left. \begin{array}{l} H = cd^3 : b (d-1)^3 \\ \text{quandoquidem hæc series} \\ \text{ad præced. } \frac{c}{bd} + \frac{2c}{bdd} + \\ \frac{3c}{bd^3} \&c. = cd : b (d-1)^2 \\ \text{se habeat ut } dd \text{ ad } d-1. \end{array} \right\}$$

3. Si Numeratores sunt juxta Pyramidales :

Series resolvitur in aliam, cujus numeratores progrediuntur juxta Trigonales, quæque ad præcedentem seriem se habet, ut  $d$  ad  $d-1$ ; unde summa ejus invenitur  $= cd^4 : b (d-1)^4$ .

Genç-

N.XXXV Generaliter; si propositæ serici numeratores sint juxta figuratos cujuslibet gradus, ejus summa se habebit ad summam similis seriet gradus præcedentis, ut  $d$  ad  $d-1$ : unde reliquarum omnium summam invenire proclive admodum est.

4. Si Numeratores sunt juxta Quadratos:

Series  $L$  resolvitur in aliam  $M$ , cujus numeratores sunt arithmetice progressionales, adeoque juxta primam hypothesin:

$$L = \frac{c}{b} + \frac{4c}{bd} + \frac{9c}{bdd} + \frac{16c}{bd^3} \&c.$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{c}{b} + \frac{c}{bd} + \frac{c}{bdd} + \frac{c}{bd^3} \&c. &= \frac{cd}{bd-b} \\ + \frac{3c}{bd} + \frac{3c}{bdd} + \frac{3c}{bd^3} \&c. &= \frac{3c}{bd-b} \\ + \frac{5c}{bdd} + \frac{5c}{bd^3} \&c. &= \frac{5c}{bd^2-bd} \\ + \frac{7c}{bd^3} \&c. &= \frac{7c}{bd^3-bd^2} \\ \&c. &= \&c. \end{aligned} \right\} \begin{aligned} M &= cdd : b(d-1)^2 \\ &+ 2cdd : b(d-1)^3 \\ &= (cd^3 + cdd) : b \\ &\quad (d-1)^3. \end{aligned}$$

5. Si Numeratores sunt juxta Cubos:

Series resolvitur in aliam, cujus numeratores sunt Trigonalium sextupli unitate aucti; unde ejus summa juxta secundam hypothesin invenitur  $cdd : b(d-1)^2 + 6cd^3 : b(d-1)^4 = (cd^4 + 4cd^3 + cdd) : b(d-1)^4$ . Exempli loco sint series sequentes, Numeratorum

Naturalium	$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \frac{5}{32} \&c.$	$= 2$
Trigonalium	$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{6}{8} + \frac{10}{16} + \frac{15}{32} \&c.$	$= 4$
Pyramidalium	$\frac{1}{2} + \frac{4}{4} + \frac{10}{8} + \frac{20}{16} + \frac{35}{32} \&c.$	$= 8$
Quadratorum	$\frac{1}{2} + \frac{4}{4} + \frac{9}{8} + \frac{16}{16} + \frac{25}{32} \&c.$	$= 6$
Cuborum..	$\frac{1}{2} + \frac{8}{4} + \frac{27}{8} + \frac{64}{16} + \frac{125}{32} \&c.$	$= 26$

COROLL.

COROLL. Patet, in omnibus hujusmodi seriebus postremos N. XXXV terminos in nihilum desinere, & evanescere debere (quod ipsum jam præced. Propos. de earum una ex abundantia ostendimus; ) cum alias illarum summæ finitæ esse non possent. (2)

XV. In-

(\*) Vix potest satis dici quantopere placuerit Mathematicis Tractatio Serierum infinitarum, postquam Auctor noster argumentum istud, hac Dissertatione & sequentibus N. LIV. LXXIV. XC. CI. illustravit. Videantur quæ de hisce scripserunt MONTMORTIUS, TAYLORUS, MOIWRÆUS, STIR-

LINGIUS, NICOLE, Nicolaus BERNOULLI, alique plures. Ingeniosam methodum, qua in hac Propositione utitur noster, extendere licet 1°. ad omnes series fractionum, quarum denominatores crescunt progressionem geometrica, numeratores progrediuntur juxta numeros quovis figuratos.

Sic [posito facilioris scriptionis gratia  $1:d=e$ ]

Series  $1 + 1e + 1e^2 + 1e^3 + \&c. = 1 : (1 - e) = d : (d - 1)$   
 Series  $1 + 2e + 3e^2 + 4e^3 + \&c. = 1 : (1 - e)^2 = d^2 : (d - 1)^2$   
 Series  $1 + 3e + 6e^2 + 10e^3 + \&c. = 1 : (1 - e)^3 = d^3 : (d - 1)^3$   
 Series  $1 + 4e + 10e^2 + 20e^3 + \&c. = 1 : (1 - e)^4 = d^4 : (d - 1)^4$   
 Series  $1 + 5e + 15e^2 + 35e^3 + \&c. = 1 : (1 - e)^5 = d^5 : (d - 1)^5$

& ita porro.

2°. Extenditur hæc methodus ad series omnes fractionum, quarum denominatoribus existentibus in progressionem geometrica, numeratores constituunt seriem terminorum quorum differentia, vel primæ, vel secundæ, id est, differentiarum differentia, vel tertiæ, hoc est, differentiarum secundarum differentia, vel quartæ, vel quintæ, vel qualescunque differentia dant tandem seriem magnitudinum æqualium,

adeo ut, differentia ulteriores evanescant. Etenim si primus terminus seriei numeratorum sit  $a$ , prima differentiarum primarum sit  $b$ , prima secundarum,  $c$ ; tertiæ,  $f$ ; quartarum,  $g$ ; quintarum  $h$ , &c. Series ipsa erit (I)  $ae + (a + b)e^2 + (a + 2b + c)e^3 + (a + 3b + 3c + f)e^4 + (a + 4b + 6c + 4f + g)e^5 + (a + 5b + 10c + 10f + 5g + h)e^6 + \&c.$  quæ, Methodo Auctoris resolvitur in sequentes

$$\left. \begin{aligned} ae + ae^2 + ae^3 + ae^4 + ae^5 + \&c. &= ae : (1 - e) \\ + be^2 + 2be^3 + 3be^4 + 4be^5 + \&c. &= be^2 : (1 - e)^2 \\ + ce^3 + 3ce^4 + 6ce^5 + \&c. &= ce^3 : (1 - e)^3 \\ + fe^4 + 4fe^5 + \&c. &= fe^4 : (1 - e)^4 \\ + ge^5 + \&c. &= ge^5 : (1 - e)^5 \\ &\&c. \end{aligned} \right\} K$$

Jac. Bernoulli Opera.

D d d

Ergo

*Invenire summam Seriei infinitae fractionum R, quarum numeratores constituunt Seriem aequalium, denominatores vero Trigonalium, eorumve aquemultiplicium.*

Si a Serie harmonice proportionalium  $N$ , eademmet multata primo termino  $P$  subtrahatur, exoritur nova Series  $Q$ , cujus denominatores Trigonalium dupli sunt, cujusque adeo summa aequalis erit ipsi primo termino Seriei harmonicæ  $N$ , per Ax. 3.

$$\text{Operatio talis : A Serie } N = \frac{a}{c} + \frac{a}{2c} + \frac{a}{3c} + \frac{a}{4c} + \frac{a}{5c} \&c.$$

$$\text{subtracta Series } P = \frac{a}{2c} + \frac{a}{3c} + \frac{a}{4c} + \frac{a}{5c} + \frac{a}{6c} \&c. = N - \frac{a}{c}$$

$$\text{relinquit Seriem } Q = \frac{a}{2c} + \frac{a}{6c} + \frac{a}{12c} + \frac{a}{20c} + \frac{a}{30c} \&c. = \frac{a}{c}$$

cujus

Ergo Series  $I =$  Seriei  $K$ , vel mutato  $e$  in  $1 : d$ , Series  $a : d + (a+b) : d^2 + (a+2b+c) : d^3 + (a+3b+3c+f) : d^4 + (a+4b+6c+4f+g) : d^5 + \&c.$  aequalis est  $a : (d-1) + b : (d-1)^2 + c : (d-1)^3 + f : (d-1)^4 + g : (d-1)^5$ , &c. quæ ultima Series tandem abruptitur, evanescente aliqua differentiarum,  $b, c, f, g$ , &c.

Sic, quia Seriei quadratorum differentia tertia nullæ sunt,

$$1. 4. 9. 16. 25. 36. 49. \&c.$$

$$3. 5. 7. 9. 11. 13$$

$$2. 2. 2. 2. 2$$

$$0. 0. 0. 0.$$

fiat  $a = 1, b = 3, c = 2, f = 0 = g = b$  &c. & Seriei  $1 : d + 4 : d^2 + 9 : d^3 + 16 : d^4 + \&c.$  summa est  $1 : (d-1) + 3 :$

$$(d-1)^2 + 2 : (d-1)^3 = (dd + d) : (d-1)^3$$

Pariter sumptis differentiis Seriei cuborum, invenies quartas evanescere

$$1. 8. 27. 64. 125. 216$$

$$7. 19. 37. 61. 91$$

$$12. 18. 24. 30$$

$$6. 6. 6$$

$$0. 0$$

Est igitur  $a = 1, b = 7, c = 12, f = 6, g = 0$  &c. & Seriei  $1 : d + 8 : d^2 + 27 : d^3 + 64 : d^4 + \&c.$  summa est  $1 : (d-1) + 7 : (d-1)^2 + 12 : (d-1)^3 + 6 : (d-1)^4 = (d^3 + 4dd + d) : (d-1)^4$ . Nec multo difficilius esse summas invenire, non totius seriei in infinitum continuatæ, sed plurium, dato numero, terminorum initialium.



cujus duplum  $R = \frac{a}{c} + \frac{a}{3c} + \frac{a}{6c} + \frac{a}{10c} + \frac{a}{15c} \&c. = \frac{2a}{c}$

Series scil. fractionum proposita, quarum denominatores sunt numeri Trigonaes, eorumve æque-multiplices (b).

D d d 2

Obfer-

(b) Non eget alia demonstratione hæc Methodus, per se satis perspicua. Gratum tamen arbitror fore tyronibus, si ipsis ostendam, rationem investigandi Seriem, aut Series harmonice proportionalium, quæ multatæ uno, vel pluribus terminis initialibus, si a se ipsis subtrahantur, producant novam Seriem datam.

Data Series hic intelligitur, cujus datur terminus generalis, hoc est, talis ut  $x$  existente indice loci quem terminus quilibet quæsitus occupat, vel  $x - 1$  existente numero terminorum istum præcedentium, detur valor istius per  $x$  & constantes. Sic Seriei  $R$ , quæ summatur in hac Propos. terminus generalis est  $2a : c x (x + 1)$ . Nam, in illa expressione, si pro  $x$  scribantur successive  $1, 2, 3, \&c.$  prodibit Series  $R$ . Si quærat, v. gr. terminus decimus, scribe  $10$  pro  $x$ , & habebis  $2a : 10.11 c = a : 55 c$ .

Terminus autem generalis Seriei, cujus dantur aliquot initiales termini, plerumque inveniri potest, nisi satis obviu sit, quærendo differentias tam numeratorum quam denominatorum, non modo primas, sed secundas, tertias, &c. donec ad ultimas, id est, æquales perveniatur. Nam si sit  $m$  primus terminus Seriei cujus-

vis;  $n$ , prima differentiarum primarum;  $p$ , prima secundarum;  $q$ , tertiarum;  $r$ , quartarum &c. sintque ultimæ differentiæ ordine  $z$  :

Quæritur terminus, cujus loci index est  $x$ . Excerptantur coefficientes terminorum  $z$  primorum binomii ad potestatem  $x - 1$  elevati,

nempe  $1, x - 1, \frac{(x-1). (x-2)}{1. 2},$

$\frac{(x-1). (x-2). (x-3)}{1. 2. 3},$

&c. & ii successive multiplicentur per  $m, n, p, q, r, \&c.$  eritque

$m + (x-1)n + \frac{(x-1). (x-2)}{1. 2.} p$

$+ \frac{(x-1). (x-2). (x-3)}{1. 2. 3.} q +$

&c. terminus generalis Seriei, cujus istæ sunt differentiæ; id quod per inductionem satis liquet. Ex. gr. Seriei  $R$  denominatores sunt

$1. 3. 6. 10. 15. 21. \&c.$   
Diff. primæ  $2. 3. 4. 5. 6. \&c.$

Diff. secundæ  $1. 1. 1. 1$  ultimæ

Ergo  $m = 1, n = 2, p = 1,$   
Igitur terminus generalis  $m + (x-1)$

$n + \frac{(x-1). (x-2)}{1. 2.} p = 1 +$

$2(x-1) + (x-1). (x-2) : 2$   
 $= (xx + x) : 2 = x(x+1) : 2.$

Dato Seriei termino generali, summam

N. XXXV summam ejus venabimur, reducendo fractionem, quæ termini generalis expressio est, in tot, quot fieri potest, fractiones simplices  $A : (x+a) + B : (x+b) + C : (x+c) + D : (x+d) + \&c.$  quæ singulæ respondent totidem Seriebus harmonice proportionalium, scribendo nempe pro  $x$  successive terminos progressionis arithmeticæ. Nam si hujus differentia sit divisor aliquis communis quantitatum  $b-a, c-a, d-a, \&c.$  Atque insuper, si  $A+B+C+D+\&c.$  sit  $= 0$ , Series semper summi poterit.

Ex. gr. Seriei R terminus generalis est  $2d : x(x+1) = [ \text{si } a:c \text{ dicatur } d ] 2d : x(x+1)$ . Fiat  $\frac{2d}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$  [ubi  $x$  crescendo per unitates satisfacit conditioni priori] & quoniam  $\frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = \frac{(A+B)x + A}{x(x+1)}$ , comparemus numeratorem  $(A+B)x + A$ , cum numeratore  $2d$ , & inveniemus  $A = 2d$ , atque  $A+B = 0$  [quo satisfit conditioni posteriori] seu  $B = -A = -2d$ . Ergo  $2d : x(x+1) = 2d : x - 2d : (x+1)$ . Termino generali reducto ad duas fractiones simplices, Series ipsa R reducitur ad duas Series harmonicas, scil.

$$R = \frac{d}{1} + \frac{d}{3} + \frac{d}{6} + \frac{d}{10} + \frac{d}{15} + \&c. \\ = 2d \left( \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \&c. \dots \right) \\ - 2d \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \&c. \dots \right)$$

cujus summa est  $2d \cdot \frac{1}{1} = 2d = 2d : c$ .

Quod si hujus Seriei terminos, non omnes, sed initiales tantum aliquot, numero dato, summare vellemus, id eodem modo liceret exequi. Proponatur summanda Series R, usque ad terminum ordine  $x$ , qui est  $2d : x(x+1)$ . Ea reducitur ad duas has Series

$$2d \left( \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{x} \right) \\ - 2d \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{x+1} \right) \\ = 2d \cdot \frac{1}{1} - 2d \cdot \frac{1}{x+1} = 2dx : (x+1).$$

Summanda sit Series  $\frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{2}{4 \cdot 6 \cdot 8} + \frac{3}{5 \cdot 7 \cdot 9} + \&c.$  cujus terminus generalis  $x : (x+2) \cdot (x+4) \cdot (x+6)$ . Ea reducitur ad  $A : (x+2) + B : (x+4) + C : (x+6)$ , in quibus  $x$  crescendo per unitates, crescit per divisorem communem quantitatum  $4-2, 6-2$ , adeoque satisfacit conditioni priori. Rursus  $A : (x+2) + B : (x+4) + C : (x+6) = ((A+B+C)xx + (10A+8B+6C)x + 24A+12B+8C) : (x+2) \cdot (x+4) \cdot (x+6)$ . Comparetur numerator cum numeratore  $x$ , & habebitur  $A+B+C = 0$  [quo satisfit conditioni posteriori, unde concludimus Seriem esse summabilem],  $10A+8B+6C = 1$ , &  $24A+12B+8C = 0$ , ex quibus elicitur  $A = -\frac{1}{4}, B = \frac{1}{2}, C = \frac{1}{4}$ .

$C = -\frac{1}{4}$ . Ergo terminus generalis  $x: (x+2). (x+4). (x+6)$ , ta in has tres dispescitur reducitur ad  $-\frac{1}{4}:(x+2)+1:(x+4)$

$$-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\dots+\frac{1}{x+2}\right) \\ +1\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\dots+\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+4}\right) \\ -\frac{3}{4}\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\dots+\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+4}+\frac{1}{x+5}+\frac{1}{x+6}\right)$$

quarum summa  $= -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)$

$$+1\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+4}\right) - \\ \frac{3}{4}\left(\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+4}+\frac{1}{x+5}+\frac{1}{x+6}\right) \\ = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{x+5}-\frac{1}{x+6}\right) - \\ \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+4}\right) = \\ -\frac{31}{240} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+4}\right) - \\ \frac{3}{4}\left(\frac{1}{x+5}+\frac{1}{x+6}\right).$$

Adhæc si termino generali reducto ad fractiones simplices  $A: (x+a) + B: (x+b) + C: (x+c) + D: (x+d)$  &c. inveniat  $x$  non crescere per differentiam quæ sit communis divisor quan-

titatum  $b=a, c=a, d=a$ , &c. sed tamen incrementum ipsius  $x$  dividat  $b=a$ , &  $d=c$ , sitque simul  $A+B=0$ , &  $C+D=0$ , poterit series summari.

Ita Series  $\frac{11}{1.3.5.7} + \frac{23}{3.5.7.9} + \frac{35}{5.7.9.11} + \dots$  terminus generalis  $(12x-1): (2x-1)(2x+1). (3x-2)(3x+1)$ , vel  $(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}): (x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2})(x-\frac{3}{2})(x+\frac{3}{2})$  resolvitur in fractiones  $-\frac{1}{x-\frac{1}{2}}$

$+\frac{1}{x+\frac{1}{2}} + \frac{1}{x-\frac{3}{2}} - \frac{1}{x+\frac{3}{2}}$  vel  $-\frac{2}{2x-1} + \frac{2}{2x+1} + \frac{3}{3x-2} - \frac{3}{3x+1}$  adeoque series ipsa in has quatuor

$$-2\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\dots+\frac{1}{2x-1}\right) \\ +2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\dots+\frac{1}{2x-1}+\frac{1}{2x+1}\right) \\ +3\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{10}+\dots+\frac{1}{3x-2}\right) \\ -3\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{10}+\dots+\frac{1}{3x-2}+\frac{1}{3x+1}\right) \quad \text{qua}$$

N. XXXV. Observandum tamen, non sine cautela hac utendum esse methodo: Nam si a sequente Serie  $S$  eadem, dempto primo termino,  $T$  subtrahatur, prodibit eadem series  $Q$ , quæ antea; nec tamen inde sequitur, summam Seriei  $Q$  æqualem esse primo termino seriei  $S = \frac{2a}{c}$ . Cujus rei ratio est, quod, si a Serie  $S$  subtrahitur Series terminorum totidem  $T$ , in qua singuli termini postremum præcedentes singulos primum consequentes in altera destruunt, residuum, hoc est resultans Series  $Q$ , evidenter debet adæquari primo termino Seriei  $S$  minus ultimo ipsius  $T$ ; adeoque ipsi primo Seriei  $S$  absolute æqualis esse nequit, nisi tum cum ultimus ipsius  $T$  in nihilum definit, uti quidem desinere perspicuum est in Serie  $P$  vel  $N$ : at non evanescit patiter in Serie  $T$  vel  $S$ , verum est  $= a : c$ , per X. Quin itaque potius summa Seriei  $Q = 2a : c - a : c = a : c$ , ut supra.

$$S = \frac{2a}{c} + \frac{3a}{2c} + \frac{4a}{3c} + \frac{5a}{4c} + \frac{6a}{5c} \&c.$$

$$T = \frac{3a}{2c} + \frac{4a}{3c} + \frac{5a}{4c} + \frac{6a}{5c} + \frac{7a}{6c} \&c.$$

$$Q = \frac{a}{2c} + \frac{a}{6c} + \frac{a}{12c} + \frac{a}{20c} + \frac{a}{30c} \&c. = \frac{2a}{c} - \frac{a}{c} = \frac{a}{c}.$$

## XVI.

*Summa seriei infinita harmonice progressionum,  $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \&c.$  est infinita.*

Id primus deprehendit Frater: inventa namque, per præced. summa Seriei  $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$ , &c. visurus porro, quid emergeret ex ista Serie,  $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$ , &c. si resolveretur methodo

$$\text{quarum summa} = -2 \cdot \frac{1}{1} + 2 \cdot \frac{1}{(2x+1)(3x+1)}.$$

$$\frac{1}{2x+1} + 3 \cdot \frac{1}{1} - 3 \cdot \frac{1}{3x+1} = 1. \quad \text{Hæc methodus, quoad substantiam, est D. TAYLOR.}$$

$$+ \frac{2}{2x+1} - \frac{3}{3x+1} = (6x+5)x;$$

methodo Prop. XIV. collegit propositionis veritatem ex absur- NXXXV  
ditate manifesta, quæ sequeretur, si summa Seriei harmonicæ fi-  
nita statueretur. Animadvertit enim,

Seriem A,  $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}$ , &c. = ( fractionibus sin-  
gulis in alias, quarum numeratores sunt 1, 2, 3, 4, &c. trans-  
mutatis )

Serici B,  $\frac{1}{2} + \frac{2}{6} + \frac{3}{12} + \frac{4}{20} + \frac{5}{30} + \frac{6}{42}$ , &c. = C + D + E + F, &c.

$$\left. \begin{array}{l} \text{C. } \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42}, \text{ \&c.} = \text{per præc. } \frac{1}{1} \\ \text{D. } + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42}, \text{ \&c.} = \text{C} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ \text{E. } \dots + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42}, \text{ \&c.} = \text{D} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \\ \text{F. } \dots + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42}, \text{ \&c.} = \text{E} - \frac{1}{12} = \frac{1}{4} \\ \text{\&c.} = \text{\&c.} \end{array} \right\} = \text{G; unde} \\ \left. \begin{array}{l} \text{icquitur, Se-} \\ \text{riem G=A,} \\ \text{totum parti,} \\ \text{si summa fi-} \\ \text{nita esset.} \end{array} \right\}$$

Ego postmodum, cum indicasset, idem ostensive hunc in mo-  
dum: Summa Seriei infinitæ harmonicæ  $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ , &c. su-  
perat datum quemvis numerum. Ergo infinita est, per II. Esto  
datus numerus  $N$  quantumcunque magnus: Abscinde a principio  
Seriei aliquot terminos, quorum summa æquet vel superet unam  
unitatem numeri  $N$ , & a Serie reliqua iterum aliquos abscinde,  
quorum summa aliam unitatem numeri  $N$  superet, idque si fieri  
possit, repete toties, quot in numero  $N$  sunt unitates; sic termi-  
ni abscissi omnes superabunt totum numerum, multo magis igitur  
tota Series eundem superabit. Si neges, abscissis aliquot, re-  
liquos unitatem superare posse, esto primus reliquorum, qui post  
abscissionem ultimam remanserunt,  $1 : a$ , & sequentes  $1 : (a+1)$ ,  
 $1 : (a+2)$ ,  $1 : (a+3)$ , &c. Constituatur ad duos primos termi-  
nos  $1 : a$  &  $1 : (a+1)$  Progressio geometrica, cujus ideo sin-  
guli post secundum termini singulis respondentibus in Progressio-  
ne harmonica minores sunt, ob denominatores majores, per IV.  
& continuetur hæc usque ad  $1 : aa$  (quod quidem fiet in termi-  
nis

N.XXXV nis numero finitis, propter  $\alpha$  numerum finitum) eritque hæc Series geometrica finita  $= 1$ , per VIII. Harmonica itaque terminorum totidem superabit unitatem. Q. E. D.

COROLL. I. In proposita Serie initio sumto a quolibet termino, erunt ab illo deinceps omnes, usque ad illum, cujus locus designatur per quadratum numeri ordinis primi termini, simul sumti unitate majores; sic termini a 2<sup>do</sup> ad 4<sup>um</sup> usque unitatem superant, hinc a 5<sup>to</sup> ad 25<sup>um</sup>, hinc a 26 ad 676 [ $= 26^2$ ] hinc a 677 ad 458329 [ $= 677^2$ ] &c. Nam in geometrica progressionem, termini his limitibus intercepti unitatem æquant; ergo in harmonica superant, ubi & plures intercipiuntur & majores: majores quidem uti vidimus; plures, quia denominatores terminorum, cum sint minores quam in geometrica, per IV, tardius illos limites assequuntur.

2. Patet, omnem aliam Seriem harmonicam infinitam, summam quoque exhibere infinitam; ut ex. gr. si loco  $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$  &c. proponatur  $\frac{1}{1000} + \frac{1}{2000} + \frac{1}{3000} + \frac{1}{4000}$  &c. ubi singuli termini singulorum sibi respondentium in altera, adeoque & omnes omnium, sunt submillecupli: nam infiniti pars millesima & ipsa infinita est.

3. Summa Seriei infinitæ, cujus postremus terminus evanescit, quandoque finita est, quandoque infinita.

Tab. X. b.  
No. 35.

4 Sequitur etiam, si modo in geometriam saltum facere permisum est, spatium Curva Hyperbolica & Asymptotis comprehensum infinitum esse: Secta intelligatur Asymptotos linea a centro  $A$  in partes æquales infinitas in punctis  $B, C, D, E$ , &c. e quibus ad curvam educantur rectæ totidem alteri Asymptoton parallelæ  $BM, CN, DO, EP$ , &c. & compleantur parallelogramma  $AM, BN, CO, DP$ , &c. quæ ob basium æqualitatem inter se erunt, ut altitudines, seu ut rectæ  $BM, CN, DO, EP$ , &c. hoc est, ut  $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ , &c. ex natura Hyperbolæ; cum igitur summa  $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$  &c. infinita ostensa sit, erit & summa Parallelogrammorum  $AM, BN, CO, DP$ , &c. infinita, multoque



roque magis spatium hyperbolicum, quod parallelogrammis illis conscriptum est.

## XVII.

*Invenire summam serierum Leibnitzianarum, D, H, I, aliarumque, quarum denominatores sunt numeri Quadrati aut Trigonaes, minuti aliis Quadratis vel Trigonalibus.*

Cel. LEIBNITZ occasione mirabilis suæ Quadraturæ Circuli in principio *Actorum Lips.* publicatæ, mentionem injicit summæ quarundam serierum infinitarum, quarum denominatores constituunt seriem Quadratorum unitate minorum, dissimulato quo eam repererat artificio. En breviter totum misterium:

A serie . . .  $A = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \&c.$  subtrahatur ipsamet demtis duobus

primis terminis,  $B = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \&c. = A - \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$

relinquitur  $C = \frac{2}{3} + \frac{2}{8} + \frac{2}{15} + \frac{2}{24} + \frac{2}{35} \&c. = A - B = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

& propterea  $D = \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{35} \&c. = \frac{1}{2} C = \frac{3}{4}$

A serie . . .  $E = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \&c.$  subtrahatur eadem demto primo

termino; . . .  $F = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} \&c. = E - 1$

relinquitur  $G = \frac{2}{3} + \frac{2}{15} + \frac{2}{35} + \frac{2}{63} + \frac{2}{99} \&c. = E - F = 1$

& propterea . . .  $H = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \frac{1}{99} \&c. = \frac{1}{2} G = \frac{1}{2},$

& proinde etiam  $I = \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{48} + \frac{1}{80} + \frac{1}{120} \&c. = D - H = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Quod ipsum quoque sic ostenditur:

N. XXXV

A serie . . .  $L = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} \&c.$  subtrahatur eadem demto primo

$$\text{termino, . . . } M = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} \&c. = L - \frac{1}{2}$$

$$\text{relinquitur } N = \frac{2}{8} + \frac{2}{24} + \frac{2}{48} + \frac{2}{80} + \frac{2}{120} \&c. = L - M = \frac{1}{2}$$

$$\& \text{ proinde . . . } I = \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{48} + \frac{1}{80} + \frac{1}{120} \&c. = \frac{1}{2} N = \frac{1}{4}, \text{ ut antea?}$$

Memorable autem prorsus est, quod summa Seriei  $D, \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{35} + \frac{1}{48} + \frac{1}{63} \&c.$  (cujus denominatores sunt numeri quadrati 4, 9, 16, 25, 36, &c. unitate minuti) invenitur  $\frac{1}{2}$ , quin & excerptis per saltum alternis terminis, summa Seriei  $H, \frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} \&c. = \frac{1}{2}$ ; at si ex hac iterum simplici saltu terminos loco pari positos excerpas, ut relinquatur  $\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{30} \&c.$  ejus Seriei infinitæ summa est vera magnitudo circuli, nullo numero exprimibilis, sumto vid. quadrato diametri  $= \frac{1}{2}$  (\*).

Cate-

(\*) Terminus generalis Seriei, cujus denominatores sunt numeri quadrati, minuti aliquo quadrato, erit

$$\frac{1}{xx + 2ax + aa - bb}$$

$$= \frac{1}{(x+a+b)(x+a-b)}$$

qui resolvitur in duas fractiones simplices  $\frac{1}{2b} \frac{1}{x+a-b} - \frac{1}{2b} \frac{1}{x+a+b}$

Ergo series resolvetur in alias duas, & proinde, quoniam posterior conditio locum habet, summabilis erit, si prior obtineat, hoc est si  $x$  crescat per differentiam aliquam, quæ sit divisor differentiæ  $(a+b) - (a-b) = 2b$ , Id quod succe-

dit in Seriebus  $D, H, I$ . Nam in prima,  $x$  crescit per unitates; est vero  $a = 1$ , &  $b = 1$ , adeoque  $2b = 2$ . In secunda,  $x$  crescit per binarios: est autem  $a = 0$ ,  $b = 1$ , ideoque  $2b = 2$ . In tertia  $x$  crescit pariter per binarios, & est  $a = 2$ ,

$b = 1$ . At in Serie  $\frac{1}{3} + \frac{1}{35} + \frac{1}{99} +$

$$\&c. = \frac{1}{4-1} + \frac{1}{6-1} + \frac{1}{100-1}$$

&c.  $x$  crescit per quaternarios, & est  $a = 1$ ,  $b = 1$  &  $2b = 2$ : Non crescit igitur  $x$  per differentiam quæ dividat  $2b$ . Quamobrem hæc series hac methodo non est summabilis. Hujus autem summam exhibere veram magnitudinem Circuli,

Ceterum generaliter invenire possumus summam cujuslibet Sc. N. XXXV  
 rici, cujus numeratores constituunt Seriem æqualium, & deno-  
 minatores seriem Quadratorum minutorum communi aliquo Qua-  
 drato  $Q$ , aut etiam seriem Trigonalium minutorum communi  
 aliquo numero Trigonalis  $T$ : si observemus, ejusmodi Series nas-  
 ci per subtractionem Seriei harmonicæ truncatæ ab initio tot ter-  
 minis (quot indicat ibi duplum radicis quadratæ communis qua-  
 drati  $Q$ , hic duplum unitate auctum radicis trigonalis numeri  
 Trigonalis  $T$ ) a seipsa integra:

Ex. gr. ad inveniendam summam Seriei  $D, \frac{1}{7} + \frac{1}{16} + \frac{1}{27} + \frac{1}{40} + \frac{1}{55} + \frac{1}{72} \&c.$   
 cujus denominatores sunt Quadrati, 16, 25, 36, 49, 64, 81, &c.  
 minuti communi Quadrato  $Q \dots 9, 9, 9, 9, 9, 9$ .  
 (cujus Radix Quad. 3, & duplum 6,) 7, 16, 27, 40, 55, 72, &c.

A Serie  $\dots A = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \&c.$  subtrahatur ea-  
 dem multata sex

primis terminis  $B = \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} \&c.$

relinquitur:  $C = \frac{6}{7} + \frac{6}{16} + \frac{6}{27} + \frac{6}{40} + \frac{6}{55} + \frac{6}{72} \&c. = A - B =$   
 $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = 2 \frac{2}{20}$

adcoque:  $D = \frac{1}{7} + \frac{1}{16} + \frac{1}{27} + \frac{1}{40} + \frac{1}{55} + \frac{1}{72} \&c. = \frac{1}{6} C = \frac{49}{120}$ .

Ecc 2

Rur-

li; demonstrabitur N°. LIV. Prop.  
 45. Cor. 1.

Terminus generalis Seriei, cu-  
 jus denominatores sunt Trigona-  
 les minuti aliquo Trigonalis, erit

$$\frac{2}{(x+a)(x+a+1)-b(b+1)} =$$

$$\frac{2}{(x+a+b+1)(x+a-b)} =$$

$$\frac{2:(2b+1)}{x+a-b} - \frac{2:(2b+1)}{x+a+b+1}$$

Unde sequitur seriem summabilem  
 esse, quotiescunque  $x$  crescit per  
 divisorem differentiae  $(a+b+1)$   
 $-(a-b) = (2b+1).$

N.XXXV Rursus pro inveniendâ summâ Seriei  $E$ ,  $\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{15} + \frac{1}{22} + \frac{1}{30} + \frac{1}{39} \&c.$   
 cujus denominatores sunt Trigonales 10, 15, 21, 28, 36, 45, &c.  
 minuti communi Trigonalis  $T \dots 6, 6, 6, 6, 6, 6, \&c.$   
 (cujus Radix Trigon. 3. & duplum 4, 9, 15, 22, 30, 39, &c.  
 unitate auctum 7)

A Serie  $\dots A = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \&c.$  subtrahatur eadem truncata septem primis terminis

$$F = \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} \&c.$$

$$\text{relinquitur } G = \frac{7}{8} + \frac{7}{18} + \frac{7}{30} + \frac{7}{44} + \frac{7}{60} + \frac{7}{78} + \frac{7}{98} \&c. = A - F =$$

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} = \frac{363}{140}$$

$$\text{adeoque : } E = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{15} + \frac{1}{22} + \frac{1}{30} + \frac{1}{39} + \frac{1}{49} \&c. = \frac{2}{7} G = \frac{363}{490}$$

Atque ita per hanc Propositionem inveniri possunt summæ serierum, cum denominatores sunt vel numeri Trigonales minuti alio Trigonalis, vel Quadrati minuti alio Quadrato; ut & per XV. quando sunt puri Trigonales, ut in Serie  $\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} \&c.$  At, quod notatu dignum, quando sunt puri Quadrati, ut in Serie  $\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} \&c.$  difficilior est, quam quis expectaverit, summæ pervestigatio, quam tamen finitam esse, ex altera, qua manifesto minor est, colligimus: Si quis inveniat nobisque communicet, quod industriam nostram elusit hactenus, magnas de nobis gratias feret. (\*)

Hoc

(\*) Non potest hæc arte summarî Series cujus denominatores sunt Quadrati puri, & eas plerasque Me-

thodos quæ, magno satis numero, post Autoris fata, inventæ sunt, elusit, donec tandem Cl. EULERUS,

Hoc saltem monere adhuc liceat, quod spatium Hyperboloidæ N. XXXV  
Cubicali [cujus natura exprimitur per æquationem  $xxy = a^2b$ ,  
hoc est, in qua Quadrata abscissarum ex Asymptotis sunt in ap-  
plicatarum ratione reciproca] & Asymptotis suis comprehensum,  
eodem modo ex finita hujus Seriei summa finitum esse demon-  
strari possit, quo simile spatium in ipsa Hyperbole ex infinita Se-  
riei harmonicæ summa infinitum ostensum est. \*

Ecc 3

ΕΠΙΜΕΤΡΑ

Rus, Job. & Nicol. BERNOULLII  
detexerunt ejus summam æqualem  
esse sextæ parti quadrati circumfe-  
rentiæ, cujus Diameter est 1. Sub-  
jiciam Demonstrationem EULERI,  
indirectam quidem, sed mira qua-  
dam & inexpectata brevitate, sese  
commendantem. Notum est æqua-  
tionem infinitam  $y = x - \frac{1}{6}x^3 +$   
 $\frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \&c.$  exprimere  
relationem inter sinum  $y$  & arcum  
 $x$ , in circulo cujus radius  $= 1$ .  
Posito igitur sinu  $y = 0$ , designa-  
bunt radices hujus æquationis  $0 =$   
 $x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \&c.$  arcus  
omnes, quorum sinus sunt 0, id  
est, posita  $c =$  circumferentiæ cir-  
culi cujus Diameter  $= 1$ , vel se-  
micircumferentiæ circuli cujus ra-  
dius  $= 1$ , radices ejus æquationis  
infinitæ erunt 0,  $c$ ,  $2c$ ,  $3c$ ,  $4c$ ,

&c. Igitur, dividendo per  $x$ , ra-  
dices hujus æquationis  $0 = 1 -$   
 $\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 - \&c.$  erunt  $c$ ,  $2c$ ,  
 $3c$ , &c, vel, posito  $zz = 1 : x$ ,  
radices æquationis istius  $0 = 1 -$   
 $\frac{1}{6}z + \frac{1}{120}zz^2 - \&c.$  erunt  $\frac{1}{c}$ ,  
 $\frac{1}{4c^2}$ ,  $\frac{1}{9c^2}$ , &c. Hinc, quia in om-  
ni æquatione algebraica, ubi termi-  
ni secundum potestates descenden-  
tes indeterminatæ disponuntur, co-  
efficiens secundi termini, mutato si-  
gno, æqualis est summæ radicum  
omnium, erit  $\frac{1}{6} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{4c^2} + \frac{1}{9c^2}$   
 $+ \&c.$  Ergo  $\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \&c.$  in  
infinitum  $= \frac{1}{6}c^2 = \frac{c^2}{6}$ . Q. E. D.

\* Videatur Nus. LIV.

## [ΕΠΙΜΕΤΡΑ]

## I.

*S*icut nec corpus infinitum, ita nec atomum dari posse credo; sed utrumque nudam mentis fictionem esse puto, qua postquam corpus corpori aliquandiu addidit ademitve, pertasa tandem operationis sine fine repetenda, omnes multiplicationes vel divisiones uno immani saltu transilit, ultimamque jam factam esse, quam tamen unquam fieri repugnat, ~~αποδομῶς~~ supponis.

## II.

*Vacuum*, eo modo quo concipi a nobis solet, necessario datur.

## III.

*Hinc vacui metus inepte natura affingitur*, nec ullius phanomeni naturalis causa esse potest.

## IV.

*Fluviorum alvei non possunt esse perfecte horizontales*, sed requiritur in illis ad minimum unius pedis declivitas in milliari: unde & fluminum ostia ipsorum scaturiginibus, Oceanus & loca maritima regionibus mediterraneis necessario depressiora sunt.

## V.

*Hinc vero non levis controversia*, qua vi aqua ex Oceano in altissimorum montium cacumina revehantur; frustra saltem illi sunt, qui existimant, hoc ad eundem modum per angustos terra meatus & canaliculos fieri posse, quo videmus, liquorem infra graciliores fistulas altius assurgere posse, quam consistit externi liquoris superficies.

## VI.

*Solutio questionum circa figuram & situm Iridis*, quam antehac in rore prati conspexit Christ. MENZELIUS, ut refert in Ephemer. Nat. Curiosor. An. 1686, & qua in re omnium cujusque loci Mathematicorum opem implorat, facilis est, nulloque Ar-

chimede



chimedē indiget. Nam 1°. si Solis altitudo  $< 42$  gr. Iris ap-  
parebit Hyperbolica: si  $= 42$  gr. Parabolica: si  $> 42$  gr. Ellip-  
tica: si 90 gr. Circularis. 2°. Axis Iridis perpetuo est in linea  
umbra intuentis hominis. 3°. Elevatione oculi supra Terræ plani-  
tiam sumpta pro radio, distantia proximi verticis coni-sectionis a  
loco stationis est Tangens differentia inter 48 gr. & arcum eleva-  
tionis Solis, numeranda a facie, ubi 48 gr.  $>$  elev. Solis; a ter-  
go, ubi  $<$ . 4°. Latus rectum in omni casu est duplum Tangen-  
tis 42 gr. 5°. Transversum in Hyperbola, aggregatum ex Tangen-  
te summa & Tangente differentia 48 gr. & elevat. Solis: in El-  
lipsi, existente elevatione Solis  $> 48$  gr. aggregatum ex Tang.  
summa & Tang. differentia 42 gr. & complementi altitudinis So-  
lis; existente vero elevat. Solis  $< 48$  gr. differentia earum-  
dem (\*).

VII. Li-

(\*) Notum est omnibus, Iridis  
primariæ causam esse refractionem  
duplicem, simplicemque reflexio-  
nem radiorum solarium in guttas  
pluvias incidentium, quæ guttæ  
sunt omnes in superficie conica,  
cujus axis est linea per Solis cen-  
trum & oculum spectatoris acta, la-  
tus vero ad axem inclinatur sub an-  
gulo, quem 42 gr. assumit Autor,  
medium scilicet inter angulos arcus ru-  
bri & arcus violacei. Hæc coni su-  
perficies si secta intelligatur per  
Terræ planitiem roris guttulis spar-  
sam, dabit Iridis horizontalis figu-  
ram. Sit S, Sol; O, spectatoris  
oculus; OT, ejus altitudo supra  
Terræ superficiem TA; SOA, axis  
coni; OV, OR, ejus latera, cum  
axe comprehendunt angulos  
AOV, AOR, 42 gr. atque cum  
OP ad axem perpendiculari angu-  
lum POV 48 gr. & manifestum est

I°. Si OT in axem OA incidat, id  
est, si Solis elevatio sit 90 gr. se-  
ctionem Terræ & superficiei conicæ  
dare Iridem circularem: Inclina-  
ta vero OT ad OA, Terræ plani-  
tiam TA efficere, cum latere coni  
OV, angulum OVP æqualem sum-  
mæ angulor. OAT (elevat. Solis)  
& AOV (42 gr.); cum latere au-  
tem OR, angulum ORT æqualem  
differentiæ angulor. OAT (elev.  
Solis) & AOR (42 gr.). Igitur,  
si Solis elevatio sit  $> 42$  gr., TA  
secabit utrumque latus coni, & se-  
ctio VAR erit elliptica: si Solis  
elevatio sit  $= 42$  gr. TA erit pa-  
rallela lateri OR, & Sectio VA pa-  
rabola: si Solis elevatio sit  $< 42$   
gr. latus OR cum TA non concu-  
ret, nisi producat ab altera parte  
in Or, adeoque sectio VA erit  
hyperbola.

II. Axis sectionis VA cadit in  
lineam

TAB.  
XII. b.  
N. 35.

N. XXXV

## VII.

*Lineam Spiralem Archimedeam dimidiam esse peripheria sui Circuli, male asseris Cl. STURMIUS in Mathesi sua enucleata.*

## VIII.

*Agrimensoriam nisi Geometria peritus rite exercere non potest; unde in Rebuspub. non citra insigne præjudicium ejus cura illiteratis & plebeis committi solet.*

lineam umbræ TA hominis in-  
tuentis.

III. Distantia TV proximi ver-  
ticis V a loco stationis T est (sump-  
ta OT pro sinu toto) Tangens an-  
guli TOV, seu differentiae angul.  
POV (48 gr.) & POT = [prop-  
ter simil. triang. POT, POA]  
= OAT (Solis elevat.) hæc au-  
tem distantia, in 1<sup>a</sup>. Ellipsis figu-  
ra [ubi AOT < AOV. 42 gr. at-  
que ideo OAT, Solis elev. > 48  
gr.] numeratur a tergo; in reliquis  
figuris a facie spectatoris a Sole a-  
versi.

IV. Latus rectum habetur (vid.  
infra N<sup>o</sup>. xxxviii.) faciendo OA  
ad MN [sin. totus ad duplum  
Tangent. angul. MOA vel NOA,  
42 gr.], ut OT ad latus rect. Er-

go ubi OT est sin. tot., etiam latus  
rectum est duplum Tang. 42 gr.

V. In hyperbola, latus transver-  
sum Vr = Tr + TV = Tang.  
TOr [summæ ang. POr, 48 gr.  
& POT, Solis elev.] + Tang.  
TOV [diff. POV, 48 gr. & POT,  
Solis elev.]

In ellipsis fig. 1. Latus transver-  
sum VR = TR + TV = Tang.  
TOR [summæ AOR, 42 gr. &  
AOT, compl. OAT Solis elev.]  
+ Tang. TOV [differentiæ AOV,  
42 gr. & AOT, compl. Solis elev.]

In ellipsis fig. 2. Latus transversum  
VR = TR — TV = Tangent.  
TOR [summæ AOR, 42 gr. &  
AOT, compl. elev. Solis] — Tang.  
TOV, [differentiæ AOV, 42 gr.  
& AOT, compl. elevat. Solis.]

N<sup>o</sup>. XXXVI.

Nº. XXXVI.

# DE INVENIENDA CUJUSQUE PLANI DECLINATIONE,

*ex unica observatione projectæ a stylo  
umbræ.*

Per JAC. BERNOULLI.

**P**RO hac invenienda varii varias invenerunt methodos : sed cum ad artis perfectionem conducatur , in re præsertim non adeo facili & obvia , nosse vias plurimas , quibus eadem conficiatur ; exponam hic modum , quo declinatio Planij cujuscunque , ex unica observatione umbræ in illo projectæ , mediante tamen Solis azimutho reperiri possit. Quem quidem modum , ut omnibus accommodarem casibus , sequenti typo inclusi.

*Acta Erud.  
Lips. 1689.  
Jun. p. 311.*

In Plano proposito ducantur duæ lineæ rectæ , una horizontalis , altera perpendicularis , priorem ad angulos rectos secans ; in intersectione linearum erigatur stylus notæ longitudinis normaliter ad planum , & splendente Sole notetur longitudo umbræ de illo sparsæ , angulusque , quem umbra cum perpendiculari constituit. Quibus cognitis , tum declinatio Planij a verticali Solis , tum altitudo Solis , indeque ejus azimuth , Planique declinatio a meridiana investigabuntur , ut sequitur.

*Planum autem Verticale* appello , quod cum Horizonte angulum  
*Jac. Bernoulli Opera,* F f f lum

Num. XXXVI. lum rectum constituit: *Reclinatum*, quod obtusum: *Inclinatum*, quod acutum.

*Inclinationem* voco ipsam quantitatem anguli acuti, quem Planum inclinatum cum horizonte constituit: *Reclinationem* vero anguli illius obtusi, quem Planum reclinatum cum Horizonte facit, complementum ad 180.

*Azimuthum Solis* est arcus Horizontis interceptus inter quadrantem Solis verticalem, & Punctum meridiei; qui arcus quadrante major esse potest.

### *In omni Plano,*

Sicubi necesse est, explorare distantiam Solis a polo Plani, fiat: Ut stylus ad umbram; ita Sinus totus ad Tangentem distantiae Solis quaesitæ.

### *In Verticalibus,*

I. Si *nulla umbra*: Planum non declinat a Solis verticali, & Sol est in Horizonte.

II. Si *umbra perpendiculariter deorsum vergit*: Planum non declinat a Solis verticali; altitudo autem Solis est æqualis distantiae illius a polo Plani.

III. Si *umbra cadit horizontaliter*: Sol est in Horizonte; declinationem autem Plani a Solis verticali mensurat vicissim ejus distantia a polo plani.

IV. Si *umbra cadit inter horizontalem & perpendicularem*, & *altitudo Solis supponitur quadrante explorata*: erit:

Ut Sinus totus ad Tangentem anguli perpendicularis & umbræ; ita Tangens altitudinis Solis ad Sinum declinationis Plani a verticali Solis.

*non supponitur cognita*, utrumque sic explorabitur:

α. Ut stylus ad umbram; ita Sinus anguli perpendicularis & umbræ ad Tangentem declinationis Plani a verticali Solis.

β. Ut Sinus totus ad Tangentem complementi anguli perpendicularis

dicularis & umbræ; ita Sinus declinationis plani a verticali Solis ad Tangentem altitudinis Solis. Num. XXXVI.

*In Reclinatis,*

I. Si *nulla umbra*: Planum non declinat a Solis verticali; altitudo vero Solis est æqualis complemento reclinationis.

II. Si *umbra perpendiculariter deorsum vergit*, erit aggregatum ex distantia Solis a polo Plani & complemento reclinationis [si quidem quadrante minus sit] Solis altitudo, nec declinabit Planum a Solis verticali: at si aggregatum illud sit quadrante majus; erit ejus complementum ad 180 gr, Solis altitudo, Planique facies ab illius verticali abest integro semicirculo.

III. Si *umbra perpendiculariter sursum tendit*, non declinat Planum a Solis verticali, sed distantia Solis a polo Plani subtracta ex complemento reclinationis, erit residuum Solis altitudo.

IV. Si *umbra cadit horizontaliter*, & altitudo Solis quadrante explorata habetur: erit

Ut Sinus totus ad Tangentem altitudinis Solis: ita Tangens reclinationis ad Sinum complementi declinationis Plani a Solis verticali.

*non habetur per quadrantem*, utrumque sic invenitur:

α. Ut Sinus reclinationis ad Sinum totum; ita Tangens distantia Solis a polo Plani, ad Tangentem declinationis Plani a Solis verticali,

β. Ut Sinus totus ad Sinum complementi declinationis Plani a Solis verticali: ita Tangens complementi reclinationis ad Tangentem altitudinis Solis.

V. Si *umbra cadit inter horizontalem & perpendicularem*, & altitudo Solis cognita habetur, erit

Ut Sinus complementi altitudinis Solis, ad Sinum anguli perpendicularis & umbræ, ita Sinus distantia Solis a polo Plani,  
Fff 2 ad

Num. XXXVI. ad Sinum anguli, qui ipsam exhibet declinationem Plani a verticali Solis [siquidem hæc declinatio quadrante non sit major;] secus enim anguli illius complementi ad  $180^\circ$  est quæsitæ declinatio, ubi hæc quadrantem excedere debet: quod cognoscitur perpendiculo, cujus umbra si infra lineam horizontalem cadit, indicio est, murum plus  $90^\circ$  declinare.

*Si non est cognita, utraque sic investigabitur.*

*a.* Ut stylus ad umbram, ita Sinus complementi anguli perpendicularis & umbræ, ad Tangentem segmenti cujusdam [addendi ad reclinationem, ubi umbra styli supra lineam horizontalem spargitur; aut subtrahendi a reclinatione, illave minuendi, ubi infra dictam lineam projicitur].

*β.* Ut Sinus summæ vel residui, ad Sinum segmenti modo inventi; ita Tangens anguli perpendicularis & umbræ ad Tangentem anguli, qui exhibet declinationem Plani a Solis verticali [ubi segmentum modo dictum minus est reclinatione;] secus enim illius anguli complementum ad  $180^\circ$  declinationem Plani modo dictam metitur, sicubi segmentum illud reclinatione majus fuerit.

*γ.* Ut Sinus complementi segmenti [modo additi, ablati, minutive] ad Sinum complementi summæ vel residui; ita Sinus complementi distantiae Solis a polo Plani, ad Sinum altitudinis Solis.

### *In Inclinatoris,*

*I. Si umbra perpendiculariter deorsum vergit:* Planum non declinat a Solis verticali; complementum vero inclinationis subtrahatur a distantia Solis a Plani polo relinquit Solis altitudinem.

*II. Si umbra cadit horizontaliter:* Sol est in Horizonte, Planumque stringit; quare declinatio Plani a Solis verticali est  $90$ . gr.

*III. Si umbra spargitur inter perpendicularem & horizontalem, & altitudo Solis per quadrantem habetur, erit*

Ut



Ut Sinus complementi altitudinis Solis, ad Sinum complementi anguli perpendicularis & umbræ, ita Sinus distantiae Solis a polo Plani ad Sinum declinationis Plani a verticali Solis. Num. XXXVI.

*Si non habetur, utraque sic investigabitur:*

- a.* Ut stylus ad umbram; ita Sinus complementi anguli perpendicularis & umbræ ad Tangentem segmenti, a cujus complemento ad  $180^\circ$  subtrahatur inclinatio.
- β.* Ut Sinus residui ad Sinum segmenti; ita Tangens anguli perpendicularis & umbræ ad Tangentem anguli declinationis Plani a verticali Solis.
- γ.* Ut Sinus complementi segmenti, ad Sinum complementi residui; ita Sinus complementi distantiae Solis a polo Plani, ad Sinum altitudinis Solis.

Exploratis ita declinatione Plani a verticali Solis, hujusque altitudine [unde azimuthum ejus via communi elici potest] ita porro declinatio Plani ab ipsa Meridiana investigatur.

Observatione facta

### *Ante meridiem;*

*I. Si umbra respectu tui ante Planum constituti a linea perpendiculari spargitur dextrorsum: adde azimuth ad declinationem Plani a Solis verticali: Aggregatum [si minus est  $90^\circ$ ] dat declinationem a meridie ad ortum; [si  $90^\circ$ ] orientale directum; [si majus  $90^\circ$ ] ejus complementum ad  $180^\circ$  dat declinationem a septentrione in ortum; [si  $180^\circ$ ] septentrionale directum; [si majus  $180^\circ$ ] demtis  $180^\circ$ , relinquitur declinatio a septentrione in occasum; [si  $270^\circ$ ] occidentale directum; [si majus  $270^\circ$ ] ejus complementum ad  $360^\circ$  relinquit declinationem a meridie in occasum.*

*II. Si umbra spargitur sinistrorsum: subtrahis vel Declinatione Plani a verticali Solis & azimutho, [si nihil remanet] est meridionale directum; [si quod remanet, est minus  $90^\circ$ ] declinatio est a meridie in ortum; [si  $90^\circ$ ] Orientale directum; [si majus  $90^\circ$ ] ejus complementum ad  $180^\circ$  dat declinationem a septentrione in ortum.*

Eff 3.

*Azi.*

Num.  
XXXVI.

*Azimutho a declinatione Plani a verticali Solis* [ si nihil remanet ] est meridionale directum ; [ si remanet minus  $90^\circ$  ] declinatio est a meridie in occasum ; [ si  $90^\circ$  ] occidentale directum ; [ si majus  $90^\circ$  ] ejus complementum ad  $180^\circ$  dat declinationem a septentrione in occasum.

### Post meridiem ;

I. Si umbra cadit dextrorsum ; subtractis vel

*Declinatione Plani a verticali Solis ex azimutho* ; [ si nihil remanet ] est meridionale directum ; [ si minus  $90^\circ$  ] declinatio est a meridie in occasum ; [ si  $90^\circ$  ] occidentale directum ; [ si majus  $90^\circ$  ] ejus complementum ad  $180^\circ$  dat declinationem a septentrione in occasum.

*Azimutho a declinatione Plani a Solis verticali* : [ si nihil remanet ] est meridionale directum ; [ si minus  $90^\circ$  ] declinatio est a meridie in ortum ; [ si  $90^\circ$  ] orientale directum ; [ si majus  $90^\circ$  ] ejus complementum ad  $180^\circ$  , dat declinationem a septentrione in ortum.

II. Si umbra cadit sinistrorsum : adde azimuth ad declinationem Plani a Solis verticali ; Aggregatum [ si minus est  $90^\circ$  ] dat declinationem a meridie in occasum ; [ si  $90^\circ$  ] occidentale directum ; [ si majus  $90^\circ$  ] ejus complementum ad  $180^\circ$  dat declinationem a septentrione in occasum ; [ si  $180^\circ$  ] septentrionale directum [ si majus  $180^\circ$  ] demtis  $180^\circ$  relinquitur declinatio a septentrione in ortum [ si  $270^\circ$  ] orientale directum [ si majus  $270^\circ$  ] ejus complementum ad  $360^\circ$  dat declinationem a meridie in ortum,

### OBSERVANDA.

I. Necessum non est, ut stylus muro sit infixus perpendiculariter : possumus uti gnomone quocunque fortuito inserto ; dummodo ( quod facile fieri potest ) determinetur in muro punctum illud , quod omnium brevissime distat a styli apice , & per hoc

hoc punctum normaliter agantur duæ istæ lineæ, horizontalis & perpendicularis: tum enim distantia inter apicem styli & hoc punctum repræsentabit longitudinem styli; distantia inter punctum illud & extremitatem umbræ referet longitudinem umbræ, &c.

2. Sed nec opus est, cuilibet Plano examinando stylum infigere: poterimus Instrumento uti ad id jam præparato, omnibusque indifferenter Planis applicando, quale (exempli gratia) pro Planis verticalibus esse potest, gemina norma CAB & EFG, *Fig. 1.* quarum illa sit crurum æqualium, & utrique cruri inscriptas habeat divisiones sinuum pro singulis gradibus, sumpta longitudine alterutrius cruris pro radio; in concursu vero crurum erectum normaliter stylum AD, cujus longitudo sit æqualis radio. Volens enim explorare declinationem Plani verticalis, applica alterutrum normæ hujus latus lineæ perpendiculari in Plano ductæ IH, sic ut umbra de stylo sparsa AL utrique cruri interjaceat: dehinc volve alterius normæ GFE crus brevius FE super lineam perpendiculari Plani IH sursum deorsumve, donec crus longius FG (quod capiat divisiones tangentium ad  $60^\circ$  vel  $70^\circ$ ) *Fig. 2.* transeat per apicem umbræ; tum enim gradus abscissi FL exhibebunt declinationem Plani a verticali Solis: hos ipsos gradus numera simul in crure horizontali normæ BAC, atque in fine numerationis applica illi crus brevius normæ GFE, sic abscindet umbra gnomonis in crure longiori gradus altitudinis Solis.

3. Observatio non instituatur prope meridiem, aut Sole multum elevato, sed duabus tribusve horis ante vel post, tempore & loco, ubi paralleli Solis sunt maxime declives: quia error unius minuti prope meridiem integros gradus in azimutho involvere potest.

4. Pro operationis certitudine consultum est, eodem aut differentibus diebus, illam ter quaterve repetere; cum vix caveri possit, ne in singulis aliquot minutorum differentia reperiatur: Quare tum inter omnes declinationes mediam assumere expediet.

## ANNOTATIO.

Num.  
XXXVI.

Tab. XII. b  
No. 36.

**H**Æc inveniendæ cujusque Plani propositi declinationis ratio tota pendet ex Trigonometria Sphærica. Sit (*Fig. 1.*) Planum propositum verticale ZHNR; SP stylus, quem ad Sphæram usque Solis productum fingimus, ut ibi designet P, polum Plani; HR, linea horizontalis per quam ducatur planum HPR horizontale; ZN, linea verticalis, per quam planum ZPN verticale, in quo signentur Z, Zenith, & N, Nadir.

Igitur I. Si nulla umbra; Sol est in P.

II. Si umbra perpendicularis, Sol ponitur in  $\alpha$ , ejusque altitudo  $P\alpha$ .

III. Si umbra horizontalis, Sol ponitur in A, ejus verticalis ZA; declinationem Plani a verticali Solis PZA metitur arcus PA.

IV. Si umbra obliqua, Sol ponitur in O; ubi PO, distantiam Solis a polo Plani; OA altitudinem ejus; OPZ angulum perpendicularis & umbræ quæ in plano MOP per Solem & stylum ducto spargitur; denique OZP, declinationem Plani a verticali Solis designat, atque instituta Trianguli ZOM, in M rectanguli; Analysis juxta vulgares Trigonometriæ sphæricæ regulas, Autoris nostri Analogias suppeditat.

Sit deinde Planum propositum reclinatum HBRC (*Fig. 2*) SP stylus, P Polus plani; HR linea horizontalis, & BC huic perpendicularis in plano ducta, per quas agantur Plana proposito perpendicularia HPR, & BPC, quod erit verticale. Sit præterea HIR horizon; Z, Zenith; unde IC, vel ZP, reclinatio Plani.

Et I. Si nulla umbra, Sol existit in P, ejus altitudo PI, complem, IC, vel PZ.

II. Si umbra perpendicularis deorsum, Sol in D; ejus altitudo  $DI = DP + PI$ ; vel Sol in  $\Delta$ , ejus altitudo  $= \text{Semic. minus } \Delta I$   
[  $\Delta P + PI$  ]

III. Si umbra perpendicularis sursum; Sol in  $d$ , ejus altit.  $dI = PI - Pd$ .

IV. Si umbra horizontalis, Sol erit in  $o$ , & Analysis Trianguli rectanguli ZPo, dat Autoris nostri analogias.

V. Si umbra obliqua, Sol erit in O vel in  $\alpha$ , & ex consideratione Trianguli ZPO, vel ZP $\alpha$ , eruitur Analogia prima. Reliquæ tres,  $\beta$ ,  $\gamma$ , habentur, demittendo OD, vel  $\alpha d$  perpendiculariter in BDC. Est enim PD vel Pd, segmentum illud, quod ex Analogia  $\alpha$  invenitur,

Deni-

Denique sit Planum inclinatum, *Fig. 3.* in qua eadem eisdem literis quibus in 2<sup>a</sup>. designantur, nisi quod hic, Horizontis HAR pars superior, una cum Zenith, lateat, Nadir N conspiciatur, & PI sit Plani inclinatio. Num. XXXVI.

I. Si umbra perpendicularis, Sol est in D, ejus altitudo  $DI = PD - PI$ .

II. Si umbra horizontalis, Sol est in H, vel R,

III. Si umbra obliqua, Sol est in O, & Analysis Trianguli NOP dat Analogiam primam.

Reliquæ  $\alpha, \beta, \gamma$ , habentur, demisso arcu OD ad BDC perpendiculari. Hic enim refecat segmentum PD, cujus magnitudo per Analogiam  $\alpha$  supputatur.

Quæ sequuntur nihil habent difficultatis.



No. XXXVII.

# VERA CONSTRUCTIO GEOMETRICA PROBLEMATUM SOLIDORUM ET HYPERSOLIDORUM,

*Per rectas lineas & circulos.*

Auctore JACOBO BERNOULLI.

**Q**uadratura circuli, Inventio quarundam mediarum proportionalium inter datas rectas, Cubi Duplicatio, Trisectio Anguli, &c. Problemata fuere, ab omni retro memoria, vexatissima & antiquitus usque adeo celebratissima. Inter illa, Alta Erud. Lips. 1689. Sept. pag. 454.

*Jac. Bernoulli Opera.*

G g g

illa,

Num.  
XXXVII.

illa, hoc intercedere notatur discriminis, quod Circuli Tetragonismus nullatenus, vel calculo exhiberi, vel constructione accurata confici, huc usque potuit; dum cætera construi quidem possunt, sed ita ut ad ipsorum constructionem requirantur lineæ, quas Veteres, ob difficilem & incommodam earum delineationem, non omnino in Geometriam admittere ausi fuerunt: quapropter præstantissimi omnium seculorum Geometræ, in rei arduæ molimine quærentes gloriam, eo semper omnes suas vires intenderunt, ut tum circulum, si qua possent arte, quadrarent, tum reliqua memoratorum Problematum, linearum rectarum & circulorum ope, construerent. Quorum tamen utrumque pari difficultate involutum senserunt; quousque a perspicacioribus ingeniis omnimoda utriusque impossibilitas, hoc nostro ævo, detecta fuit. Hac itaque visa, alia sibi incedendum esse via rati sunt; cumque Circuli exactum valorem uno aliquo numero exhiberi posse impossibile ducerent, eundem saltem per seriem infinitorum numerorum exprimere sunt annisi; qualem omnium primus initio horum *Actorum* vulgavit Celeberrimus LEIBNITIUS. Ei, quod hic in quadrando circulo præstitit, simile nunc ego quiddam, circa reliqua illa, & in genere circa omnia solida, multaque etiam hyperbolida Problemata aggredior; & quod circini normæque ope, una aliqua constructione, accurate consequi hætenus non licuit, hoc per seriem, ut sic dicam, constructionis, certa lege in infinitum continuandæ, exequor; eaque ratione id obtineo, ut quæsitæ radici ita continuo magis magisque appropinquetur, ut error tandem data quavis quantitate minor fiat; totaque adeo constructionis series exactum ejus valorem exprimere debeat.

Notum, omnes æquationes cubicas, ad quas Problematum solidorum difficultates referuntur, ad unam harum formularum reduci posse:  $x^3 = -apx + aaq$ ,  $x^3 = -apx - aaq$ ,  $x^3 = +apx + aaq$  &  $x^3 = +apx - aaq$ ; quarum prima habet unam radicem veram, altera unam falsam, tertia unam veram cum duabus falsis, & quarta unam falsam cum duabus veris.

I. Pro

1. *Pro invenienda Radice vera Equationis*  $x^3 = -apx + aaq$ , <sup>Num.</sup> XXXVII.  
*aut falsa hujus*  $x^3 = -apx - aaq$ .

CONSTR. Ductis (*Figura 1.*) indefinitis rectis BP, GV, *Fig. 1.*  
 normaliter se decussantibus in puncto A, assume in earum una  
 AH = a, & ex eadem parte AG =  $\frac{1}{2}p$ ; in altera AB = q,  
 & in parte opposita punctum utcumque P; tum ita perge:

$$\text{Diametro } \left\{ \begin{array}{l} BP \\ BQ \\ BR \\ BS \end{array} \right\} \text{ describ. } \left\{ \begin{array}{l} v \\ x \\ y \\ z \end{array} \right\} \text{ arcus } \left\{ \begin{array}{l} AV \\ AX \\ AY \\ AZ \end{array} \right\} \text{ circuli } \text{ & ipsi } \left\{ \begin{array}{l} AC \\ AD \\ AE \\ AF \end{array} \right\} \text{ secans } \left\{ \begin{array}{l} GC \\ GD \\ GE \\ GF \end{array} \right\} \text{ in } \left\{ \begin{array}{l} GL \\ GM \\ GN \\ GO \end{array} \right\} \text{ sumatur } \left\{ \begin{array}{l} HL \\ HM \\ HN \\ HO \end{array} \right\} \text{ diametro } \left\{ \begin{array}{l} HL \\ HM \\ HN \\ HO \end{array} \right\} \text{ describ. } \left\{ \begin{array}{l} Q \\ R \\ S \\ T, \&c. \end{array} \right\} \text{ arcus } \left\{ \begin{array}{l} Q \\ R \\ S \\ T, \&c. \end{array} \right\} \text{ circuli } \left\{ \begin{array}{l} Q \\ R \\ S \\ T, \&c. \end{array} \right\} \text{ secans } \left\{ \begin{array}{l} Q \\ R \\ S \\ T, \&c. \end{array} \right\} \text{ AP in } \left\{ \begin{array}{l} Q \\ R \\ S \\ T, \&c. \end{array} \right\}$$

Ubi observandum, quod si punctum P casu sic assumptum fuerit, ut, facta deinceps circini revolutione, punctum Q coincidat cum puncto P; erit AP, vel AQ, ipsa quæsita radix accurata: sin minus, rectæ AP, AQ, AR, AS &c. ad verum valorem radices continuo magis magisque, & tandem data quavis quantitate propius accedent.

2. *Pro invenienda Radice vera Equationis*  $x^3 = +apx + aaq$   
*aut falsa hujus*  $x^3 = +apx - aaq$ .

Constructio (*Figura 2.*) eadem, quæ præcedens, nisi quod *Fig. 2.*  
 AH & AG ad partes oppositas sumendæ, & GL, GM, GN, &c. non deorsum versus A, sed sursum abscindendæ sunt: quæ ratione lineæ AP, AQ, AR &c. valori radices, ut prius, magis magisque appropinquabunt.

3. *Pro inveniendis Radicibus falsis Equationis*  $x^3 = +apx + aaq$   
*aut veris hujus*  $x^3 = +apx - aaq$ .

Fiat, ibidem Ab = AB, sumptoque AR quam minimum & insensibiliter differre a radice vera prioris, aut falsa posterioris æquationis, (prout illa per præcedentem constructionem reperi-  
 ta fuit) jungatur RH, eique parallela ducatur bh, factisque  
 As =  $\frac{1}{2}$  AR, & Ag = Ab, diametro gH describatur arcus cir-  
 culi

G g g 2

culi



#### 414 CONSTRUCTIO PROBLEMATUM SOLIDORUM &c:

Num. XXXVII. culi secans  $AP$  in  $l$ , aliusque centro  $s$  radio  $As$ , quem secet, vel tangat recta  $lq$  parallela ipsi  $AG$  in punctis  $p$  &  $q$ ; eruntque  $lp$ ,  $lq$ , binæ radices quæsitæ.

NOTA. Si circulum centro  $s$  descriptum non secet, vel tangat recta  $lq$  (quod fit, cum ultimus æquationis terminus major est quarta parte cubi, aut quantitas cognita penultimi minor tribus quartis partibus quadrati radices  $AR$ ; aut etiam cum quadratum semissis ultimi majus cubo trientis quantitatis cognitæ penultimi: ) indicio est, duas reliquas radices esse imaginarias.

Fig. 3. *Aliter per peculiarem constructionis seriem:* Fiant eadem, quæ supra, (Figura 3.) nisi quod rectæ  $AC$ ,  $AD$ ,  $AE$  &c. ( $Ac$ ,  $Ad$ ,  $Ae$  &c.) non jam capiendæ sunt in linea  $AB$ , sed applicandæ semicirculo super diametro  $AG$  descripto; distantisque  $GC$ ,  $GD$ ,  $GE$  &c. æquales abscindendæ  $GL$ ,  $GM$ ,  $GN$  &c. sursum pro majore radicum quæsitærum (saltem in primo sequentium casuum:) & ipsis  $Gc$ ,  $Gd$ ,  $Ge$  &c. æquales  $Gl$ ,  $Gm$ ,  $Gn$  &c. deorsum pro minore: Ubi cavendum, ne punctum  $P$  [ $p$ ] quod constructionem inchoat, assumatur, vel prope, vel remote nimis a puncto  $A$ ; fieri enim posset, ut sic assumptum alterutram rectarum  $AC$  vel  $AD$  [ $Ac$ ,  $Ad$ ] majorem exhiberet, quam quæ circulo inscribi posset: facile autem assignari possunt limites, intra quos si capiatur punctum  $P$ , id incommodi evitabitur; nam

Fig. 4. 1. Si Quadratum ultimi termini minus est Cubo semissis quantitatis cognita penultimi: Sumatur (Fig. 4.) ad  $BA$  &  $AG$  tertia proportionalis  $AM$ , ut & tertia ad  $HA$  & inventam  $AM$ , quæ sit  $AL$ , major scilicet futura ipsa  $AG$ ; hinc semicirculo applicetur  $GC = GL$ , junctaque  $AC$  quærat tertia proportionalis ad  $AB$  &  $AC$ , quæ sit  $AN$ : eruntque puncta  $M$  &  $N$  limites, quos intra quodvis punctum accipi poterit pro invenienda radice majore: pro minore nullo indigemus limite ex parte  $A$ , sed quodvis punctum inter  $A$  &  $M$  pro initio constructionis accipi poterit; quod & de radice majore intelligendum, quando ipsa  $GL$  major est, quam ut semicirculo inscribi possit.

2. Si

2. Si *Quadratum ultimi termini aequale est Cubo semissis quantitatis cognita penultimi*; limites M & N indistantes fiunt; proinde ipsa AM vel AN est radix major. Num. XXXVII.

3. Si *Quadratum ultimi termini majus est Cubo semissis quantitatis cognita penultimi*, radix major consistit in indivisibili, hoc est, quo diutius continuatur constructio, eo longius ex utraque parte ab ejus genuino valore receditur: quare tum sola minor appropinquando inveniri poterit: qua tamen cognita, nec major latebit amplius; quandoquidem ambarum summa tertiam radicem, supra per constructionem figuræ secundæ inventam, perpetuo, ut notum est, in istis æquationibus æquat. Sumpto igitur rectam AR huic tertiæ radici proxime accedere, ut statuminentur porro limites pro invenienda altera, bisecetur AR; poteritque punctum quodvis in sinistra ejus medietate acceptum pro operationis initio statui.

4. Si denique *Quadratum semissis ultimi termini æquet Cubum trientis quantitatis cognita penultimi*, erit quæsitæ radix utraque æqualis semissi rectæ AR: *sin Cubum hunc superet*, constat utramque esse imaginariam; quare nec per hanc constructionem ulla inveniri potest.

Cæterum observare non injucundum, quo pacto in omnibus istis constructionibus rectæ AP, AQ, AR, AS &c. [Ap, Aq, Ar, As &c.] (fig. 1. 2. 3.) continuis, vel incrementis, vel decrementis, vero radicum valori appropinquant; præterquam pro sola radice majore figuræ tertiæ, ubi alternis, nunc decrementis, nunc incrementis ad ejus valorem accedunt: sic ut verus radicis valor ibi exprimatur per seriem infinitam:  $AP + PQ + QR + RS \&c.$  vel  $AP - PQ - QR - RS \&c.$  hic per seriem:  $AP + PQ - QR + RS - ST \&c.$

Quemadmodum vero nulla jam dari potest æquatio cubica, quæ non eo reduci possit, ut juxta allata præcepta, solius circini & normæ ope, construi queat; ita similes omnino afferre possem regulas pro constructionibus æquationum quatuor dimensionum, si Lectori voluptatem eandem proprio Marte eruendi præripere vellem. Unam exempli loco dabo, pro æquatione  $x^4 + apxx -$

Ggg 3

aaqx

Num. *aaqx — a'r = 0*, ad quam construendam eadem prorsus observanda, quæ fieri jubentur in *figura 1.* nisi quod insuper in recta BP abscindenda est, ex A, in alterutram partem recta Ar, quæ sit media proportionalis inter *a* & *r*; & tum rectæ AC, AD, AE &c. non ipsis AV, AX, AY &c. sed distantis rV, rX, rY &c. æquales capiendæ.

Subjungo nunc applicationem novæ hujus construendi methodi ad nobilissimum Problema de Inventionem quarundam mediarum proportionalium.

Fig. 5.

*a. Invenire duas medias proportionales inter duas datas: (Fig. 5.)*

CONSTRUCTIO: Ductis normalibus indefinitis CB, NR, sese ad rectos angulos secantibus in A; abscindantur ex earum una rectæ AC, AB, æquales datis: quo facto

$$\text{Dia-} \left\{ \begin{array}{l} \text{BC} \\ \text{CH} \\ \text{BD} \\ \text{CI} \\ \text{BE} \\ \text{CL} \\ \text{CL} \\ \text{BF} \end{array} \right. \text{metro.} \left\{ \begin{array}{l} \text{def-} \\ \text{crib.} \\ \text{arcus} \\ \text{circu-} \\ \text{li se-} \\ \text{cans} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{AN} \\ \text{AR} \\ \text{AN} \\ \text{AR} \\ \text{AN} \\ \text{AR} \\ \text{AN} \end{array} \right. \text{in} \left\{ \begin{array}{l} \text{N} \\ \text{R} \\ \text{O} \\ \text{S} \\ \text{P} \\ \text{T} \\ \text{Q} \end{array} \right. \text{ipfi-} \left\{ \begin{array}{l} \text{AN} \\ \text{AR} \\ \text{AO} \\ \text{AS} \\ \text{AP} \\ \text{AT} \\ \text{AQ} \end{array} \right. \text{que} \text{ fiat } \left\{ \begin{array}{l} \text{AH} \\ \text{AD} \\ \text{AI} \\ \text{AE} \\ \text{AL} \\ \text{AF} \\ \text{AM} \end{array} \right. \text{ &c.}$$

Hac ratione rectæ AD, AE, AF &c. magis magisque appropinquabunt primæ & rectæ AH, AI, AL, &c. secundæ duarum mediarum proportionalium inter datas AC & AB; quousque easdem post infinitam operationis seriem præcise assequantur.

Fig. 6.

*β. Invenire quatuor medias proportionales: (Fig. 6.)*

$$\text{Dia-} \left\{ \begin{array}{l} \text{BC} \\ \text{BD} \\ \text{BE} \end{array} \right. \text{metro} \left\{ \begin{array}{l} \text{def-} \\ \text{crib.} \\ \text{arcus} \\ \text{circu-} \\ \text{li se-} \\ \text{cans} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{N} \\ \text{O} \\ \text{P} \end{array} \right. \text{ipfi-} \left\{ \begin{array}{l} \text{AN} \\ \text{AO} \\ \text{AP} \end{array} \right. \text{que} \text{ fiat } \left\{ \begin{array}{l} \text{AH} \\ \text{AI} \\ \text{AL} \end{array} \right. \text{Hinc quæ-} \left\{ \begin{array}{l} \text{AH} \\ \text{AI} \\ \text{AL} \end{array} \right. \text{ratur per} \left\{ \begin{array}{l} \text{AH} \\ \text{AI} \\ \text{AL} \end{array} \right. \text{præcedent.} \left\{ \begin{array}{l} \text{AD} \\ \text{AE} \\ \text{AF} \end{array} \right. \text{ &c.}$$

Hac

Hac ratione ipsæ AD, AE, AF &c. accedent primæ & AH, <sup>Num.</sup> AI, AL &c. tertiæ quæsitæ quatuor proportionalium inter XXXVII. AC & AB,

γ. *Invenire sex medias proportionales:* (Fig. 7.)

Fig. 7.

Data sint, sicut antea, CA, & AB; & fiat AQ = AC; tum vero

$$\text{Dia-} \left\{ \begin{array}{l} \text{BC} \text{ ----} \\ \text{-- CH --} \\ \text{---- QR} \\ \text{BD} \text{ ----} \\ \text{-- CI --} \\ \text{---- QS} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{des-} \\ \text{crib.} \\ \text{arcus} \\ \text{circu-} \\ \text{li fe-} \\ \text{cans} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{AN} \text{ ----} \\ \text{-- AR --} \\ \text{---- AC} \\ \text{AN} \text{ ----} \\ \text{-- AR --} \\ \text{---- AC} \end{array} \right\} \text{in} \left\{ \begin{array}{l} \text{N} \text{ --} \\ \text{-- R --} \\ \text{-- D --} \\ \text{O} \text{ --} \\ \text{-- S --} \\ \text{-- E --} \end{array} \right\} \text{ipfi-} \left\{ \begin{array}{l} \text{AN} \\ \text{--} \\ \text{--} \\ \text{AO} \\ \text{--} \\ \text{--} \end{array} \right\} \text{que} \text{ fiat } \left\{ \begin{array}{l} \text{AH} \\ \text{--} \\ \text{--} \\ \text{AI} \\ \text{--} \\ \text{--} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{AH} \\ \text{--} \\ \text{--} \\ \text{AI} \\ \text{--} \\ \text{--} \end{array} \right\}, \text{ \&c.}$$

Quo pacto ipsæ AD, AE &c. appropinquabunt primæ; AR, AS &c. secundæ; & AH, AI &c. quartæ sex mediarum proportionalium.

In plerisque harum, ut & superiorum constructionum, hoc peculiare annotamus, quod delineatis semel normalibus indefinitis, & abscissis rite datis, cætera constructio, seu appropinquatio, fieri possit, ut circinus non amoveatur e charta, sed perpetuo alternis super illa pedibus incedat, & quasi in orbem ambulet; si modo concedatur rectæ bisectio mechanica, quæ nunc aperiendo, nunc claudendo circinum, peragitur.

Observandum etiam, non necessum esse, ut diametro CB arcus describatur, ad determinanda puncta H & D: potest enim alterutrum horum, initio statim operationis, accipi ad libitum, & ab illo inchoari constructio: & quidem si constructionem compendificare desideres, poteris rectas AH vel AD tales assumere, quas, iudicio oculorum, æstimaveris, aut aliunde sciveris, quæsitis proportionalibus quam proxime accedere.

Qualescunque vero assumantur; plerumque paucae admodum circini revolutiones requiruntur, ut error penitus insensibilis evadat: adeo ut, præter geometricam hujus negotii *ἀκρίβειαν*, ad ipsam quoque praxim mechanicam vix quicquam accuratius & expe-

Num. XXXVII. expeditius dari possit: quod si quis secum rite pensitaverit, facietur, & hoc invento, non levem Geometriæ accessionem factam esse.

## A N N O T A T I O.

Harum constructionum fundamentum videtis N°. LIV. Propp. 29-35. ex quo non difficile est singulas demonstrare. Videri etiam potest *March. HOSPITALII Tractatus Analyticus de Sectionibus Conicis*, Lib. IX. Prop. 12. pag. 351-358.



N°. XXXVIII.

## NOVUM THEOREMA

P R O

D O C T R I N A

SECTIONUM CONICARUM,

Per JAC. BERNOULLI.

*AB. Erud. Lipf. 1689. Nov. p. 586* **M**IRUM est, in materia Veteribus ac Recentioribus adeo trita, relictum esse aliquid, quod eorum industriam adhuc effugerit; præsertim proprietatem adeo generalem, cujusmodi est hæc, quæ sequitur:

*Si in triangulo per axem conici ACD, demittatur a vertice in basin perpendicularis AI. & ex ea abscindatur AN, aequalis perpendiculari AB, ex eodem vertice A in diametrum ex generatione conici-sectionis HO demissa; ac per N agatur FE parallela*

Ista basi, secans crura trianguli per axem in F & E, erit FE <sup>Num.</sup> XXXVIII  
 Latus Rectum coni-Sectionis.

# DEMONSTRATIO.

Ducantur AQ & AL parallelæ diametro HO & basi CD, quarum prior secet ipsam FE in G; eruntque Triangula FAG, HAL, HCO, ut & AGE, MLA, MOD, similia: sed & AL = AG [est enim angulus LAN = angulo BAG, demptoque communi BAN, angulus LAB = NAG; præterea anguli ABL, ANG, recti, & latus AB = lateri AN, ac propterea Triangula ABL, ANG similia & æqualia] Hinc

1. In Parabola.  $FG : AF = AL [AG] : AH$ ; quare Rectangulum  $FAG = AH \times FG$ . Sed, ex APOLLONIO \*, Rect.  $FAG [AH \times FG] : FG^2 [= AH : FG] = AH : R$  [Latus rectum Parabolæ.] Ergo  $FG$  vel  $FE = R$ . Q. E. D.

Idem ex alia proprietate Parabolæ:  $HO : CO = AG [AL$  vel  $OQ] : FG$ . Hinc  $HO \times FG = COQ = OP^2 =$  [ex natura Parabolæ]  $HO \times R$ . Ergo  $FG$  vel  $FE = R$ . Q. E. D.

2. In Hyperbola & Ellipsi:  $FG : AG = AL : LH$  (unde  $FG \times LH = GAL$ .) Item  $AG : GE = ML : AL$ ; quare, ex æquo perturbata,  $FG : GE = ML : LH$ ; &, componendo seu dividendo,  $FE : GE = MH : LH$ ; permutandoque  $FE : MH = GE : LH = FGE : FG \times LH [GAL$  seu  $GA^2] = R : MH$ , ex APOLLONIO †. Ergo  $FE = R$ . Q. E. D.

Idem ex alia proprietate harum Sectionum:

$GE : AG = LA : ML$ , &  $AG : FG = LH : LA$ , unde perturbata & composita vel divisim, ut antea, permutandoque  $FE : MH = GE : LH = GE : AG + AG [AL] LH = OD : MO$  ‡.

Jac. Bernoulli Opera.

H h h

OG:

\* Copie. I. 11.

† Conic. I. 12. & 13.



Num. XXXVIII  $OC : HO = COD [OP^2] : MOH = R : MH$ , ex natura Sectionum. Ergo  $FE = R$ . *Q. E. D.*

3. In Circulo basi subcontrarie posito, res evidentior est, quam ut demonstratione indigeat.

*Demonstratio universalis pro omnibus sectionibus.*

Ducatur HZ basi parallela, secans ipsam AQ in X; eritque  $HZ : FE = HX [LA \text{ seu } AG] : FG = HO : OC = HZ : R$ ; per ea quæ habet WALLISIUS in *Tractatu de Sectionibus Conicis* pag. 28. 37. & 43. Ergo  $FE = R$ . *Q. E. D.*

*Corollarium I.* Si centro A, radio quocunque AB, in plano trianguli per axem, descriptus sit circulus, & circa illum rote- tur planum BO, tangens subinde ejus peripheriam, secansque basin conï secundum rectam OP, quæ basi trianguli per axem perpendicularis est, omnes hac rotatione genitæ Coni- Sectiones, sive Parabolæ, Hyperbolæ, Ellipses, sive denique Circuli, idem habebunt Latus rectum, æquale videlicet rectæ FE.

*Corollarium II.* Quia  $AI : CD = AN [AB] : FE [R]$ ; se- quitur, in quavis Coni- Sectione, Latus rectum esse quartam pro- portionalem ad AI, CD & AB. Unde, vel ex hoc indicio, colligo, nihil hucusque constituisse Conicorum Scriptoribus de hoc Theoremate: cum non verisimile sit, illos (si scivissent) de- signatures fuisse rationem Parametri ad aliam rectam, per ratio- nem Quadrati CD ad Rectangulum CAD (ut in Parabola) aut Rectanguli CQD ad Quadratum AQ (ut in Hyperbola & Ellip- si,) quam tamen per simplicem rationem rectarum constantium CD & AI, & quidem universaliter in quavis sectione, caracte- rizare potuissent.

Cum Fratri hæc aperuissim, mox eadem suis quoque demon- strationibus munivit; quas, quia non inconcinne mihi visæ sunt, hic subjungam; quod in novo Theoremate facile merebitur ve- niam:

1. In Parabola:  $FG : HX = AG [HX] : AX$ ; proinde  $HX^2$



$HX^2 = FG \times AX$ ; est autem \*  $HA : R = HA \times AX : HX^2$  Num. XXXVIII  
 $[FG \times AX] = HA : FG$ . Ergo  $FG$  vel  $FE = R$ . *Q. E. D.*

*Aliter.*  $AH : FG = AH : HX + HX : FG = AF : FG + HX [AG] : FG = AF \times AG : FG^2 = AH : R^*$ . Ergo  $FG = R$ . *Q. E. D.*

2. *In Hyperbola & Ellipsi.*  $MH : FE = MH : HZ + HZ : FE = AG : GE + AX : AG [HX] = AG : GE + AG : GF = AG^2 : EGF = MH : R^+$ . Ergo  $FE = R$ . *Q. E. D.*

\* *Apollon. Conic. I. 11.*

† *Apollon. Conic. I. 12. & 13.*



Nº. XXXIX.

# JACOBI BERNOULLI

## A N A L Y S I S

PROBLEMATIS ANTEHAC PROPOSITI.

*De Inventionē Lineæ descensus a corpore gravi percurrentē uniformiter, sic ut temporibus æqualibus æquales altitudines ementiatur : & alterius cujusdam Problematis Propositio.*

**S**olutionem Problematis nudam dedit Illustrissimus HUGENIUS in *Novellis Roterodami*: Hanc postea excepit in *Actis* *Acta Erud. Lipf. 1690. Mai. p. 217*  
*Lipf. A. 1689. p. 195. seqq.* Celeberrimi Auctoris \* De-  
mon-

\* G. G. LEIBNITII.

Num.  
XXXIX.

monstratio Synthetica. Analysin, quam suppressit uterque, ipsius Auctoris calculo differentiali institutam nunc pando; eum in finem, ut Virum Celeberrimum ad par officii genus publico præstandum, tentandamque, sua Methodo, Problematis deinceps proponendi solutionem invitem.

Intelligatur grave demissum ab A per curvam quæsitam BFG, in qua sumptæ sint particulæ infinite parvæ, adeoque pro rectis habendæ, DG, FH, altitudinum æqualium GI, HL; eæque producantur in M, N, ut fiant Tangentes GM, HN; ipsique HN parallela ducatur GP. Celeritates gravis acquisitæ in G & H eadem sunt cum iis quas acquireret, descendendo perpendiculariter, ab eadem linea horizontali AC, per rectas CG, EH, quæ quidem sunt ut quadrata ipsarum celeritatum, ut notum. Quibus positis,

CG est ad EH, ut quadr. celeritatis in G, ad quadr. celeritatis in H, ut DGq ad FHq, ut DGq ad GIq & GIq [HLq] ad FHq, ut GMq ad GCq & HEq ad HNq, ut GMq ad GCq & GCq ad GPq, ut GMq ad GPq. Unde Problema, ad puram Geometriam reductum, huc redit: Datis positione recta AC, & puncto A; invenire curvam BHG talem, ut applicata CG ad applicatam EH rationem habeat duplicatam ejus, quam habet tangens GM ad rectam GP parallelam tangenti HN. Patet autem, rectam AC, ad quam applicantur CG, EH, non posse esse axem curvæ, nec A verticem: cum alias applicata ad punctum A evanesceret, ac proinde applicatarum ratio fieret infinite magna, ejusdem subduplicata manente finita. *Q. E. Abs.*

ANA-

ANALYSIS.

Num.  
XXXIX.

$$\begin{array}{l|l} \text{CG} = a & \text{HL:} \quad \text{HF} = \text{GC:} \quad \text{GP} \\ \text{GM} = b & dy : \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = a : \frac{a\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dy} \\ \text{AE} = x & \text{CG:} \quad \text{EH} = \text{GM}q : \quad \text{GP}q \\ \text{EH} = y & a : y = bb : \frac{aa dx^2 + aa dy^2}{dy^2} \end{array}$$

$$\begin{aligned} a : y &= b b d y^2 : a a d x^2 + a a d y^2 \\ b b y d y^2 &= a^1 d x^2 + a^1 d y^2 \\ b b y d y^2 - a^1 d y^2 &= a^1 d x^2 \\ d y \sqrt{(b b y - a^1)} &= d x \sqrt{a^1} \end{aligned}$$

Ergo & horum Integralia æquantur, nempe,  $\frac{2 b b y - 2 a^1}{3 b b}$   
 $\sqrt{(b b y - a^1)} = x \sqrt{a^1}$ ; positoque  $y - a^1 : b b = z$ , habetur  
 $\frac{2}{3} z \sqrt{b b z} = x \sqrt{a^1}$ , vel  $\frac{2}{3} b b z^3 = a^1 x x$ , &  $z^3 = 9 a^1 x x : 4 b b$ .  
 Quare demissa ex A perpendiculari  $AB = a^1 : b b$ , ductaque  
 BR parallela ipsi AC, si vertice B, axe BR, & latere recto  
 $9 a^1 : 4 b b$ , seu  $\frac{9}{4} AB$ , describatur Curva paraboloidica BHG, ejus  
 naturæ, ut solidum ex latere recto in quadratum abscissæ æque-  
 tur cubo applicatæ; habetur quæsitum. Porro, quia per Cur-  
 vam BHG descendens grave temporibus æqualibus æquales alti-  
 tudines percurrit; tantundem est quoad descensus altitudinem, ac  
 si celeritate in B acquisita deinceps uniformiter descenderet per  
 BS; quo casu constat, eodem tempore, duplo plus spatii confi-  
 ci, quam conficitur motu a quiete æqualiter accelerato: adeo-  
 que si BS dupla sumatur ipsius AB, fore tempus descensus per  
 BH, post AB, æquale tempore per AB.

Num.  
XXXIX.

# PROBLEMA

Vicissim proponendum hoc esto :

*Invenire, quam curvam referat funis latus & inter duo puncta fixa libere suspensus.*

Sumo autem, funem esse lineam in omnibus suis partibus facillime flexilem. \*

\* Problematis istius, quod primum fere dubitantes Geometras usum Calculi Leibnitiani docuit, solutiones dederunt, in *Actis Erudit.* 1691. Jun. pag. 273-282, Viri præst. LEIBNITIUS, HUGENIUS, Joh. BERNOULLIUS. Proxime secuta sunt Problemata Velariæ & Linteariæ, quæ omnia diversis investigari possunt mediis. Methodum Auctoris nostri, a Fraterna, quam expositurus sum, haud adeo dissimilem fuisse, non temere conjectari licet.

LEMMA. Si filum perfecte flexile, (Fig. 1) ABCDEFGHI, in punctis A & I affixum, incurvetur in polygonum a potentiis quolibet BK, CK, DK, EK, FK, GK, HK, quæ sint omnes in æquilibrio: Dico, æquilibrium non turbari, si, ablata fili portione quavis CDEFG, & potentiis CK, DK, EK, FK, GK ipsi applicatis, producantur fila BC, HG, ad mutuum concursus T, ibique applicentur potentiæ TX, TV, quarum illa, TX, verticalis æqualis sit summæ potentiæ verticalium,  $CL + DL + EL + FL + GL$ ; hæc, TV, horizontalis æqualis sit summæ horizontalium  $CM + DM + EM - FM - GM$ , in quas abla-

ta potentiæ, CK, DK, EK, FK GK, resolvi possunt.

Nota, per summam potentiæ horizontalium intelligi summam earum quæ in unam partem trahunt, demta summa illarum quæ trahunt in partem oppositam, & pariter, per summam verticalium, intelligi excessum summæ earum quæ trahunt deorsum supra summam earum, si quæ sint, quæ trahunt sursum.

Nota etiam, resolutionem potentiæ quæ in horizontales & verticales facta est, in laterales quasvis, potuisse fieri, modo omnes CL, DL, EL, &c. TX; item CM, DM, EM, &c. TV, sint inter se parallelæ.

DEMONSTR. Repræsentent CP, GQ, tensiones filorum CB, GH, eæque resolvantur in horizontales & verticales tensiones CN, CR; GO, GS. Igitur punctum T, tensionibus CP, GQ, conjunctim trahitur, sursum, nisu  $CR + GS$ ; horizontaliter versus H, nisu  $GO - CN$ . Sed trahitur a potentia TX deorsum, a potent. TV horizontaliter versus V. Datur ideo æquilibrium si  $TX = CR + GS$ , &  $TV = GO - CN$ . Id autem ita comparatum

raturum est. Nam, si resolvantur singulorum filorum CD, DE, EF, FG tensiones in horizontales & verticales; necesse est, quoniam tres potentiae CP, CK, & tensio fili CD, circa punctum C sunt in æquilibrium, tensionem verticalem CR fili CB æqualem esse potentiae verticali CL simul, & tensioni verticali fili CD; ac, propter æquilibrium circa punctum D, tensionem vertical. fili CD æqualem esse pot. DL & tensioni vertic. fili DE, quæ etiam æquatur pot. EL & tensioni vert. fili EF: hæc autem æqualis est pot. FL minus tensione vert. fili FG, quæ tensio, una cum pot. GL æquatur tensioni vert. GS fili GH. Ergo  $CR = CL + DL + EL + FL + GL - GS$ , seu  $CR + GS = [CL + DL + EL + FL + GL]$  TX. Similiter tensio horizontalis CN fili CB, una cum pot. CM æqualis est tensioni horiz. fili CD, & hæc tensio, cum pot. DM æquatur tensioni horiz. fili DE, quæ tensio, cum pot. EM, æqualis est tensioni horiz. fili EF: ista vero æquatur pot. FM simul & tensioni horiz. fili FG, quæ & potentiae GM & tensioni horizontali GO fili GH æqualis est. Ergo  $CN + CM + DM + EM = FM + GM + GO$ ; unde  $TV = [CM + DM + EM - FM - GM]$  GO — CN. Q. E. D.

**COROLL.** Completo Parallelogrammo TVZX erit TZ, media directio, & potentia æquipollens omn. pot. CK, DK, EK, FK, GK.

PROPOSITIO.

Num. XXXIX.

*Sit filum perfecte flexile ab innumeris potentiis BK, in curvam BAC inflexum, quaeritur curvæ natura.*

Sit AT [Fig. 2] tangens horizontalis Curvæ; AF, ipsi insilens ad angulos rectos, axis; in quo, sumta ad libitum abscissa AF dicatur  $x$ ; FB ordinata,  $y$ ; curva AB,  $z$ ; potentia BK  $= p dz$ ; sinus totus  $= 1$ , sinus anguli KBM, quem potentia BK cum horizonte constituit,  $s$ ; ejus cosinus, vel sinus anguli KBL,  $\sqrt{1 - ss}$ : adeoque potentiae, verticalis BL,  $ps dz$ ; horizontalis BM,  $pdz \sqrt{1 - ss}$ ; quia BK, BL, & BM sunt ut sinus totus, sinus ang. KBM, & sin. ang. KBL. Igitur si, ducta tangente BT, capiatur TV  $= sps dz$ , & TX  $= spdz \sqrt{1 - ss}$ ; compleatur parallelogrammum TVZX, erit TZ media directio, & potentia omnibus BK æquipollens.

Jam si tensio fili in A dicatur  $a$ , potentia TA erit  $a - TX = a - spdz \sqrt{1 - ss}$  potent. vero TV  $= sps dz$ . Atqui, propter æquilibrium in T, potent. agentes secundum TA, TV, TB sunt ut latera parallela bE [dy], BE [dx], Bb [dz], trianguli BbE. Ergo  $a - spdz \sqrt{1 - ss} : sps dz = dy : dx$ , hoc est,  $a dx = dy sps dz + dx spdz \sqrt{1 - ss}$ , quæ æquatio dabit curvæ BAC naturam.

**COROLL. 1.** Hinc etiam dabitur media directio & potentia æquipollens TZ.

Co-

TAB. XVIII. b. N. 35.

Num.  
XXXIX.

COROLL. 2. Tensio fili Bb ==

$$\frac{dz}{dx} \int p s dz.$$

Ut ad specialem casum Funiculariæ vel Catenariæ descendamus, quoniam, hic, vires BK sunt pondera, aut gravamina, particularum funis Bb; linea BK cadit in BL, evanescit angulus KBL, & ang. KBM rectus evadit. Unde fit  $s=1$ , &  $\sqrt{(1-s)}=0$ ; quo ipso, æquatio generalis mutatur in hanc  $adx = dy s p dz = P dy$ , (posito  $P = \text{summæ potentiarum}$ ).

Si  $P$  sit functio data ipsius  $z$ , hoc est si funis gravamina [ $p dz$ ] varientur utcunque, sed relate ad funis longitudinem; erit  $dz = \sqrt{(dy^2 + dx^2)} = \sqrt{(dy^2 + P^2 dy^2 : a^2)} = \frac{dy}{a} \sqrt{(aa + PP)}$  atque  $dy = a dz : \sqrt{(aa + PP)}$ , &  $dx = [P dy : a] = P dz : \sqrt{(aa + PP)}$ . Ergo  $y$  &  $x$  functiones erunt ipsius  $z$ , datæ, saltem transcendenter. Assumpta igitur ad libitum  $z$ , dantur  $x$  &  $y$  & ipsa curva funicularia, saltem transcendenter.

$$\text{Tensio autem fili Bb} = \frac{P dz}{dx} =$$

$$\sqrt{(aa + PP)} = \frac{adz}{dy}.$$

*Exemplum.* Ponamus funem uniformiter crassum, proprio duntaxat pondere gravatum, qui casus est Problematis ab Auctore propositi. Ergo  $p=1$ , &  $p dz = dz$ , atque  $P = [\int p dz =] z$ . Igitur  $dx = [P dz : \sqrt{(aa + PP)}] = z dz : \sqrt{(aa + zz)}$  & integrando,  $x + c = \sqrt{(aa + zz)}$ . Quia vero abscissæ principium ponitur in A, erit  $x=0$ , quando  $z=0$ , unde fit  $c=a$ . Ergo  $x+a = \sqrt{(aa + zz)}$ , atque  $z = \sqrt{(xx + 2ax)}$  &  $dz = \frac{x+a}{\sqrt{(xx + 2ax)}} dx$ . Igitur  $dy = [adz : \sqrt{(aa + PP)}] = adx : \sqrt{(xx + 2ax)}$ , æquatio est ad funiculariam vulgarem, quæ quoniam nequit integrari, indicio est curvam inter Mechanicas referendam esse.

Tensio autem fili in B  $= \sqrt{(aa + PP)} = \sqrt{(aa + zz)} = x+a$ . Media directio TV, verticalis; Potentia æquipollens  $= \int p dz = z$ , pondus catenæ.

Quod si  $P$  non ipsius  $z$ , sed ipsarum  $x$ , aut  $y$  sit data functio, nihilominus naturam curvæ reperire licebit, quemadmodum N°. XLII. Nota g videre est.

Nº. XL.

# JACOBI BERNOULLI QUÆSTIONES NONNULLÆ DE USURIS,

*Cum solutione Problematis de sorte Aleatorum,  
propositi in Ephemerid. Gallic.*

*A. 1685. Art. 25. \**

**F**requens mos obtinet, ut qui alteri pecuniæ summam debet, & parato ære instructus non est, cum Creditore suo ita paciscatur, ut, quod simul ac semel solvere nequit, hoc successive & per partes solvere, ac interim dilationis nomine legitimam usuram Creditori præstare teneatur; ita quidem ut, quod quavis vice ultra debitam usuram solvit, hoc in partem solutæ sortis venire censendum sit. Accidit autem post aliquod tempus, ut, persoluta jam maxima parte debiti, alter ab altero debitæ & acceptæ pecuniæ rationes poscat; quas aliter format Creditor, aliter Debitor. Creditor hunc in modum:

Sors debita initio temporis - - - - - *a*

Hinc [ posito sortem *m* tempore *n* parere usuram *p* ] usura per tempus *b* - - - - - *abp : mn.*

Summa - - - *a + abp : mn*

*Jac. Bernoulli Opera.*

Iii

Exaëto

\* *Supra Num. XIV.*

*Acta Erud.  
Lipf. 1690.  
Mai. p. 219.*



No. XL. Exa $\dot{c}$ to tempore $b$ solvit Debitor	-	-	-	$f + abp : mn$
Residuum fortis initio temporis $c$	-	-	-	$a - f$
Hinc usura per tempus $c$	-	-	-	$(acp - fcp) : mn$
Summa	-	-	-	$a - f + (acp - fcp) : mn$
Elapso tempore $c$ solvit Debitor	-	-	-	$g + (acp - fcp) : mn$
Residuum fortis initio temporis $d$ ,	-	-	-	$a - f - g$
Hinc usura per tempus $d$	-	-	-	$(adp - fdp - gdp) : mn$
Summa	-	-	-	$a - f - g + (adp - fdp - gdp) : mn$
Finito tempore $d$ solvit Debitor	-	-	-	$h + (adp - fdp - gdp) : mn$
Residuum debiti sub finem temporis $d$ , in die præsenti rationum	-	-	-	$a - f - g - h$

Debitor rationes suas sic disponit:

### Tabula Debiti.

Sors debita	-	-	-	-	-	-	-	-	$a$
Hinc usura per tempus $b + c + d$ ,	-	-	-	-	-	-	-	-	$(abp + acp + adp) : mn$
Summa debiti ad diem rationum	-	-	-	-	-	-	-	-	$a + (abp + acp + adp) : mn$

### Tabula Soluti.

Exa $\dot{c}$ to tempore $b$ solvi Creditori	-	-	-	-	-	-	-	-	$f + abp : mn$
Hinc usura per tempus $c + d$ ad diem usque rationum	-	-	-	-	-	-	-	-	$(fcp + fdp) : mn + (abcpp + abdpp) : mnnn$
Finito tempore $c$ solvi iterum	-	-	-	-	-	-	-	-	$g + (acp - fcp) : mn$
Hinc usura per tempus $d$ ad diem præsentem	-	-	-	-	-	-	-	-	$gdp : mn + (acdpp - fcdpp) : mnnn$

Hoc

Hoc ipso die rationum solvo denuo -  $b + (adp - fdp - gdp) : mn$  No. XL.

Summa soluti

$$f + g + b + (abp + acp + adp) : mn + (abcpp + abdpp + acdpp - fcdpp) : mmm$$

Hæc si subtrahatur a summa debiti, remanet pro residuo debiti in diem præsentem,  $a - f - g - b - (abcpp + abdpp + acdpp - fcdpp) : mmm$

Hoc residuum, cum a Creditoris residuo  $a - f - g - b$ , differat, illoque minus

fit, tota quantitate  $(abcpp + abdpp + acdpp - fcdpp) : mmm$

Quæritur uter recte?

Respondetur facile: Creditoris rationes probas & genuinas, Debitoris vero erroneas esse, & in eo fallere, quod totum hoc, quod quavis vice solvit, in sortem computet; cum ab illo prius detrahendum fuisset, quod ad eum usque diem usuræ nomine deberet.

Hinc fit, ut quantitas illa  $(abcpp + abdpp + acdpp - fcdpp) : mmm$ , qua ambæ rationes differunt, præcisè exprimat usuram, quam usura Creditori persoluta, ut fors spectata, a die solutionis ad diem usque rationum, parere posset; adeoque dum hanc sibi remitti vult Debitor, usuræ usuram poscere censendus est; quod regulariter in legibus prohibitum esse constat. Sed levia hæc sunt, nec monuissim, nisi viderem ejusmodi supputandi modum, qui in fraudem Creditorum vergit, Mercatoribus, ob commodiorem calculum, admodum solemnem esse.

Alterius naturæ hoc Problema est: Quæritur, si Creditor aliquis pecuniæ summam fœnori exponat, ea lege, ut singulis momentis pars proportionalis usuræ annuæ sorti annumeretur; quantum ipsi finito anno debeatur? Resp. Si fors vocetur  $a$ , usura annua  $b$ , Creditori elapso anno debebitur  $a + b + \frac{bb}{2a} + \frac{b^3}{2.3aa}$

$$+ \frac{b^4}{2.3.4a^3} + \frac{b^5}{2.3.4.5a^4}, \text{ \&c. in infinitum; quæ summa major est, quam } a + b + bb : 2a, \text{ ut patet: sed minor quam } a + b + \frac{bb}{2a} + \frac{bb^2}{2a(2a-b)},$$

Iii 2

No. XL.  $bb:(2a-b)$ , quoniam  $bb:(2a-b)$  est summa progressionis geometricæ  $\frac{bb}{2a} + \frac{b^3}{2.2a^2} + \frac{b^4}{2.2.2a^3} + \&c.$  quæ nostra serie  $\frac{bb}{2a} + \frac{b^3}{2.3a^2} + \frac{b^4}{2.3.4a^3} + \&c.$  major [est. Idcirco, si usura sit subvige-  
cupla fortis, seu  $a=20$ , &  $b=1$ , debetur, post annum, plus quam  $21\frac{1}{45}$ , & minus quam  $21\frac{1}{39}$ : si  $a=b$ , debetur plus quam  $2\frac{1}{2}a$ , & minus quam  $3a$ . Observo etiam, præsentem se-  
riem in re geometrica suum usum habere: nam si ad axem cur-  
væ Logarithmicæ duæ rectæ applicentur, quarum minor dicatur  
 $a$ , sitque portio axis inter utramque applicatam ad portionem  
eiusdem inter applicatam quamcunque & respectivam tangentem,  
in constanti ratione  $b$  ad  $a$ : exprimetur major applicatarum per  
eandem hanc seriem  $a+b+\frac{bb}{2a}+\frac{b^3}{2.3a^2}+\&c.$  \*

Porro Seriei hujus infinitæ occasione recordor Problematis il-  
lius de sorte Aleatorum, quod in *Ephemeridibus Gallicis*, A. 1685.  
Artic. 25. proposui hunc in modum: Duo Aleatores A & B lu-  
dunt una tessera; ea conditione, ut qui primus assignatum in illa  
punctorum numerum jecerit, vincat: A primo instituit unum ja-  
ctum, & B unum, dein A duos jactus consequenter, & B duos:  
hinc A tres, & B tres &c. Vel, A instituit unum jactum, dein  
B duos, hinc A tres, postea B quatuor &c. quousque alteruter  
eorum vincat. Quæritur ratio sortium? Hoc Problema cum  
frustra hætenus expectaverit solutionem, eandem, per series infi-  
nitas, sic exhibeo: Sors Collusoris A ad sortem Collusoris B, in  
priori casu, se habet, ut  $1+(\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^6+(\frac{1}{2})^{12}+(\frac{1}{2})^{20}+\&c.$   
 $-\frac{1}{2}-(\frac{1}{2})^4-(\frac{1}{2})^8-(\frac{1}{2})^{16}+\&c.$  in posteriori, ut  $1+(\frac{1}{2})^3+(\frac{1}{2})^{10}+(\frac{1}{2})^{21}+(\frac{1}{2})^{36}+\&c.$   
 $-\frac{1}{2}-(\frac{1}{2})^6-(\frac{1}{2})^{15}-(\frac{1}{2})^{28}+\&c.$  ad unitatis complementum. Harum serierum termini repræsen-  
tant totidem potestates fractionis  $\frac{1}{2}$ , quarum indices crescunt,  
disse-

\* Vide Num. CI. Schol. Prop. 59.

differentiis servantibus inter se progressionem arithmeticam, cu. No. XL: jus communis excessus ibi est binarius, hic quaternarius. \*

\* Vide Artis Conjectandi Part. I. Append. Probl. 1. pag. 49 - 57.



N°. X L I.

# SPECIMEN

## CALCULI DIFFERENTIALIS

In dimensione Parabolæ helicoidis,

*Ubi de flexuris curvarum in genere, earundem evolutionibus, aliisque.*

Per J A C. B E R N O U L L I.

**C**Um ex *Actis* nuperis conjecerim, Celeb. Dn. L. \* Ana- *AA Erud.*  
lysin Problematis a se propositi, calculo suo differentiali *Lips. 1691.*  
institutam, minime displicuisse; credidi nec ægre latu- *Jan. p. 13.*  
rum sequens illius specimen, quod in gratiam Lectorum nostro-  
rum, quibus calculum hunc agitare volupe fuerit, in lucem  
emitto: ut, si forte mentem Viri acutissimi, ex iis quæ in *Actis*  
1684. de Invento isthoc suo edidit, ob summam brevitatem, non  
satis assecuti sint; vel hinc ejus applicandi methodum discere  
possint. Quanquam ut verum fatear, qui calculum *Barrowianum*,  
(quem decennio ante in Lectionibus suis Geometricis † adumbra-

Iii 3

vit

\* L E I B N I T I O.

† Lectiones Opticæ & Geometricæ, *Auctore* Is. BARROW. Lond.  
1674 4º.

N. XLI. vit Auctor, cujusque specimina sunt tota illa propositionum inibi contentarum farrago) intellexerit, alterum a Dn. L. inventum ignorare vix poterit; ut pote qui in priori illo fundatus est, & nisi forte in differentialium notatione, & operationis aliquo compendio, ab eo non differt.

Fig. 1. Cum axis vulgaris Parabolæ curvatur in peripheriam circuli BDM, curva BFGNA, quæ per extremitates applicatarum CF, DG, in centrum circuli A vergentium transit, dicitur nobis *Parabola helicoides*, vel si mavis, *Spiralis parabolica*; cujus propositum sit investigare tangentem LH, spatium curva comprehensum, curvæ longitudinem, & flexuram, &c. Esto hunc in finem  $AB=r$ ,  $BDMB=c$ , Arcus  $BC=x$ ,  $CF=y$ ; & ducantur CL, AH, perpendiculares ipsi AC, sitque CD particula circumferentiæ infinite parva, cui sit similis & concentricus arcus GE. Natura curvæ,  $lx=yy$ , adeoque  $ldx=2ydy$ , &  $dy:dx=l:2y$ .

### I. Tangens.

$$AD : AG = DC : GE$$

$$r : r-y = dx : \frac{r-y}{r} dx$$

$$FE : GE = FA : AH = FC : CL$$

$$dy : \frac{r-y}{r} dx = r-y : \frac{(r-y)^2 dx}{r dy} = y : \frac{(ry-yy) dx}{r dy}$$

Ut generalis expressionis fiat specialis applicatio ad curvam propositam; ponantur loco  $dy$  &  $dx$ , ipsorum proportionalia  $l$  &  $2y$  fietque  $AH = (2y^3 - 4ryy + 2rry) : lr =$  (substituto  $lx$  pro  $yy$ )  $2xy : r - 4x + 2ry : l$ , &  $CL = (2ryy - 2y^3) : lr = 2x - 2xy : r$

Maxima AH [aut CL] reperitur, si ejus differentiale, puta  $(6yydy - 4rydy + 2rrdy) : lr$ , [aut  $(4rydy - 6yydy) : lr$ ,] æquetur nihilo: unde habetur  $y = \frac{1}{2}r$  [aut  $\frac{3}{2}r$ ,] ipsaque proin, tum AH, tum CL maxima  $= 8rr : 27l$ .

COROLL.

COROLL. Si ponatur latus rectum  $l = rr : c$ ; scilicet, ut N.XLL circumferentiæ integræ respondens applicata sit ipse radius (\*), ut in præsentî schemate, erit AH vel CL maxima  $= \frac{1}{2}c$ .

Maximus angulus tangentis & applicata AFH, seu CFL invenitur ponendo rationem CL : CF seu  $(2ry - 2yy) : lr =$  maximæ, hoc est, ejus differentiale  $(2r dy - 4y dy) : lr = 0$ ; unde resultat  $y = \frac{1}{2}r$  ac proinde CL : CF  $= r : 2l$ . Speciatim vero in hypothesi  $l = rr : c$ , exit  $x = [yy : l = cy : rr =] \frac{1}{4}c$ , & CL : CF  $= c : 2r$ .

COROLL. Si in puncto I, ubi curva radium AM interfecat, ipsam tangat recta IK secans diametrum productam BAK in K; erit AK æqualis quartæ parti peripheriæ circuli. (†)

## II. Spatium.

$(DC + GE) \times \frac{1}{2} DG = CDGE$ , hoc est,  $\frac{2r dx - y dx}{r} \times \frac{1}{2} y = \frac{2ry dx - yy dx}{2r} = [\text{substituto } \frac{2y dy}{l} \text{ pro } dx] 2yy dy : l - y^3 dy : lr$ ; cujus igitur integrale  $2y^3 : 3l - y^4 : 4lr$ , seu  $\frac{2}{3}xy - lxx : 4r$  æquatur spatîo curvilineo BFGDCB: quocirca, posito  $y = r$ , fiet spatium totum BANGFBCDMB  $= \frac{1}{3}r^3 : 12l$ , hoc est (in casu  $l = rr : c$ )  $\frac{1}{12}rc$ ; cumque circulus integer BDMB sit  $\frac{1}{12}rc$  seu  $\frac{1}{12}rc$ ; erit dictum spatium ad circulum, ut quinque ad sex; ideoque spatium reliquum BANGBA sexta pars circuli.

## III. Longitudo Curvæ.

$$FGq = FEq + EGq = dy^2 + (rr - 2ry = yy) dx^2 : rr = [\text{substituto}]$$

(\*) Nam in æquatione  $yy = yy = rx : c = \frac{1}{2}rr$ , &  $y = \frac{1}{2}r$ ,  $lx = rr x : c$ ; quando  $x = c$ ,  $y$  AH  $= 2xy : r = 4x + 2ry : l = \frac{1}{2}cr : r = c + rr : l = \frac{1}{2}c$  fit  $= r$ .

(†) In eadem scilicet hypothesi  $c + c = \frac{1}{2}c$ .  
 $l = rr : c$ . Tunc enim  $x = \frac{1}{4}c$ ;

N.XLI. stituto  $2ydy : l$  loco  $dx$ ]  $(rrll + 4rryy - 8ry^3 + 4y^4) dy^3 : rrll$ .  
 Hinc  $FG = dy \sqrt{(rrll + 4rryy - 8ry^3 + 4y^4)} : rl$ ; cujus quantitat-  
 tatis integrale, si dari posset, exhiberet longitudinem curvæ BFG;  
 quæ tamen utcumque sic cognoscetur: Diametro AB describatur  
 semicirculus AT $\chi$ B & abscindatur Aa = l: hinc ductis per-  
 pendicularibus indefinitis quibuscumque WV, ZY, æquidistantibus  
 ab A & B, & secantibus peripheriam semicirculi in T &  $\chi$ , a-  
 gatur recta  $\chi$ TS, & juncta Sa, sumtaque AK = AS, fiat KR  
 parallela ipsi aS, & ducatur in centrum semicirculi recta Rb, cui  
 abscindantur æquales WV, ZY, eruntque puncta V, Y, ad cur-  
 vam quandam  $\gamma$ VY $\delta$ , quæ ejus est naturæ ut abscissa BZ = DG,  
 spatium BZY $\delta$ B, applicatum ad Ab =  $\frac{1}{2}$  AB exhibeat rectam  
 curvæ BFG æqualem.

DEMONST. AK = AS = WT = Z $\chi$  =  $\sqrt{BZA} = \sqrt{(y \times (r - y))} = \sqrt{(ry - yy)}$  & Aa [l]: AS [ $\sqrt{(ry - yy)}$ ] =  
 AK [ $\sqrt{(ry - yy)}$ ]: AR =  $\frac{ry - yy}{l}$ ; quare ZY (= WV =  
 Rb =  $\sqrt{(Abq + ARq)} = \sqrt{(\frac{1}{2}rrll + rryy - 2ry^3 + y^4)} : l$ ;  
 unde portio spatii ZY $\delta$ B, latitudinis  $dy = dy \sqrt{(rrll + 4rryy - 8ry^3 + 4y^4)} : 2l$ , quæ applicata ad Ab =  $\frac{1}{2}r$  exhibet  $dy \sqrt{(rrll + 4rryy - 8ry^3 + 4y^4)} : rl = FG$ ; & proin, componendo,  
 totum spatium ZY $\delta$ B ad  $\frac{1}{2}r$  applicatum = portioni curvæ BFG.  
 Q. E. D.

COROLL. Sumtis BZ, AW æqualibus, si centro A, radiis AZ, Ab, AW, describantur arcus secantes curvam in G, I, & N, [Nota mediam intersectionem I, in casu præsentis Schematis, incidere in radium AM] portiones curvæ BG & AN, GI & NI, nec non BGI & ANI inter se æquantur: unde patet quod, in curvis etiam illis quæ rectificationem nondum acceperunt, nonnunquam partes æquales dissimilares assignari possunt.

Id cum Fratrem monuissem, in his quoque non leviter ver-  
 satum, protinus animadvertit ille, posse cuilibet fere Spirali, æ-  
 quatione algebraica expressæ, aliam curvam geometricam æqua-  
 lem assignari: Descriptis enim centro A, intervallo AF & AG  
 arcu-



arcubus  $F\rho$ ,  $G\pi$ , si concipiatur curva  $M\psi$  talis, ut applicatarum N.XLI.  $\rho x$ ,  $\varpi\psi$  differentia  $\nu\psi$  æquetur arcui EG; erit propter  $\nu x = \varpi\rho = EF$ , &  $\nu\psi = EG$ , & angulos  $\psi\nu x$ ,  $FEG$ , utrinque re-  
ctos, etiam  $\psi x = FG$ , & proinde *componendo*, tota portio cur-  
væ  $M\psi =$  toti portioni Spiralis BG. Ad inveniendam autem  
naturam curvæ  $M\psi$ , substituendus tantum in quantitate  $(r - y)$   
 $dx : r$ , [quæ semper exprimit ipsam EG, vel  $\nu\psi$ ] valor ipsius  
 $dx$ , qui in nostra curva est  $2ydy : l$ , ut habeatur  $2ydy : l =$   
 $2ydy : lr$ , cujus integrale  $yy : l = 2y^3 : 3lr$  denotat longitudi-  
nem applicatæ  $\varpi\psi$ , quæ si vocetur  $z$ , habebitur æquatio inter  
 $z$  &  $yy : l = 2y^3 : 3lr$ . seu  $3rlz + 2y^3 - 3ryy = 0$ , quæ rela-  
tionem exprimit inter abscissam  $M\pi(y)$  & applicatam  $\pi\psi(z)$ .

In genere vero Spiralis Parabolica gradus cujusvis, hac ratio-  
ne commutatur in aliam Paraboloidem geometricam uno gradu  
altiolem (\*). Sed & hoc observavimus, quod si curva ANIGK  
sit Spiralis *Archimædaea*, & describatur centro A ad axem AK  
communis Parabola  $A\mu$ , cujus parameter sit quarta proportiona-  
lis ad peripheriam, diametrum, & radium circuli BDM; erunt,  
(quod memoratu dignum est) & curvæ, & illis comprehensa  
spatia æqualia: nimirum sumpto in recta AM quovis puncto  $\lambda$ ,  
si ad illud applicetur recta  $\lambda\mu$ , secans parabolam in  $\mu$ , & ducatur  
arcus  $\lambda N$  concentricus peripheriæ circuli BM, secans helicem in  
N, æquabitur perpetuo portio helicis AN portioni curvæ para-  
bolicæ  $A\mu$ ; & spatium AN, recta AN & spirali comprehensum,  
spatio parabolico  $A\lambda\mu$  A (\*). Quam miram Parabolæ & Spira-  
lis convenientiam, post modum, apud WALLISIUM deprehen-  
dimus, qui de ejus detectione HOBBIUM & ROBERVALLIUM

*Jac. Bernoulli Opera.*

K k k

inter

(\*) Sit enim Spiralis Parabolicæ  
æquatio  $x = y^n : l$ , erit  $dx = ny^{n-1}$   
 $dy : l$ , quo substituto in  $(r - y) dx : r$ ,  
fit  $ny^{n-1} dy : l = ny^n dy : lr$ , cu-  
jus integrale est  $y^n : l = ny^{n+1} : (n+1)lr$ . Ergo  $z = ((n+1)$

$ry^n - ny^{n+1}) : (n+1)lr$ , quæ  
est æquatio ad Paraboloidem geo-  
metricam gradus  $n+1$ .

(\*) Id demonstrare, calculum  
infinitesimalem intelligenti nihil ha-  
bet difficultatis.

N. XLI. inter se disceptasse refert ; quasi non possint plures & tempore & loco dissidentes in idem inventum suapte ingenio incidere.

# IV. Flexura.

Quod curva in partes contrarias flecti debeat, evidens est: quia enim peripheria BC, a vertice B aliquousque, a linea recta sensibilibiter non differt; sequitur, ex natura Parabolæ, curvam in partibus vertici proximis versus circumferentiam, in reliquis vero, ob curvaturam BC, versus centrum cavam esse debere.

Si G sit punctum flexus contrarii; erit AO segmentum radii, centro & tangenti interjectum Minimum (M.) Producat GE in P, & ducatur PQ parallela ipsi EF; sitque secans arcus BD = s,

& tangens t; Sic erit  $r : r - y [AG] = t : \frac{t}{r} (r - y) [GP]$

$= s : \frac{s}{r} (r - y) [AP]$  Deinde GE  $[(r - y) dx : r] : EF [dy]$

$= PG [\frac{t}{r} (r - y)] : PQ [t dy : dx]$  Denique AF  $[r - y] :$

$PQ [t dy : dx] = AO [M] : PO$  seu  $AO - AP [M - \frac{s}{r} (r - y)];$

unde obtinebitur  $M = (rrs dx - 2rsy dx + syy dx) : (rrdx - rydx - rtdy)$ , positoque  $ldx : 2y$  loco  $dy$ , & facta divisione per  $dx$ ,  $M = (2rrsy - 4rsyy + 2sy^3) : (2rry - 2ryy - rlt)$ ; hujus igitur differentiale debet esse = 0: at fractionis differentiale tum est = 0, cum termini ejus ducti in alterna differentialia æquantur: [etenim fractionis  $y : z$  differentiale est  $(\pm z dy \mp y dz) : zz$ , unde si sit = 0, erit &  $\pm z dy \mp y dz = 0$ , hoc est,  $z dy = y dz$ ;] qua duce regula, pervenitur ad æquationem 16 membrorum (\*); ad quam reducendam notanda sunt sequentia: Differentiale arcus ad differentiale tangents & secantis rationem habet

$$\begin{aligned} (*) (4rsy^4 - 8rrsy^3 + 4r^3syy + & - 4r^4y^4 - 4rrlyyy + 2r^3lyyy) ds - \\ 6rlt syy - 8rrlyy + 2r^3lys) dy + & (2rly^4 - 4rrlyyy + 2r^3lyy) ds \\ (4ry^5 - 12rry^4 + 12r^3y^3 + 2rly^3 & = 0. \end{aligned}$$

habet cognitam; puta ad differentiale tangentis, quam quadra. No. XLII.  
 tum radii ad quadratum secantis; & ad differentiale secantis,  
 quam quadratum radii ad rectangulum sub tangente & secante.  
 Nam in quadrante ABD,  $dx:dt = DC:EF = DC:GE + \text{Fig. 2.}$   
 $GE:EF = AD[AB]:AG + AB:AF = ABq[rr]:AFq$   
 $[ss];$  quare  $dt = ssdx:rr = [\text{in præsente curva}] 2ssdy:lrr.$   
 Iterum  $dx:ds = DC:GF = DC:GE + GE:GF = AD$   
 $[AB]:AG + AB:BF = ABq[rr]:AFB[st]$  quare  $ds =$   
 $ssdx:rr = 2ssdy:lrr;$  quibus valoribus pro  $ds$  &  $dt$  in æqua-  
 tione substitutis, ut &  $ss - rr$  loco  $st$ , prodibit alia (\*) quæ  
 dividi poterit per  $stdy$ , sic ut literæ  $s$ ,  $t$ , &  $dy$  prorsus evanes-  
 cant, remanente sola incognita  $y$ , fiatque æquatio talis,  $y^6 -$   
 $3ry^5 + 3rry^4 - r^3y^3 + \frac{3}{4}rrlly - r^3lly + \frac{1}{4}r^4ll = 0$ , quæ facta  
 ulterius divisione per  $y - r$ , reducitur ad hanc,  $y^5 - 2ry^4 +$   
 $rry^3 + \frac{3}{4}rrlly - \frac{1}{4}r^3ll = 0$ , cujus æquationis radix punctum fle-  
 xus contrarii prodit; quod quidem, in casu  $l = rr:c$ , quam  
 proxime habetur, ducendo radium AC, sic ut applicata CF sit  
 $\frac{1}{8}r$ , vel arcus BC  $= \frac{1}{16}c = 10$  gr. (\*)

Hæc Methodus, pro curvarum flexuris inveniendis, cum ad-  
 modum prolixa & minus naturalis mihi videretur, ex eo quod  
 litteras superfluas & in æquatione evanescentes adhibet; ansam  
 nobis præbuit eandem, alia brevior & faciliore via, investigan-  
 di; hoc modo: Flexum contrarium in eo curvæ loco concipio,  
 ubi duæ particulæ contiguæ infinite parvæ in directum jacere in-  
 telliguntur, ut sunt FG, FI; reliquis ad unam partem sursum, Fig. 3.  
 ad alteram deorsum flexis. Sequitur hinc 1°, quod in curvis,  
 quarum axis rectus est & applicatæ parallelæ, anguli acuti EGF,  
 MFI, seu DGL, CFL inter se æquales sunt, & eorum, quos  
 applicatæ cum curva hinc inde constituunt, maximi vel minimi,

Kkk 2

prout

$$\begin{aligned}
 (*) \quad & (8rsty^6 - 24rrsty^5 + 24r^3sty^4 - 8r^4sty^3 + 6r^3llsty^2 - 8r^4llsty + 2r^3llst) dy = 0. \\
 & y \text{ scribas } \frac{1}{6}r, \text{ \& } rr:c = \frac{7}{44}r \text{ pro} \\
 & l, \text{ æquationis membrum prius efficit}
 \end{aligned}$$

$$(*) \text{ Nam, si, in æquatione, pro tantum } \frac{1}{400}r.$$

No. XLI. prout curvæ portio, quæ ad partes horum angulorum est, intra, vel extra eisdem cadit; unde & ratio  $DG:DL [y:t]$  minima vel maxima; adeoque per supra ostensa  $ydt = tdy$ ; sed cum etiam sit ubique  $t dy = y dx$  ut constat (\*), crit  $dt = dx$ , differentiale scilicet portionis axis inter applicatam & tangentem æquale differentiali abscissæ: quod & sic liquet: Quia GF, FI, jacent in directum, tangentes GL, FL secabunt axem in eodem puncto L, & proinde differentiale abscissæ DC ipsarum quoque DL, CL, differentia est. Aliud Theorema in *Actis* dedit Celeb. calculi Auctor: nempe cum Triangula EGF, MFI, ob angulos EGF, MFI æquales, sint similia; sequitur, si EF, MI, hoc est, ipsa  $dx$  sint æqualia, futura quoque æqualia EG, MF, seu  $dy$ ; adeoque  $ddy = 0$ .

Fig. 4. 2°. In curvis, quarum applicatæ tendunt in commune punctum A, angulus  $EGF = GAF + GFA = DAC + CFL$ : unde cum CL sit Tangens anguli CFL ad radium CF, & DH Tangens anguli EGF, vel DGH ad radium DG; crit differentia rectarum CL, DH, æqualis differentiæ Tangentium duorum angulorum, qui differunt angulo DAC, & quarum una est ad radium CF, altera ad radium DG: Nam quamquam differentia radiorum EG, ratione totius radii vel tangentis, evanescat; non tamen negligenda est, si cum ipsorum differentiis comparatur. Esto  $AC = r$ ,  $DC = dx$ ,  $CF = y$ ,  $CL = t$ : adeoque  $FL = \sqrt{(yy + tt)}$ ; fiatque  $AC[r]:DC[dx] = CF[y]:\frac{y dx}{r} =$  arcui, qui est mensura anguli DAC in radio CF: hic per §. 4, ad differentiam Tangentium est in ratione duplicata radii ad secantem: quare  $FCq[yy]:FLq[yy + tt] =$  Arcus inventus  $\frac{y dx}{r}:\frac{yy dx + tt dx}{ry} =$  differentiæ duarum Tangentium, quarum utraque est ad radium CF, cui si addatur  $EF = (r - y) dx:r$  (utpote

(\*) Ex Triangulorem GEF, GDL similitudine, est  $GE[dy]:EF[dx] = GD[y]:DL[t]$ .

( utpote , quæ est ad EG , sicut DH ad DG , seu CL ad CF , N.XLI. tangens ad radium ) erit aggregatum  $(rydx + ttdx) : ry$  , seu  $dx + ttdx : ry$  differentia duarum Tangentium , quarum altera convenit radio CF , altera radio DG , hoc est , differentia rectarum CL , DH [  $t$  ] : ac idcirco  $dt = dx + ttdx : ry$ .

Idem clarius ostenditur , descripto super C , radio CL , arcu LK : Nam angul. ACL + LCK = AMH = ADM + DAC = ACL + DAC , & propterea angul. LCK = DAC : ( Nota , CM hic negligi , punctaque C & M pro coincidentibus haberi : eo quod ipsa CM differentialibus DC , LK , EG , ut ut infinite exiguis , infinites minor existit , ) unde AC [  $r$  ] : CD [  $dx$  ] = CL [  $t$  ] : LK =  $tdx : r$  ; iterumque GD [  $y$  ] : DH [  $t$  ] = LK [  $tdx : r$  ] : KH =  $ttdx : ry$  ; quocirca  $dt = [ DH - CL = DH - CK = DC + KH = ] dx + ttdx : ry$ .

COROLL. Si sit  $r =$  infinito , hoc est , CA , DA , parallelæ , evanescet  $ttdx : ry$  , eritque  $dt = dx$  , ut supra.

Frater meus , loco rationis GD : DH , vel GA : AP , assumit GE : EF , vocando AF =  $y$  , AP =  $t$  , & EF =  $dz$  , & sic invenit  $dt = dz^3 : dy^2$  , <sup>(1)</sup> quæ Theoremata , ob universalitatem suam , merentur observari.

*Applicatio specialis ad Parabolam helicoiden.*

Quoniam CL [  $t$  ] supra reperta fuit  $(2ryy - 2y^3) : lr$  , erit Fig. 4  $dt = (4rydy - 6yydy) : lr$  ; cumque sit  $dx = 2ydy : l$  , erit , substitutis valoribus  $tt$  ,  $dt$  , &  $dx$  , factaque divisione per  $dy$  , & reducta æquatione ,  $y^5 - 2ry^4 + rry^3 \&c. = 0$  , ut prius.

V. Summum curvæ punctum

supra radium BA , invenitur faciendo nuper inventam AO =

$$\frac{Kkk}{3} \quad (2rry)$$

$$\begin{aligned} (1) \text{ Scil. } GE [dy] : EF [dz] &= EF [dz] : QN \left[ \frac{dz^2}{dy} \right] = QN \\ &= AG [y] : AP [t] = \frac{ydz}{dy} \left[ \frac{dz^2}{dy} \right] : QP [dt] = \frac{dz^3}{dy^2} \end{aligned}$$

N. XLI.  $2rrsy - 4ryy + 2sy' : (2rry - 2ryy - rlt)$  infinitam, hoc est ponendo  $2rry - 2ryy - rlt = 0$ , seu [loco  $y$  substituendo  $\sqrt{lx}$ ]  $2r\sqrt{lx} - 2lx - lt = 0$ , aut [in casu  $l = rr : c$ ]  $2\sqrt{cx} - 2x = t$ ; quæ æquatio geometricè resolvi nequit, ob ignoratam rationem  $x$  ad  $t$ , arcus ad tangentem. Mechanice prope verum invenitur, numerando a B versus M,  $72^\circ$ . 12. Obiter noto, hinc etiam ostendi posse, quadraturam circuli indefinitam, & in genere rectificationem ullius curvæ geometricæ in se redeuntis impossibilem esse. Hæc enim si possibilis esset, dari posset relatio inter curvam & applicatam, vel abscissam; cumque & harum relatio, tum inter se, tum ad tangentem data ponatur, data quoque foret ipsius curvæ ad tangentem ratio; quare si æquatio quæ relationem hanc exprimit, cum ista  $2\sqrt{cx} - 2x = t$ , juxta notas Analyseos leges debite conferretur ad eliminandam alterutram indeterminatarum  $x$  vel  $t$ ; prodiret alia æquatio certi & definiti gradus; cujus radices, quarum nunquam plures esse possunt quam æquatio dimensiones habet, determinarent omnia curvæ nostræ suprema puncta: sed hoc fieri nequit, quoniam spiralis ista, si continuetur, infinitis gyris circa radium AB circumvolvitur, in quibus singulis aliquod punctum supremum existit, quorumque adeo punctorum numerus infinitus est.

### *De Curvarum evolutionibus.*

Fig. 5. Si DC curva sit peripheria circuli, coibunt quæ ipsi normaliter applicantur DA, CA, KA &c. in communi puncto A; eruntque singulæ æquales eidem constanti rectæ: at si DC sit quæcunque alia curva, erunt dictæ perpendiculares indeterminatæ, & interfecabunt sese in totidem diversis punctis AVXI, quæ juncta novam curvam efficiunt, cujus natura nunc indaganda est. Inveniendâ vero primo longitudo indeterminatæ CA, ita: Estò curva proposita RCD, cujus axis RB; abscissæ RN, RM; applicatæ NC, MD; tangens DCT; sitque  $RN = m$ ,  $CN = p$ ,  $NT = q$ , unde porro  $TN [q] : NC [p] = NC [p] : NP$   
aut



aut  $MO [pp : q] = SD [dp] : SQ [pdp : q]$ . Ergo  $QS [pdp : q]$  N. XLI  
 $+ SC [dm] = QC [(pdp + qdm) : q]$  &  $OP = MN + OM$   
 $- PN = dm + \text{diff. } (pp : q) = dm + (\pm 2pqdp \mp ppdq) : qq$   
 $= (qqdm \pm 2pqdp \mp ppdq) : qq$ . Est denique  $QC - OP$   
 $[(ppdq - pqdp) : qq] : QC [(pdp + qdm) : q] = CA - PA$   
 aut  $CP$  aut  $\sqrt{(CNq + PNq)} [\sqrt{(ppqq + p^2) : q}] : CA$   
 $[(pdp + qdm) \sqrt{(qq + pp) : (pdq - qdp)}]$ .

*Applicatio ad Parabolam.*

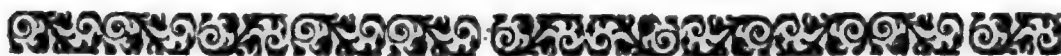
Sit RCD Parabola, cujus latus rectum  $l$ , adeo ut sit  $lm = pp$ ,  
 erit  $ldm = 2pdp$ , &  $dm = 2pdp : l$ , &  $q = 2m$ : quibus substi-  
 tutis, invenitur  $CA = (ll + 4pp) \sqrt{(ll + 4pp) : 2ll}$ , hoc est,  
 quia  $PN = \frac{1}{2}l$  &  $PC = \sqrt{(\frac{1}{4}ll + pp)}$ , erit  $CA = PCc : NPq$ ,  
 sive quarta proportionalis ad  $PN$  &  $PC$ .

Ad inveniendam naturam curvæ AVX, quam formant inter-  
 sectiones perpendicularium DA, CA, ratione axis RB, abscinda-  
 tur  $RH = \frac{1}{2}l = PN$ , & dicatur HB,  $y$ , & BA,  $z$ ; critque  
 $AB + NC [z + p] : AC [(ll + 4pp) \sqrt{(ll + 4pp) : 2ll}] =$   
 $NC [p] : CP [\sqrt{(\frac{1}{4}ll + pp)}]$  & invenitur  $llz : 2 = 2p^3$ . Iterum  
 $NC [p] : AB [z] = PN [\frac{1}{2}l] : PP [lz : 2p]$ ; Sed  $y = HB$   
 $= PB + BH = PB + NR = lz : 2p + pp : l$  seu  $2p^3 [ = llz : 2 ]$   
 $= 2ply - llz$ ; hoc est,  $3lz : 4y = p$  &  $4p^3 = [llz =]$   
 $27l^3z^3 : 16y^3$ , hoc est  $16y^3 = 27lz$ .

Præterea quia AD, AC sunt perpendiculares curvæ DC, &  
 particula DC infinite parva, erit  $AD = AC = AV + VC$ ; sed  
 propter eandem rationem  $VC = VX + XK$ , &  $XK = XI$   
 $+ \&c$ : quare  $AD = AV + VX + Xi$ , &c: = curvæ AIH  
 $+ HR$ : cumque curva AIH nascatur ex intersectionibus mini-  
 me distantium DA, CV, KX; sequitur illam ibidem ab iisdem  
 tangi, & propterea curvam RKD esse eam ipsam, quæ descri-  
 bitur ex evolutione ipsius HIA. Unde, uno quasi oculi ictu,  
 manifesta sunt ea omnia, quæ de Evolutis publicarunt HUGE-  
 NIUS, aliique: Aditus etiam patet ad præclara *επιήματα* Cele-  
 berri-



N. XLI. berrimorum Virorum TSCHIRNHAUSII & LEIBNITII, quæ circa curvas per intersectiones radiorum reflexorum formatas in *Actis* ediderunt.



Nº. XLII.

# SPECIMEN ALTERUM CALCULI DIFFERENTIALIS

*In dimetienda Spirali Logarithmica, Loxodromiis Nautarum, & Areis Triangulorum Sphæricorum; una cum Additamento quodam ad Problema Funicularium, aliisque.*

Per JAC. BERNOULLI.

## I. DE SPIRALI LOGARITHMICA.

*Acta Erud.  
Lips. 1691.  
Jun. p. 282,  
fig. 1.*

**S**I in plano circuli BCH jaceat curva BDEIPC, quam secant, eodem angulo obliquo, radii CB, CL &c. ex centro circuli C educti, dicetur Curva hæc *Spiralis Logarithmica*; quoniam sumptis arcubus LM, MN &c. infinite parvis & æqualibus, hoc est, ipsis BL, BM, BN, arithmetice proportionalibus, radii DC, EC, IC, sunt geometrice proportionales, ob triangula similia DCE, ECI, &c. Spiralis isthæc jam WALLISIO, & BARROWIO considerari cœpta est; nec actum agerem,

agerem; nisi affinitas illi intercederet cum Loxodromiis; seu No. XLII. Rumbis Nautarum, quibus dimetiendis nunc occupabimur: Ipsamet enim esset vera Loxodromica, si Terra plana foret.

### 1°. Longitudo Curvæ.

Centro C describantur arcus EF, IG, PQ, & ducantur rectæ CH, CS, & QR perpendiculares ipsis CB, CD, quæ secant tangentes curvæ BH, DS, in H, S, R. Sic erunt triangu-  
la DFE, EGI, similia, ob angulos FDE, GEI, ex hypo-  
thesi, æquales, & DFE, EGI rectos; quare  $CD : DS = FD : DE$   
 $= GE : EI = FD + GE : DE + EI$ , &c; hoc est,  $= DC :$   
 $DIP C$ . Quare  $DS = DIP C$ . Eadem opera ostenditur  $DR$   
 $= DIP$ , adeoque &  $RS = PC$ .

COROLLARIUM. Quia Spiralis hæc infinitis gyris circa cen-  
trum C convolvitur; patet, curvæ alicui interminatæ posse rectam  
finitam æqualem dari.

### 2°. Spatium.

Positis  $CB = r$ ,  $CH = t$ ,  $BM = x$ ,  $CE = y$ , erit  $CM [r] :$   
 $LM [dx] = CE [y] : EF [y dx : r]$ . Hinc triang. ECF  $= EF$   
in  $\frac{1}{2} EC = y dx : r$  in  $\frac{1}{2} y = yy dx : 2r$ . Sed  $DF [dy] : FE$   
 $[y dx : r] = BC [r] : CH [t]$ . Unde  $y dx = t dy$ , adeoque  
triang. ECF  $[yy dx : 2r] = t y dy : 2r$ , & hujus integrale  $t yy : 4r$   
 $=$  omnibus triangulis FCE, GCI, &c. hoc est, spatio DIPCD.  
Si  $y$  ponitur  $= r$ , erit  $t yy : 4r = \frac{1}{4} tr = \frac{1}{2}$  triang. BCH  $=$  toti  
spatio Spirali BDPCB, repetitis, videlicet, toties portiunculis  
circa centrum C existentibus, quot gyris singulæ communes  
sunt.

N.XLII.

## II. DE LOXODROMIIS NAUTARUM.

Esto jam, in eadem figura, BLDC superficies sphaerae, C polus, BL aequator, CB, CL &c. meridiani secantes curvam BIPC constanti angulo FDE, erit Curva hac dicta *Loxodromica*.

1°. *Longitudo Loxodromiae.*

Descriptis arcubus aequatori parallelis FE, GI, PQ, ut prius, erit haud absimiliter: Sinus totus ad secantem anguli FDE  $\equiv DF: DE \equiv EG: EI \equiv DF + EG$ , &c.  $DE + EI$ , &c. hoc est,  $\equiv$  arcus meridiani DQC (complementum elevationis poli loci D) ad longitudinem Loxodromiae DIPC: Et ita quoque arcus DQ, seu differentia latitudinum locorum D & P, ad partem Loxodromiae DIP his locis interjectam.

COROLLARIUM. Hinc portiones Loxodromiae, inter duos quaecunque loca latitudine aequidifferentia, sunt aequales; & generaliter, partes Loxodromiae ejusdem proportionales sunt differentis latitudinum inter partium terminos.

Fig. 2. Porro ad inveniendam locorum longitudinem, ex datis latitudinibus & angulo Rumbi, aut vice versa: Esto ABC, planum meridiani; A, centrum Sphaerae; C, polus: AB radius aequatoris, seu Sinus totus  $\equiv r$ ; BD, latitudo loci  $\equiv y$ , DG, radius paralleli aequatoris  $\equiv z$ ; adeoque  $DE \equiv dy$ , &  $DF \equiv dz$ ; tangens anguli Rumbi & meridiani  $\equiv t$ ; ipse vero arcus aequatoris BL (in Fig. 1.)  $\equiv x$ ; ejusque differentiale  $LM \equiv dx$ . Quibus positis, erit primo  $r: z \equiv dx: \frac{zdx}{r} \equiv$  different. paralleli (\*)

deinde  $\frac{zdx}{r}: dy \equiv t: r$ ; (\*) adeoque  $dy \equiv zdx: t$ ; denique

(fig. 2.)

(\*) Scilicet (Fig. 1.)  $CM [r]: CE [z] \equiv LM [dx]: EF [zdx: r]$ .

(\*) Nempe  $EF [zdx: r]: FD [dy] \equiv SC: CD \equiv HC [t]: CB [r]$  ob similia Triangula SCD, HCB.

(fig. 2.)  $DE [dy] : DF [dz] = AD [r] : AG [\sqrt{(rr - zz)}]$ ; N. XLII.  
unde  $dy [zdx : t] = rdx : \sqrt{(rr - zz)}$ ; ac proinde  $dx = trdz : z\sqrt{(rr - zz)}$ , quod sic construitur.

Applicetur extremitati radii AC normalis CP = t, & per punctum P, asymptotis AC, AB, describatur Hyperbola PI: deinde, assumpto in peripheria quadrantis quovis puncto D, agantur DO, DI parallelæ radiis AC, AB, & abscindatur LM = GI; ductaque AMN, sumatur LO = BN; erit punctum O ad curvam optatam OQ.

DEMONST.  $AG [\sqrt{(rr - zz)}] : AC [r] = CP [t] : GI$  vel  $LM [tr : \sqrt{(rr - zz)}]$  &  $AL [z] : LM [tr : \sqrt{(rr - zz)}] = AB [r] : BN$  seu  $LO [trr : z\sqrt{(rr - zz)}]$ . Quare spatium OLVX, latitudinis LV seu dz, æquale  $trrdz : z\sqrt{(rr - zz)} =$  (ut modo ostensum)  $rdx$ , & propterea totum spatium TBVX = rx; ideoque spatium hoc applicatum ad radium, exhibet rectam æqualem arcui æquatoris, qui differentiam longitudinum exhibet puncti B, & ejus in quo linea Loxodromica parallelum per E transeuntem secat. Non secus, si latitudo loci, e quo proficisceris, sit BD, & ejus, in quem per Rumbum datum pervenisti, BR; erit spatium OLSQ ad radium applicatum æquale arcui æquatoris, qui differentiam longitudinum dictorum locorum metitur (\*).

Præterea, datis longitudinibus & latitudinibus loci a quo, & ad quem; Quæritur t, hoc est, in quem Rumbum navis dirigi debeat? Respond. Differentia longitudinum duorum locorum est ad differentiam duorum aliorum latitudine cum prioribus convenientium, ut tangens anguli prioris Rumbi ad tangentem anguli postremi. Etenim descripta alia hyperbola YZ & alia curva WK, erit,  $CP : GI [LM] = AG : AC = CY : GZ [LH]$ , & permutando  $CP : CY = LM : LH = LM : LA + LA : LH = BN [LO] : BA + BA : BT [LW] = LO : LW$ ; quod cum ubique valeat, erunt omnes LO, LW; hoc est, spatia LOQS, LWKS, divisa per communem radium, hoc est, differentia

LII 2

ferentia

(\*) Vide omnino Nos. XC. Art. 50. & XCI.

- ferentia longitudinum, ut CP, CY, seu ut tangentes angulorum, quos Rumbi faciunt cum meridianis. Unde datis latitudinibus BD, BR, si fiat; ut spatium LOQS ad radium applicatum, ad datam longitudinum differentiam; sic data CP ad aliam CY: erit hæc tangens anguli quæsitæ.

*Constructio Problematis succinctor:* Extenso quadrante meridiani BC in rectam  $\beta\alpha$ , & abscissa quavis  $\beta\delta = BD$ , si applicetur  $\delta\gamma$ , quæ sit ad  $\beta\tau$  seu  $t$ , ut AB ad DG; erit curva  $\tau\gamma$  ita comparata, ut spatium curvilineum  $\delta\gamma\pi\rho$ , ad radium AB applicatum sit æquale arcui æquatoris, qui differentiam longitudinum exprimit locorum, quorum latitudines sunt  $\beta\delta$ ,  $\beta\rho$ , seu BD, BR. Cum enim ex constructione sit,  $DG[z]:AB[r]=\beta\tau[t]:\delta\gamma$ ; erit  $\delta\gamma = tr:z$ , adeoque rectang.  $\gamma\delta\epsilon = trdy:z = rdx$ , per superius ostensa.

Præterea, si spatium curvilineum  $\beta\tau\pi\rho$  adeoque & singula rect.  $\gamma\delta\epsilon [trdy:z]$  commutari intelligantur in alia parallelogramma, quorum communis altitudo sit  $\beta\tau[t]$ , erit singulorum latitudo respectiva  $rdy:z$ , quæ est ad  $\delta\epsilon$ , seu  $dy$ , ut  $r$  ad  $z$  [radius ad sinum complementi latitudinis  $\beta\delta$ , vel BD, sive ut secans latitudinis ad radium.] Quare, ut  $r$  ad  $t$ , sic unius parallelogrammuli latitudo  $rdy:z$ , ad  $t dy:z [=dx]$ , & ita summa omnium ad  $x$ , loci longitudinem. Hinc ratio perspicitur constructionis *Tabule*, quam vocant *latitudinum crescentium*; qua de videsis SNELLIUM, & P. DESCHALES.

## 2°. *Spatium Loxodromicum.*

Quod portionem superficiæ sphaericæ curvæ loxodromicæ, & polo, vel æquatori, interjectum concernit, fiat  $r:p$  [Radius ad Peripheriam]  $= z:\frac{pz}{r} =$  circumferentiæ paralleli per D transeuntis, quæ ducta in latitudinem  $DE = dy = rdz:\sqrt{(rr-zz)}$  exhibet  $pzdz:\sqrt{(rr-zz)}$  arcam annuli DE, ejusque integrale  $p\sqrt{(rr-zz)}$  dat superficiem Zonæ sphaericæ rotatione arcus BD super axe AG genitæ. Quia  $p\sqrt{(rr-zz)} = p$  in AG, obiter

obiter notamus insigne *Theorema Archimedeum*, quod superficies N. XLII. frusti sphaerae cujuslibet æquetur producto altitudinis ejus in peripheriam circuli maximi; & proportionalis partis proportionaliter: (\*) adeoque quod superficies portionum inter se sint ut altitudines. Hinc  $p : dx = p \sqrt{(rr - zz)} : dx \sqrt{(rr - zz)}$ , seu, per superius ostensa  $tr dz : z = \text{area trapezii sphaerici}$ , cujus bases oppositæ sunt differentiolæ arcuum æquatoris & paralleli; ejus itaque integrale æquale areae spatii curvæ Loxodromicæ & æquatori interjecti: est vero integrale ipsius  $tr dz : z = \text{spatio hyperbolico}$ ; quare si asymptotis AB, AC, describatur hyperbola  $pqr$ , eadem cum altera PI, erit portio ejus quæcunque  $pBVr$  æqualis spatio comprehenso curva Loxodromica, æquatore, & meridiano dictam Loxodromicam ad latitudinem BD interfecante; cumque totum spatium TBVX sit æquale  $rx$ , hoc est, ipsi radio AC in arcum æquatoris  $x$ , hoc est per modo laudatum *Theorema Archimedeum*, toti triangulo sphaerico duobus meridianis & æquatori intercepto; sequitur reliquum  $TprX$  æquari ipsi spatio, utroque meridiano, Loxodromica & polo terminato.

$$\text{Nota } 1^{\circ}. Lq : LO = \frac{tr}{z} : \frac{tr}{z \sqrt{(rr - zz)}} = \sqrt{(rr - zz)} :$$

$r = AG : AC$ . Unde alia habetur constructio curvæ OQ.  
 2°. Si duas Loxodromias idem æquatoris parallelus secet, & per puncta sectionum transeant meridiani; spatia Loxodromiis, meridianis, & æquatori utrinque interjecta, erunt ut tangentes angulorum, quos Rumbi constituunt cum meridianis. Patet, quia spatia plurium hyperbolarum, quale  $pBVr$ , abscissa ab eadem VX sunt ut ipsæ Bp.

(\*) Id est, trapezium in superficie Sphaerae descriptum, & comprehensum peripheriis duorum circulorum parallelorum, atque duabus aliis per istorum polos transeuntibus, æ-

quale est producto ex ejus altitudine, sive distantia circulorum parallelorum, & arcu circuli maximi, qui metitur angulum a circulis perpendicularibus comprehensum.

N. XLII. III. DE AREIS TRIANGULORUM  
SPHÆRICORUM.

Esto ABC, Triangulum Sphæricum rectangulum ad C; D,  
Fig. 4. polus circuli AC; I, sphæræ centrum; IA, IC, IF, radii;  
AF, DF, DC, DO, quadrantes circulorum maximorum; CH,  
OG, sinus arcuum CA, OA; sitque OC pars infinite parva  
cruris AC; ac ponatur  $IA = r$ ; tangens arcus FE, seu anguli  
BAC  $= t$ ; IH  $= z$ ; HC  $= \sqrt{(rr - zz)}$ : erit HC  
 $[\sqrt{(rr - zz)}]$ : IC  $[r] = HG$  vel  $Oo [dz]$ : OC  $[r dz$   
 $:\sqrt{(rr - zz)}]$  (\*) & (per Doctr. Trigonom. Sphær.) IF, si-  
nus AF  $[r]$ : HC, sin. AC  $[\sqrt{(rr - zz)}] = \text{Tang. FE}$   
 $[t]$ : Tangent. CB  $[t \sqrt{(rr - zz)}: r]$ , atque secans CB  
 $[\sqrt{(rr + tt(rr - zz)): rr}]$ : Tang. CB  $[t \sqrt{(rr - zz)}: r]$   
 $= \text{Rad. } [r]$ : sin. CB.  $[tr \sqrt{(rr - zz)}: \sqrt{(ttrr - ttzz + r^4)}]$   
Sed sin. CB in CO  $[rrtdz: \sqrt{(ttrr - ttzz + r^4)}] = \text{BCOL}$ ,  
per superius citatum *Theorema Archimedaum*, cujus integrale æ-  
quale arcæ Trianguli ABC.

CONSTRUCTIO. Describatur semicirculus, centro I, radio  
IM  $= r \sqrt{(tt + rr)}$ :  $t$  seu quarta proportionali ad tangentem  
& secantem anguli BAC, ac radium IA, tum fiat alia curva  
PQR, ejus naturæ, ut HQ sit tertia proportionalis ad HN &  
radius sphæræ IA, eritque planum AHQR æquale superficiæ  
Trianguli sphærici ABC.

DEMONST. IMq  $[(ttrr + r^4): tt] - IHq [zz] = HNq$   
 $[(ttrr + r^4 - ttzz): tt]$  sed, ex constr. HN  $[\sqrt{(ttrr + r^4 - ttzz)}: t]$ :  
IA  $[r] = IA [r]$ : HQ  $[trr: \sqrt{(ttrr + r^4 - ttzz)}]$  adeoque  
QHq  $= trrdz: \sqrt{(ttrr + r^4 - ttzz)} = \text{BCOL}$ , &c.

COROLLARIUM I. Planum AIPR [= Triang. Sphær.  
AEF]

(\*) Ob similia Triangula HIC, OoC.



$AEF \text{ ] } = \text{applicatum ad radium } IA = \text{arctui } EF$ , per *Theore. N. XLII. ma Archimedaum.*

COROLL. 2. Si  $t = \text{infin.}$  hoc est, si ang.  $BAC$  rectus, erit  $IM = IA$ , & planum  $AHRQ$  ad radium applicatum  $=$  arctui  $AC$ . (')

## ADDITAMENTUM AD PROBLEMA FUNICULARIUM.

Postquam *Problematis de Curva funicularia* solutionem nuperime exhibuisset *Frater*; speculationem istam continuo promovi ulterius, & ad alios quoque casus applicui; quo pacto, præter ea quorum tum mentio facta est, nonnulla sese obtulerunt, quæ recensere operæ pretium existimo.

1. Si crassities, vel gravamina funis, aut catenæ, inæqualia *Fig. 5.* sint; & sic attemperata ut, dum est in statu quietis, gravamen portionis  $HI$  sit in ratione portionis rectæ utcunque ductæ  $LM$ , iisdem perpendicularis  $HL$ ,  $IM$  interceptæ; curva  $AIHB$ , quam funis, vel catena, sic suspensa proprio pondere format, erit Parabolica. Sin gravamen portionis  $HI$  sit in ratione spatii  $LOPM$  iisdem perpendicularis  $HL$ ,  $IM$ , intercepti; erit funicularia  $AB$ , curva Parabolæ vel cubicalis, vel biquadraticæ, vel surdesolidalis &c. prout Figura  $CLO$  est vel triangulum, vel complementum semiparabolæ communis, aut semiparabolæ cubicalis &c.

Quod si vero gravamen portionis  $HI$  sit in ratione spatii  $QRST$  rectis horizontalibus  $HQ$ ,  $IR$  abscissi; erit Funicularia  $IB$  curva aliqua ex genere Hyperbolicarum (recta  $AG$  existente una ex asymptotis) puta vel Apolloniana, vel cubicalis, vel biquadrata &c. prout videlicet Figura  $AQT$  est vel triangulum, vel

(') Huc referri possunt quæ dedit Auctor in N°. LII. de Testudine quadrabili.

N. XLII. vel complementum semiparabolæ communis; aut cubicalis; &c. (\*)

2. Si funis sit uniformis crassitie, at a pondere suo extensibilis, peculiari opus est artificio. Vocetur portio funis non extensi, cujus ponderi æquipollet vis tendens imum funis punctum,  $a$ ; & excessus longitudinis, quo portio hæc a dicta vi extensa non extensam superat,  $b$ ; sumaturque in perpendicularo  $FA = a$ , & indefinita  $FC = x$ : tum fiat curva DE ejus naturæ, ut sit applicata  $CD = ab : \sqrt{(2aa + 2bx - 2a\sqrt{(aa + bb + 2bx)})}$  vel  $a\sqrt{(aa + bx + a\sqrt{(aa + bb + 2bx)})} : \sqrt{(2xx - 2aa)}$ , perinde enim est; ac spatium curvilineo ACDE constituitur æquale Rectang.

(\*) Resumatur æquatio generalis ad Funicularias, (quæ in Nota ad N<sup>um</sup>. XXXIX. demonstrata est)  $adx = Pdy$ , aut  $ax = \int Pdy$  & manifestum est, si  $P$  data sit functio ipsius  $y$ , dari æquationem, quæ naturam curvæ exhibet; algebraicam, si sit  $Pdy$ , quantitas integrabilis; transcendente, si secus. Specialiter; si gravamen funis AB ponatur æquale areæ CBN curvæ CPN, quæ sit ex Parabolæ genere, hoc est, si ponatur  $BN = y^n$ , &  $P = fy^n dy = y^{n+1} : (n+1)$ , erit  $ax = [\int Pdy = ] fy^{n+1} dy : (n+1) = y^{n+2} : (n+1 \cdot n+2)$ . Ergo funicularia AB erit ex Parabolæ genere, & quidem duobus gradibus altior Parabola CPN. Si sit hæc recta parallela ipsi CB, hoc est, si gravamen portionis HI sit ut LM, ponatur  $n = 0$ , &  $y^n = 1$ , & inve-

nietur AB Parabola vulgaris, cujus æquatio  $2ax = y^2$ . Si CBN sic Triangulum, ponatur  $n = 1$ , & AB erit Parabola cubicalis, cujus æq:  $6ax = y^3$ , &c.

Quod si vero  $P$  data sit functio ipsius  $x$ , hoc est, si gravamen funis AB æquale sit areæ ACV, curvæ AV; æquatio  $adx = Pdy$  vel  $\frac{adx}{P} = dy$ , integrata dabit naturam curvæ AB, algebraicæ, si  $dx : P$  sit quantitas integrabilis; transcendente, si secus. Si ponatur, ut posuit Auctor noster, curvam AV ex Parabolæ genere, hoc est, si sit  $CV = x^n$  erit  $P = fx^n dx = x^{n+1} : (n+1)$ . Ergo  $dy = adx : P = (n+1) adx : x^{n+1}$ ; Unde  $y = -a : x^n$ , adeoque AB est ex Hyperbolæ genere, convexitatem obvertens axi AC.

ang. FG, producanturque rectæ KG, DC ad mutuum occursum in B: Sic erit punctum B ad requisitam funiculariam AB. Suppono autem, extensiones viribus tendentibus proportionales esse; tamen dubium mihi sit, an cum ratione & experientia hypothesis illa satis congruat. Retinere autem istam nobis liceat, dum veriores ignoramus. (h)

3. Occasione *Problematis funicularii* mox in aliud non minus illustre delapsi sumus, concernens flexiones, seu curvaturas trabium, arcuum tensorum, aut elaterum quorumvis, a propria gravitate, vel appenso pondere, aut alia quacunque vi comprimente factas; quorum etiam Celeberrimum LEIBNITIIUM in priva-

(\*) Tensio fili Bb ostensa est, in Nota ad N<sup>um</sup>. XXXIX, esse  $adx:dy$ . Ergo, cum extensiones ponantur tensionibus proportionales; si tensio  $a$  efficit extensionem  $b$ ; tensio  $adx:dy$  efficit extensionem  $bdx:dy$ ; & funis longitudo quæ erat  $a$ , evaderet  $a+bdx:dy = (ady+bdx):dy$ . Ideo, si sumatur ejus particula, longitudinem habens  $dz$ , invenietur ejus pondusculum, vel gravamen  $[pdz] = adydz:(a dy+b dz)$ . Nam, ut longitudo tota  $(ady+bdx):dy$  ad pondus totum  $a$ , ita longitudinis particula  $dz$ , ad ejus pondusculum  $adydz:(a dy+b dz) = ady:(a dy+b dz)$ , quod dictum est  $pdz$ . Sed æquatio generalis  $adx = dy sp dz$ , dat  $addx:dy = pdz$  (posita nempe  $dy$  constante). Igitur  $addx:dy = ady:(a dy+b dz)$ , vel multiplicando in crucem  $a^2 dy ddx:dz + ab ddx = ady^2$ . Mutiplicentur singuli termini per  $dx:a$  & pro  $dz$  scribatur  $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ , eritque  $adydxddx:\sqrt{(dx^2+dy^2)} + bdxddx$

$= dy^2 dx$ , at integrando ac transponendo,  $ady \sqrt{(dx^2+dy^2)} = xdy^2 - \frac{1}{2} bdx^2$ , duplicando & quadrando,  $4 aady^2 dx^2 + 4 aady^4 = 4 xxdy^2 - 4 bxdx^2 dy^2 + bbdx^4$ , vel  $dx^4 = (4 aady^2 - 4 bxdy^2) dx^2:bb = (4aa - 4xx) dy^4$ , hæc æquatio quadratica, si resolvatur, dabit  $d x^2 = (2aa+2bx-2a\sqrt{(aa+bb+2bx)}) dy^2:bb$ , vel  $dy^2 = bbdx^2:(2aa+2bx-2a\sqrt{(aa+bb+2bx)})$  aut  $dy = bdx:\sqrt{(2aa+2bx-2a\sqrt{(aa+bb+2bx)})}$ . Quod, si æquatio quadratica ordinata fuisset, secundum dimensiones non ipsius  $dx$ , sed ipsius  $dy$ , habuissimus  $dy = dx \sqrt{(aa+bx+a\sqrt{(aa+bb+2bx)})}:\sqrt{(2xx-2aa)}$ . Ergo, si sit  $CD = ab:\sqrt{(2aa+2bx-2a\sqrt{(aa+bb+2bx)})}$ , aut  $= a\sqrt{(aa+bx+a\sqrt{(aa+bb+2bx)})}:\sqrt{(2xx-2aa)}$  perinde enim est, cum sint hæc quantitates æquales, habebimus  $dy = CD \times dx:a$ . Ergo  $ay = \int CD \times dx = ACDE = AGKF = AG xa$ . Igitur  $AG = y$ .

N. XLII. privatis, quibus sub idem me tempus honoravit, litteris digitum opportune intendere video. Videtur autem hoc Problema, cum ob hypotheseos incertitudinem, tum casuum multiplicem varietatem, plus aliquanto difficultatis involvere priori; quanquam hic non prolixo calculo, sed industria tantum opus est. Ego per solutionem casus simplicissimi (saltem in præmemorata hypothesi extensionis) adyta Problematis feliciter referavi. Verum ut, ad imitationem Viri Excellentissimi, & aliis spatium concedam suam tentandi Analysin; premam pro nunc solutionem, eamque tantisper Logogripho occultabo, clavem cum demonstratione, in Nundinis autumnalibus communicaturus. Si lamina elastica gra-

Fig. 6. vitatis expers AB, uniformis ubique crassitie & latitudinis, inferiori extremitate A alicubi firmetur, & superiori B pondus appendatur, quantum sufficit ad laminam eousque incurvandam, ut linea directionis ponderis BC curvatæ laminæ in B sit perpendicularis; erit curvatura laminæ sequentis naturæ:

*Qrzumu bapt dxqopddbbp poyle fy bbqnsqbsp lty ge mndts  
udehhtuhs imixy yxdkbdbxp gqsrkfgudl bg ipqandit tpgkbp  
aqdtkzs. (1)*

4. Istis vero omnibus multo sublimior est speculatio de *Figura veli vento inflati* quanquam cum *Problemate Funiculario* catenus affinitatem habet, quatenus venti continuo ad velum adlabentis impulsus ceu funis gravamina spectari possunt. Qui naturam pressionis fluidorum intellexerit, haud difficulter quidem capiet, quod portio veli BC, quæ subtenfam habet directioni venti DE perpendicularem, curvari debeat in arcum circuli. At qualem curvaturam induat reliqua portio AB, ut difficilis est perquisitio, sic in re nautica eximii prorsus usus futura est, ut præstantissimorum Geometrarum occupationem juxta cum subtilissimis mereri videatur (\*). Cæterum, in his Problematibus omnibus,

(1) Id est, Portio axis applicatam inter & tangentem est ad ipsam tangentem sicut quadratum applicata ad constans quoddam spatium. Videatur Nus. LVIII. Art. III. §. 2.

(\*) Videatur Nus. XLVIII.

bus, quæ quis nequicquam alia tentet Methodo, calculi *Leibnitiani* N. XLII; eximium & singularem plane usum esse comperi, ut ipsum propterea inter primaria seculi nostri inventa censendum esse æstitem. Quanquam enim, ut nuper innui, ansam huic dedisse credam calculum *BARROWII*, qualem appello, qui, ab hujus Viri tempore, passim fere apud Geometras præstantiores invaluit, quemque etiamnum Nobil. *TSCHIRNHAUSIO* solemnem esse video: hoc tamen non eo intelligendum est, quasi utilissimi inventi dignitatem ullatenus elevare, aut Celeberrimi Viri laudi merita quicquam detrahere & aliis ascribere cupiam: & si quæ conferenti mihi utrinque intercedere inter illos visa est affinitas, ea major non est, quam quæ faciat, ut, uno intellecto, ratio alterius facilius comprehendatur; dum unus superfluas & mox delendas quantitates adhibet, quas alter compendio omittit. De cætero namque, compendium isthoc tale est, quod naturam rei prorsus mutat, facitque ut infinita per hunc præstari possint, quæ per alterum nequeunt: præterquam enim quod ipsum hoc compendium reperisse utique non erat cujusvis, sed sublimis ingenii & quod Autorem quam maxime commendat.



N<sup>o</sup>. XLIII.

L E T T R E  
DE M<sup>r</sup>. L E M A R Q U I S  
DE L' H O P I T A L,  
à M<sup>r</sup>. H U Y G E N S,

*Dans laquelle il prétend démontrer la règle de  
cet Auteur touchant le Centre de l'Oscilla-  
tion du pendule composé, par sa cause phy-  
sique, & répondre en même tems à M<sup>r</sup>.  
B E R N O U L L I.*

*Histoire  
des Ouvra-  
ges des Sça-  
vans. 1690.  
Juin. pag.  
440.*

**I**L y a quelques années, Monsieur, que j'ai lu avec admiration vôtre savant Traité des Centres d'Oscillation, & que j'ai été pleinement convaincu de la vérité de vos démonstrations. Cependant les *Journaux de Leipzig* m'étant tombés depuis peu entre les mains, j'ai trouvé dans celui du mois de *Juillet* de l'année 1686. le récit du différent que vous avez eu sur ce sujet avec M<sup>r</sup>. l'Abbé C A T E L A N, rapporté par M<sup>r</sup>. B E R N O U L L I \*, qui décide en vôtre faveur, comme doivent faire assurément tous ceux qui prétendent tenir quelque rang parmi les Géomètres. Mais j'ai été fort surpris de voir que la fin de son raisonnement se trouve contraire à vos démonstrations : ce qui m'a donné lieu de l'examiner avec soin ; & j'ai reconnu qu'il se sert d'un principe très véritable, quoiqu'il se trompe dans l'application qu'il en fait.

\* Ci-dessus, No. XXIII.



fait. Car ce principe conduit, comme je vais montrer, à la même vérité N.XLIII. que vous avez prouvée dans votre Proposition V.

Soit la verge DAB [ Fig. 1. ] inflexible, & sans pesanteur, mobile autour du point fixe D, dans laquelle soient enfilés les deux poids égaux A & B, & soit la distance B D au point fixe, quadruple de A D; l'on demande la longueur D G du pendule simple isochrone, c'est-à-dire, qui se meuve avec la même vitesse que le pendule composé.

Pour résoudre ce problème, je considère les vitesses avec lesquelles les corps A & B commencent à descendre dans le premier instant de leur chute, ou, si l'on aime mieux, les espaces qu'ils parcourent dans un même tems, quelque petit qu'on le prenne: & c'est dans ce sens que je mets 1 pour la vitesse, avec laquelle tout corps pesant, grand ou petit, commence à descendre sur des plans également inclinés: car, comme l'on fait assez, cette vitesse est égale dans tous les corps. Je conçois aussi, que la quantité de mouvement d'un corps au commencement de sa descente, naît de sa masse multipliée par cette première vitesse. Ceci supposé, il est constant que le corps A tend à descendre avec la même vitesse que le corps B, & que ne le pouvant, parce qu'il est attaché en A, dont la vitesse n'est que la quatrième partie de celle de B, il doit hâter le mouvement du corps B dans le pendule composé; & toute la difficulté consiste à déterminer au juste de combien ce mouvement doit être augmenté: & c'est ce que je fais en cette sorte.

Soit  $x$  la quantité de mouvement du Corps A dans le pendule composé; L'excès restant de sa quantité de mouvement sera donc  $A - x$ , qui étant appliqué en A, fait effort sur le point fixe D, & sur le Corps B, que l'on doit envisager comme étant immobile à son égard [ puisqu'il est évident que le corps B doit être censé sans mouvement par rapport à cet excès ] & par conséquent la verge B D doit être regardée comme un levier appuyé par les deux bouts en B & D. L'on aura donc B D [ 4 ] est à B D [ 1 ] comme  $A - x$  est à  $\frac{1}{4} A - \frac{1}{4} x$ , portion de l'excès de la quantité de mouvement du corps A, qui se distribue en B: de sorte que la quantité de mouvement du corps B dans le pendule composé, sera  $B + \frac{1}{4} A - \frac{1}{4} x$ , c'est à dire,  $\frac{5}{4} A - \frac{1}{4} x$ . Or à cause de la verge inflexible D B, la vitesse du corps B, dans le pendule composé, doit nécessairement être quadruple de celle du corps A, & par conséquent aussi sa quantité de mouvement, puisque ces corps sont égaux: d'où il suit qu'il y aura égalité entre  $4x$ , &  $\frac{5}{4} A - \frac{1}{4} x$ ; d'où l'on tire une valeur  $x = \frac{1}{7} A$ , qui exprime la quantité de mouvement du corps A dans le pendule composé. Maintenant si l'on fait comme  $\frac{1}{7}$  vitesse du corps A dans le pendule composé, est à 1 vitesse de tous les corps pesans au bout des pendules simples: de même D A [ 1 ], est à D G, [  $\frac{17}{7}$  ]; ce sera la longueur du pendule simple

M m m 3

isochrone,



N. XLIII. isochrone ; car les espaces étant entre eux comme les vitesses , le tems doit être égal.

Si l'on ajoute au pendule composé D A B [ Fig. 2 ] le nouveau poids C égal à chacun des poids A & B, enforte que DC soit double de DA, l'on doit considérer les poids A & B, comme étant attachés en G, leur centre d'oscillation, au bout du pendule simple D G : & alors mettant  $x$  pour la quantité de mouvement du corps C, dans le pendule composé D C G, l'on aura  $C - x$  pour l'excès restant de la quantité de mouvement du corps C, qui étant appliqué en C, fait effort sur le point fixe D, & sur le point G, que je regarde comme étant fixe à son égard. L'on aura donc DG [  $\frac{1}{2}$  ] est à DC [ 2 ], comme  $C - x$  est à  $(10C - 10x) : 17$ , portion de cet excès qui se distribue en G : d'où il suit que la quantité de mouvement des corps A & B dans le pendule composé D A C B sera  $\frac{1}{17} A + \frac{10}{17} B + \frac{10C - 10x}{17}$ , c'est à dire,  $\frac{35C - 10x}{17}$ . Or à cause de

la verge inflexible DB, la vitesse du corps A dans le pendule composé sera nécessairement la moitié de celle du corps C, & celle du corps B sera double de celle du corps C ; & de même aussi leurs quantités de mouvement, ces trois corps étant égaux. Il y aura donc égalité entre  $2x + \frac{1}{2}x$  &  $(35C - 10x) : 17$ , d'où l'on tire une valeur  $x = \frac{1}{3} C$ , qui exprime la quantité de mouvement du corps C dans le pendule composé DACB. Maintenant si l'on fait comme  $\frac{1}{3}$  vitesse du corps C dans le pendule composé, à 1 vitesse de tout corps pesant au bout d'un pendule simple : de même DC [ 2 ] est à DE [ 3 ] ; ce sera la longueur du pendule simple isochrone. Si les poids A, B, C, étoient inégaux, l'on trouveroit toujours, en suivant ce raisonnement, le centre d'Oscillation : de sorte que cette méthode est générale, quel que soit le nombre des poids, & quelque inégalité qu'ils aient entre eux. Il faut maintenant faire voir qu'elle sert aussi, lorsque les poids se trouvent de part & d'autre du point fixe.

Soit le pendule composé ADB [ Fig. 3 ] mobile autour du point fixe D, & chargé de deux poids égaux A & B, & soit DB quadruple de DA ; il est visible que le corps A doit retarder le mouvement du corps B, dans le pendule composé ; & pour trouver précisément de combien, je nomme  $x$  la quantité de mouvement du corps B, dans le pendule composé ADB : & par conséquent l'excès restant de sa quantité de mouvement sera  $B - x$ . Or à cause de la verge AB, la vitesse du corps A doit nécessairement être la quatrième partie de celle du corps B. Donc sa quantité de mouvement dans le pendule composé sera  $\frac{1}{4}x$  [ car les corps A & B étant égaux, les quantités de mouvemens sont proportionnées aux vitesses. ]

Or cette quantité de mouvement ne peut avoir été produite que par l'excès

l'excès restant de celle du corps B. Il est donc évident que cet excès N. XLIII.  
 $B - x$  doit vaincre la quantité de mouvement du corps A vers le bas, & lui en imprimer de plus  $\frac{1}{4}x$  vers le haut, c'est-à-dire qu'il doit agir sur le corps A, comme si la force  $A + \frac{1}{4}x$  étant appliquée immédiatement en A, le pouffoit vers le haut. Mais la force  $B - x$ , à cause du point fixe D, agit sur le corps A, comme si la force  $4B - 4x$  étant appliquée immédiatement en A, pouffoit ce corps vers le haut. Il y aura donc égalité entre  $4B - 4x$  &  $A + \frac{1}{4}x$ ; d'où l'on tire une valeur  $x = \frac{12}{17}B$ , qui exprime au juste la quantité de mouvement du corps B, dans le pendule composé ADB. Maintenant si l'on fait comme  $\frac{12}{17}$  vitesse du corps B, dans le pendule composé, est à 1 vitesse de tout corps pesant au bout d'un pendule simple : de même DB [4] est à DG, [ $\frac{17}{12}$ ] ce sera la longueur du pendule simple isochrone.

Il est aisé de conclure de tout ceci, que le principe de Mr. BERNOULLI est véritable, & qu'il se trompe dans la conclusion qu'il en tire : parce qu'il considère les vitesses acquises des corps A & B, au lieu de considérer, comme nous avons fait, leurs vitesses commençantes, & de plus leurs quantités de mouvement. Car sans cela, on ne pourroit point appliquer ce principe, qui n'est autre que celui du levier, lorsque les corps sont inégaux. De sorte que je crois avoir pleinement satisfait à sa demande, *Rogantur hac occasione Eruditi &c.* \*

Vous voyez, Monsieur, comme différentes routes conduisent à la connoissance de la même vérité. Ce n'est pas que je veuille comparer celle-ci à la vôtre, qui est incomparablement plus savante & plus géométrique. Si vous jugez cependant qu'il ne soit pas inutile de faire voir, que les raisons physiques que j'apporte ici s'accordent parfaitement avec vos démonstrations, & qu'elles soient propres à lever le doute de Mr. BERNOULLI, je consens que vous rendiez publique cette lettre, & je vous prie d'y ajouter vos remarques, vous protestant que je n'appellerai point du jugement que vous en porterez, qui ne peut être que très éclairé & très équitable. Je suis très parfaitement &c.

\* Ci-dessus, pag. 120.



N°. XLIV.

# REMARQUES

## DE MR. HUYGENS

*Sur la Lettre précédente & sur le récit de MR. BERNOULLI, dont on y fait mention.*

*Histoire  
des Ouvr.  
des Spha-  
vans 1690.  
Juin pag.  
449.*

J'AI toujours crû qu'il étoit difficile de trouver le Centre d'Oscillation, d'une autre manière que celle dont je me suis servi. Aussi n'ai-je vu personne qui l'ait tenté heureusement, soit à l'égard de la solution générale, soit au cas des pendules composées, dont les poids sont en ligne droite avec le point de suspension. C'est ce cas que Mr. le Marquis de L'HÔPITAL, après plusieurs autres, s'est proposé, & où je puis dire qu'il est le premier qui ait réussi. Car Mrs. WALLIS & MARIOTTE, & le Père DESCHALES, n'ont cherché que le Centre de percussion, & n'ont pas pu démontrer légitimement que c'est le même que celui d'Oscillation; quoique cela soit vrai. Au reste, bien que la démonstration de Mr. le Marquis soit bonne & bien fondée, & qu'elle semble fort naturelle; elle ne laisse pas que de comprendre plusieurs choses, qui peuvent d'abord faire de la peine aux Lecteurs; comme lorsqu'il considère la quantité de mouvement d'un corps tout au commencement de sa chute; & lorsqu'il distingue & partage, comme il fait, le surplus du mouvement du corps A, savoir ce qu'il auroit d'avantage en tombant séparément, qu'en descendant comme partie du pendule composé; & enfin quand il dit qu'au pendule de trois poids, il faut considérer les deux A & B comme attachés en G, leur Centre d'Oscillation. Ces choses n'étant pas tout-à-fait évidentes, font voir que le chemin que Mr. le Marquis a pris est bien difficile, & qu'il a fallu beaucoup de justesse d'esprit pour ne pas s'y égarer. Mr. BERNOULLI, dans son récit de la dispute entre Mr. l'Abbé CATELAN & moi, sur lequel je ferai ensuite quelques remarques, avoit suivi ce même chemin: mais n'ayant pu aller jusqu'à la fin, c'est une autre preuve de la difficulté qui s'y rencontre.

Je suis obligé à Mr. BERNOULLI, d'avoir toujours pris mon parti dans cette dispute avec Mr. l'Abbé CATELAN. Cependant je n'ai pu comprendre

dre, comment après avoir dit que ma proposition fondamentale du cen- N. XLIV, tre d'Oscillation, dépend de ce grand principe des Méchaniques, savoir, *que le centre commun de gravité de plusieurs poids ne sauroit monter plus haut par l'effet de leur pesanteur, que d'où il est descendu*; il tourne ensuite contre moi certain raisonnement qui est douteux, de son propre aveu, comme s'il étoit capable de mettre en doute la vérité de cette même proposition; au lieu qu'il devoit plutôt conclure qu'il y avoit de la faute dans son raisonnement.

Touchant ce qu'il m'impute, de n'avoir pas réfuté dans ma première réponse le faux principe de Mr. l'Abbé, & que dans la dernière je ne l'ai pas réfuté par sa cause physique: je dirai, que dans ma première réponse, je croyois que c'étoit assez de montrer un défaut manifeste dans le raisonnement qu'on m'opposoit, sans entrer plus avant en matière; & que dans ma réplique du 8 Juin 1684. je pourrois prétendre, aussi-bien que Mr. BERNOULLI, d'avoir réfuté ce principe par sa cause physique; puisque je fais voir qu'il répugne au grand principe naturel, *Que les corps pesans ne peuvent monter d'eux-mêmes*. Car je crois, que c'est autant en cela que consiste la cause physique, de ce que dans le pendule composé, les poids A & B, étant descendus conjointement au bas de leur vibration, n'acquièrent pas ensemble autant de vitesse, que s'ils étoient tombés séparément des mêmes hauteurs; qu'en ce que le poids A consume une partie de son mouvement en agissant sur le point fixe F, suivant la démonstration de Mr. BERNOULLI & de Mr. le Marquis de L'HÔPITAL. Et ma raison est, qu'il se perd souvent du mouvement, sans qu'on puisse dire qu'il s'est consumé à rien, comme dans plusieurs cas du choc de deux corps durs, suivant ce que j'ai remarqué en publiant les Loix de ces sortes de mouvemens dans le *Journal des Savans* en 1669. au Mois de Février: de sorte que ce n'est pas une nécessité que la quantité de mouvement se conserve toujours, si elle ne se consume à quelque chose; mais c'est une Loi constante, que les corps doivent garder leur *force ascensionnelle*, & que pour cela la somme des quarrés de leur vitesse doit demeurer la même. Ce qui n'a pas seulement lieu dans les poids des pendules, & dans le choc des corps durs, mais aussi en beaucoup d'autres recherches de Méchanique.

J'avois montré, qu'en admettant le principe de Mr. l'Abbé CATELAN, la *force ascensionnelle* des poids d'un pendule s'augmentoient, & par là leur commun centre de gravité pourroit monter plus haut que d'où il étoit descendu: d'où j'inferois que cela étant, on auroit trouvé le Mouvement perpétuel.

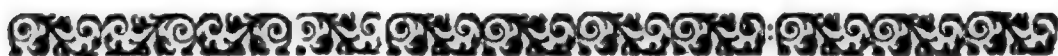
Mr. BERNOULLI ne demeure pas d'accord de cette conséquence, à cause de l'obstacle de l'air, & de quelques autres, qui en empêcheroient l'effet. Mais il devoit avoir considéré, que la hauteur qu'acquiert le centre de

Jac. Bernoulli Opera.

N n n

gravi-

N. XLIV. gravité par dessus celle qu'il avoit , étant toujours d'une quantité déterminée , & l'effet des obstacles n'étant pas déterminé , & se pouvant diminuer de plus en plus ; on pourroit facilement faire une machine , où l'avantage du réhaussement du centre de gravité surpasseroit l'empêchement des obstacles. Mais c'est de quoi assurément l'on ne fera jamais obligé de venir à l'épreuve.



No. XLV.

JACOBI BERNOULLI  
DEMONSTRATIO  
CENTRI OSCILLATIONIS  
EX NATURA VECTIS,

*Reperta occasione eorum , quæ super hac materia , in Historia litteraria Rotterodamensi recensentur.*

*Alta Erud.  
Lips. 1691.  
Jul. p. 317.*

**A**NTE decennium eruditus quidam Gallus Illustris HUGENII doctrinam de centro Oscillationis labefactus supposuit , *Celeritatem totalem penduli compositi æquari summa celeritatum partium ejus separatarum*. Ego HUGENII aliquanto post suscepta causa , principii hujus falsitatem ex natura vectis demonstravi , juxta quam perpetuo partem celeritatis penduli in ipso axe consumi & deperdi necessum sit ; quod sufficere poterat ad paralogismum Adversario ostendendum. Ideoque cum eadem opera determinare volebam , quanta præcise celeritatis pars in axe absumeretur ; accidit mihi , ut rem , quam præter institutum esse

esse judicabam, paulo negligentius curarem, indeque in calculum **N. X LV.** inciderem ab *Hugeniana* propositione abludentem; quod suspicari me fecit, diversam esse rationem vectis cujus alterum fulcrum sit in motu, quam quæ est vectis ordinarii: id quod tunc quidem aliis discutiendum reliqui, ipsemet vero materiam hanc ab eo tempore prorsus seposui.

Interea prælustis & generosus quidam Vir, qui avitæ HOSPITALIORUM gloriæ nunc insuper scientiarum litterarumque decus eximium addit, re maturius perpensa, observavit huic meo principio e vulgari vectis natura desumpto apprime cum *Hugeniano* calculo convenire; inque eo duntaxat peccatum a me esse, quod celeritatem penduli acquisitam considerarem, cum nascentis tantum ratio habenda fuisset. Cujus correctionis certior per litteras factus HUGENIUS approbavit methodum, sed difficilem eandem pronunciat, & quædam haud satis evidentia continere asserit: veluti, quod celeritas vel quantitas motus penduli initialis, non acquisita, spectanda sit; quod distribuendus ejus excessus eo modo, quo fecimus, & quod in pendulo trium pluriumve ponderum, fulcrum vectis, respectu unius ponderis, concipiendum sit in centro oscillationis reliquorum: miratur denique cum illustri HOSPITALIO, quod Propositionis suæ veritatem, quam modo agnoscere videbar, calculo meo dubiam reddere coner.

Ad quæ sequentia notanda habeo: *Primo*, miror mirari Viros acutissimos, cum verba mea satis clare innuant, ex calculi istius ab *Hugeniana* hypothese dissensu me inferre voluisse potius, peculiarem, ut jam dixi, in oscillatorio vecte obtinere communicationis motus legem, quam dictam hypothese nullatenus suspectam reddere; quanquam, si verum fateri licet, nondum a me obtinere possum, ut hujus veritatem, vel in Axiomatum numero habeam, vel ab HUGENIO satis in propatulo constitutam arbitrer, eo præsertim casu, quo pondera, durante motu suo mox inter se connexa, mox soluta supponuntur. *Secundo*, Ratio cur celeritas penduli initialis, non acquisita, spectanda sit, attendenti obscura esse nequit; nec mihi fuisset olim, si vel per momentum speculationi inhæsissem diutius. Intelligantur pondera quotvis B,

N n n 2

C,



No. XLV. C, D, E, virga inflexili AB connexa, junctim descendere in perpendicularibus, ut ante hac supposui: celeritates quas acquirunt eo momento quo perveniunt in H, I, K, L, sunt HM, IN, KO, LP, quæ cum proportionales esse debeant, ob commune vinculum, ipsis ponderum distantis ab axe AB, AC, AD, AE; sequitur virgam, cui implicata sunt, ipsorum descensui cum his celeritatibus continuando nihil afferre alterationis, & propterea nullum pondus hactenus in alterum quicquam de motu suo transferre. Superest ergo solus gravitatis impulsus, qui quolibet temporis instanti acquisitis celeritatibus de novo superadditur, qui alterationem patitur. Repræsentetur hic, (cum omnibus corporibus æqualis imprimatur) per æquales lineolas MQ, NR, OS, PT, quæ quidem, respectu celeritatum acquisitarum HM, IN, KO, LP, uti hæ ipsæ, respectu spatiorum percursorum BH, CI, DK, EL, habendæ pro incomparabiliter parvis, sic ut hæc tria QM, MH, HB, habeant se quodammodo, ut linea, superficies & corpus. At vero, ob interpositam virgam, fieri nequit ut pondera simul sint in punctis Q, R, S & T, hoc est, in recta QT parallela ipsi MA; quin potius in directum jacere debent cum axe A, secundum rectam VWXY; adeo ut, cum pondera axi propiora terminos suos S & T nondum attigerunt, remotiora suos Q & R jam præterierint, parte residua virium gravitatis ab illis in hæc translata, parte in axe absumpta. *Tertio*, in pendulo trium pluriumve ponderum, centrum oscillationis omnium, excepto uno, considerat HOSPITALIUS ceu fulcrum respectu reliqui. Hoc quia inevidens judicat HUGENIUS (quanquam verum deprehendam) & præterea quia ad demonstrationem aliter quam per inductionem instituendam parum aptum, malo rem invertere, & pondus duntaxat extremum habere loco fulcri, quod ferat reliqua pondera omnia, suis quæque locis, vectem urgentia. *Quarto*, distributio, seu translatio quantitatis motus (olim solas celeritates consideravi, quia pondera supposui æqualia) nihil obscuritatis habere tandem potest, fluitque ex natura vectis ordinarii: nimirum ponderis D incrementum celeritatis extra virgam est OS, in virga tantum OX,



OX, residuum XS; quantitas ergo motus transferenda, tum in No. XLV. axem, tum in pondus extimum  $D \times XS$ ; unde AB est ad AD, sicut  $D \times XS$  ad  $D \times AD \times XS$ : AB, portionem quantitatis motus transferendam in solum pondus B.

Similiter portio, quam de motu suo pondus E in pondus B transmittit est  $E \times AE \times YT$ : AB. At pondus C, quod majus celeritatis incrementum in virga quam extra virgam accipit, motui ponderis B contraria ratione adimere censendum est portionem  $C \times AC \times WR$ : AB. Est vero totum incrementum quantitatis motus, quod ponderi extimi B a reliquis ponderibus accedit, præter id quod a propria gravitate nanciscitur,  $B \times VQ$ . Tandem sit Z intersectio rectarum QT, VY, & ducatur GZ parallela rectis BV, CW, &c.

Quibus positis, centrum oscillationis sic invenitur. Per hypothesein, & ex natura vectis, est  $(E \times AE \times YT + D \times AD \times XS - C \times AC \times WR) : AB = B \times VQ$ , quare, æque-multiplicando & addendo, erit  $E \times AE \times YT + D \times AD \times XS = C \times AC \times WR + B \times AB \times VQ$ , seu [quia YT, XS, WR, VQ ipsis ZY, ZX, ZW, ZV, vel ipsis GE, GD, GC, GB proportionalia]  $E \times AEG + D \times ADG = C \times ACG + B \times ABG$ ; additis utrique parti, tum  $E \times AEg + D \times ADg$ , tum  $C \times CAG + B \times BAG$ , fiet  $E \times EAG + D \times DAG + C \times CAG + B \times BAG = E \times AEg + D \times ADg + C \times ACg + B \times ABg$ ; unde tandem  $AG = (B \times ABg + C \times ACg + D \times ADg + E \times AEg) : (B \times AB + C \times AC + D \times AD + E \times AE)$ . Si quædam pondera ultra axem, ex adversa parte, constituta sint; eadem pro AG invenitur quantitas; nisi quod membra denominatoris ponderibus istis respondentia fiant negativa.

Jam vero puncti G a virga ponderibus B, C, D, & E gravata abrepti & per rectam GZ descendentes, incrementum celeritatis, cum pervenit ad F, necessario est FZ, quæ est æqualis, ob Parallelogrammum FQ, ipsi MQ vel NR &c. incremento scilicet velocitatis, quod pondus quodlibet descendens a propria gravitate acquirit; quod cum similiter valeat in omnibus spatii GZ partibus, sequitur, spatium illud, hoc est, angulum GAZ, eodem

N. XLV. dem tempore pertransiri a virga, sive omnibus ponderibus B, C, D, & E, sive tantum unico pondere in G gravata; & proin G fore centrum oscillationis; quod itaque repertum est. Neque variat demonstratio pro pendulo ordinario, cui pondera ita inhærent, ut per arcus circulorum descendere cogantur, cumque reperta quantitas AG eadem sit cum illa, quæ alias pro centro percussionis invenitur, sequitur *centrum oscillationis & percussionis corporum*, ut recte notavit HUGENIUS, unum idemque esse; quanquam WALLISIUS in Cono, exempli gratia, aliud percussionis, HUGENIUS aliud oscillationis centrum assignat: fallitur enim WALLISIUS, in eo quod integræ basi coni circulisque basi parallelis, non majorem distantiam ab axe rotationis celeritatemque tribuit ea, quam ipsa horum circulorum centra obtinent.

Hæc vero centri oscillationis demonstratio sic reformatâ, uti generalis est & facilis, inque geometrica exactitudine *Hugeniana* neutiquam cedit; sic eidem in eo præferenda videtur, quod principium vectis, quo nititur, indubitatum est ac evidens, cum *Hugeniana* hypothesis obscura fere sit, nec aliam ob causam pro vera habeatur, quam quod nihil in contrarium afferri possit; intellige in solidis corporibus: in liquidis enim res magis dubia videtur; cum vix appareat, quomodo cum ista hypothese conciliari possit spontaneus communis centri gravitatis ascensus, qui accidit, cum metallum in imo liquoris acidi positum ac dissolutum, aut liquor graviori leniter superinfusus eidem sensim permiscetur; id quod ansa & fundamentum extitit Perpetui Mobilis nuper a *Fratre* inventi ac in *Actis* publicati, cui proin ibidem subjunctam stricturam neutiquam officere existimamus. Cæterum collegeram, quod si celeritas totalis penduli compositi minor esse debeat summa celeritatum partium ejus separatarum, reliquum in axe premendo consumi necessum sit. Negat HUGENIUS hanc consequentiam, dicendo, sæpe numero deperdi aliquid de motu, quod nullibi insumatur. At ego contra sentio, si quid amittatur, illud perpetuo alicubi impendi, sed quandoque in premendo firmo obice, quandoque in tollendo motu contrario; adco

adco ut , cum penduli nostri pondera moveantur in eandem par- No.XLV.  
tem , jure inferre potuerim , motum deperditum necessario in axe  
premendo consumptum esse.

Denique & illud dubium est , quod mihi objicit Vir acutissi-  
mus , effectum videlicet resistentiæ aeris , disruptionis vinculi ,  
quod partes penduli connectit , aliorumque obstaculorum indeter-  
minatæ quantitatis esse , minuique in infinitum posse , sic ut non  
tollat ( ut existimaram ) possibilitatem motus perpetui , qui alias  
obtineret , si sine his impedimentis centrum gravitatis penduli al-  
tius ascendere quam descendere supponeretur. Constat enim , id  
quod de motu communicatur aut absumitur occurso obstaculo-  
rum , ad celeritatem mobilis , & hanc ad motus altitudinem de-  
terminatam semper relationem obtinere.

Tantum de his. Notum occasione præsentis materiæ Eruditis  
facio , *Fratrem* meum observasse , quod præter HUGENII Cy-  
cloidem infinitæ dentur curvæ , per quas descendens grave oscil-  
lationes peragat isochronas : item non solum cum NEWTONO  
& TSCHIRNHAUSIO infinitas Cycloides animadvertisse , quæ  
sui evolutione seipsas describant ; sed & detexisse quampiam ex  
alio quam Cycloidalium genere , quæ eadem proprietate gau-  
deat.

*Videatur Nus. XCVIII.*

Nº. XLVI.

N°. XLVI.

## S O L U T I O

## C U R V Æ C A U S T I C Æ

*Per vulgarem Geometriam Cartesianam; aliaque.*  
*Autore Joh. BERNOULLI Med. Cand.*

*Act. Erud.*  
*Lips. 1692.*  
*Janu. p. 30.*

**Q**UIA modus, quo natusam Curvæ causticæ, Nob. D. T. (a) primum considerata, per vulgarem Geometriam inquisivi, diversamque deprehendi ab ea, quam applicatæ semicirculi in punctis bisectionum formant, non cuivis obviis est, placet hic eum, in gratiam amatorum hujus Geometriæ plenius exponere: ubi primò notare convenit, quod [fig. 1.] CB radius reflexus paralleli DC, sit æqualis ipsi AB, interceptæ inter centrum A & punctum intersectionis B. Nam ob angulum  $ACF = ACE$ , &  $DCF = BCE$ , erit angulus  $ACB = ACD = CAB$ : Ergo  $BC = AB$ . *Q.E.D.*

Hoc præliminato, hujus curvæ generationem sic concipio: Sint [Figura

(a) Nob. DE TSCHIRNHAUSEN in *Actis Erud.* 1682. Octob. p. 364. dixerat curvam quam perpetuo tangunt radii a semi-circulo reflexi, positus incidentibus parallelis, ita describi posse. Sit E C e (fig. 6.) semicirculus reflectens; AC semidiameter radiis incidentibus FD, f d parallela; E e diameter ad eos perpendicularis; describantur semicirculi EGA, A g e; & pars radii incidentis GD, intercepta inter semicirculos ECe, EGA, biseccetur in H: erit punctum H unum eorum, quæ constituunt causticam EHBhe. Hunc errorem hic refutat Noster, & eum ipse DE

TSCHIRNHAUSEN in *Actis Erud.* 1690. Febr. pag. 71. candide agnovit. „ Quod ad circulum attinet, „ inquit, nuper Dn. BERNOULLI, „ hic in hisce studiis eximie versatus „ & egregiis speciminibus clarus, ob- „ servavit curvam, quæ hic per re- „ flexos radios formatur, ad sex af- „ cendere dimensiones: ego vero ex „ calculo olim collegeram illam qua- „ tuor tantum esse dimensionum. Qua- „ propter rationes denuo subducens, „ quæ satis olim prolixæ erant, cum „ nondum instructus essem necessariis „ compendiis, illico deprehendi er- „ rorem qui irrepsit.

gura II.] tres radii prædicto modo reflexi AF, BE, CD, se mutuo secantes in punctis G, H, I, quorum quilibet, ex hypothefi, curvam quæsitam tangit; ideoque punctum contactus radii BE non poterit esse in HB; secus AF curvam secaret; nec etiam erit in GE, alias DC secaret; utrumque contra hypothefin: erit ergo in GH. Intelligantur nunc puncta A & C magis appropinquare ad B; magis itaque accedent etiam ad se invicem puncta H & G, ut ita arctius limitetur punctum contactus; si ergo A & C coincident in B, concurrent quoque G & H, adeo ut contactus plane determinatus sit, nimirum in concursu punctorum G & H. Liceat concursum hunc appellare *punctum concurrentiæ*, quod in hoc speciali exemplo ita comparatum est, ut unica linea EB per illud duci possit, quæ sit æqualis ipsi conterminæ KB; cum per quodlibet aliud punctum G, vel H, cis vel ultra punctum concurrentiæ, semper duæ lineæ EB & DC, vel EB & AF duci possint, ita ut tam  $KC = KB$ , quam  $KB = BE$ , vel tam  $KA = AF$ , quam  $KB = BE$ .

Num.  
XLVI.

Quod hætenus dictum est de puncto concurrentiæ in radio reflexo EB, pariter etiam intelligendum erit de omnibus aliis, in radiis reflexis, FA, DC &c. Ideoque problema propositum huc recidit: *Invenire naturam Curvæ, quam formant puncta concurrentiæ radiorum reflexorum.*

Ad hoc investigandum, ponatur more *Cartesiano* [Figura 3.]  $AB = x$ , perpendicularis  $BC = y$ ,  $AK = a$ : invenienda itaque est CD, quæ si producat ad E, DE sit  $= AE$ ; & resultans æquatio habebit duas radices æquales, quia supponitur C esse punctum concurrentiæ, per quod, scil. unica linea DE ducitur, ita ut sit  $= AE$ : ponatur ergo  $CD = z$ , &  $AE [ED] = m$ ; erit  $CE = m - z$ ,  $BE = \sqrt{(mm - 2mz + zz - yy)}$  &  $AE = AB - BE = x - \sqrt{(mm - 2mz + zz - yy)} = m$ ; reducta æquatione invenitur  $m = (xx - zz + yy) : (2x - 2z)$ ; porro quia  $\sqrt{(aa - xx)} = GB$ , erit  $GC \times GH [DC \times CF] = aa - xx - yy$ ; proinde  $CF = (aa - xx - yy) : z$ , &  $DF = (aa - xx - yy + zz) : z$ , &  $EF = (aa - xx - yy + zz) : z - m$ , ideoque  $DE \times EF = [KE \times KI] = aa - mm = (aa - xx - yy + zz) m : z - mm$ ; invenietur ergo  $m = aaz : (aa - xx - yy + zz) = (xx - zz + yy) : (2x - 2z)$ ; reducta æquatione habetur  $z^4 - 2xxz^2 + 2aaxz + x^4 = 0$

Hæc æquatio duas radices æquales habens multiplicetur per duas progressionem arithmeticas.

$$\begin{array}{r} -0, -1, -2, -3, -4 \qquad +4, +3, +2, +1, +0, \\ z^4 * -2xxz^2 + 2aaxz + x^4 = 0 = z^4 * -2xxz^2 + 2aaxz + x^4 \\ \quad -2yyz^2 \qquad +2xxyy \qquad -2yyz^2 \qquad +2xxyy \\ \quad -aaz^2 \qquad +y^4 \qquad -aaz^2 \qquad +y^4 \\ \qquad -aaxx \qquad \qquad -aaxx \\ \qquad -aayy \qquad \qquad -aayy \end{array}$$

Jac. Bernoulli Opera.

O o o

prove-

Num.  
XLVI.provenient duæ æquationes  $\odot$  &  $\wp$ 

$$\odot \quad \begin{array}{r} 4xxz - 6aaxz - 4x^3 = 0 = 4z^3 * \\ + 4yyz \quad - 8xxyy \quad - 4xxz + 2aaxz \wp \\ + 2aaz \quad - 4y^3 \quad - 2aaz \\ \quad + 4aaxx \\ \quad + 4aayy \end{array}$$

multiplicetur  $\odot$  per  $z$ , &  $\wp$  per  $(xx+yy+aa):z$ , provenit

$$\begin{array}{r} 4xxz^2 - 6aaxz^2 - 4x^3z = 0 = 4xxz^2 * - 4x^3z + 2aax^3 \\ + 4yyz^2 \quad - 8xxyyz \quad + 4yyz^3 \quad - 8xxyyz + 2aaxy^3 \\ + 2aaz^3 \quad - 4y^3z \quad + 2aaz^3 \quad - 4aaxxz + a^3x \\ \quad + 4aaxxz \quad - 4y^3z \\ \quad + 4aayyz \quad - 4aayyz \\ \quad - a^3z \end{array}$$

quarum hanc ab illa si subtrahas, residuum per  $aa$  divisum, erit

$$\wp \quad \begin{array}{r} 6xxz - 8xxz + 2x^3 = 0 \\ - 8yyz + 2xyy \\ - aaz + aax \end{array}$$

multiplicetur  $\odot$  per  $3x$ , &  $\wp$  per  $2xx + 2yy + aa$ , habebitur

$$\begin{array}{r} 12x^3z - 18aaxz - 12x^3 = 0 = 12x^3z - 16x^3z + 4x^3 \\ + 12xyyz \quad - 24x^3yy \quad + 12xyyz - 32xxyyz + 8x^3yy \\ + 6aaxz^2 \quad - 12xy^3 \quad + 6aaxz^2 - 16y^3z + 4aax^3 \\ \quad + 12aax^3 \quad - 10aaxxz + 4xy^3 \\ \quad + 12aaxy \quad - 10aayyz + 4aaxy \\ \quad - a^3z + a^3x \end{array}$$

subtractione peracta, residuum est

$$\mathbb{C} \quad \begin{array}{r} 16x^3z - 16x^3 = 0 \\ + 32xxyyz - 32x^3yy \\ + 16y^3z - 16xy^3 \\ - 8aaxxz + 8aax^3 \\ + 10aayyz + 8aaxy \\ + a^3z - a^3x \end{array}$$

multiplicetur  $\wp$  per  $z$ , &  $\wp$  per  $\frac{1}{2}x$ , habebitur

$$\begin{array}{r} 6xz^3 - 8xxz^2 + 2x^3z = 0 = 6xz^3 * - 6x^3z + 3aaxx \\ - 8yyz^2 + 2xyyz \quad - 6xyyz \\ - aaz^2 + aaxz \quad - 3aaxz \end{array}$$

&amp; sub-

& subtractionis residuum erit

Num.  
XLVI.

$$\begin{aligned} 8xxz - 8x^1z + 3aax &= 0 \\ + 8yyz - 8xyz \\ + aaz - 4aax \end{aligned}$$

quod si subtrahatur ex duplo  $\odot$ , residuum erit

$$\begin{aligned} 3aaz - 8aax - 8x^4 &= 0 \\ + 8x^1z - 16xxy, \\ + 8xyz - 8y^4 \\ + 5aax \\ + 8aay \end{aligned}$$

hoc multiplicetur per  $2x$  &  $2$  per  $aa$ , erit

$$\begin{aligned} 6aaxz - 16aaxz - 16x^5 &= 0 = 6aaxz - 8aaxz + 2aax^3 \\ + 16x^1z - 32x^1yy & - 8aayyz + 2aaxy \\ + 16xxyz - 16xy^4 & - a^1z + a^1x \\ + 10aax^3 \\ + 16aaxy \end{aligned}$$

residuum

$$\begin{aligned} \text{Q} \quad 8aaxz + 16x^5 &= 0 \\ - 16x^1z + 32x^1yy \\ - 16xxyz + 16xy^4 \\ - 8aayyz - 8aax^3 \\ - a^1z - 14aaxy \\ + a^1x \end{aligned}$$

addantur nunc  $\text{Q}$  &  $\text{C}$ , & dividendo per  $2yy$ , habebitur  $8xz + 8yz + aaz - 3aax = 0$ , ideoque erit  $z = 3aax : (8x + 8y + aa)$ , & per æquationem  $\text{Q}$  est  $z = (16x^5 + 32x^1yy + 16xy^4 - 8aax^3 - 14aaxy + a^1x) : (8aax - 16x^1 - 16xxy - 8aay - a^1)$ . Multiplicando per crucem, & reducta æquatione ad cyphram orietur tandem

$$\begin{aligned} 64x^6 - 48aax^4 + 12a^1xx - a^6 &= 0 \\ + 192yyx^4 - 96aayyx - 15a^1yy \\ + 192y^1xx - 48aay^4 \\ + 64y^6 \end{aligned}$$

Hæc, quæ vera est æquatio naturam curvæ determinans, ad pauciores dimensiones reduci nequit, cum per positionem  $y = \frac{1}{2}a$ , æquatio  $256x^6 - 27a^6 = 0$ , irreducibilis oriatur; unde consequitur, diversam esse ab

O o o 2

ea,



Num. ea, quam applicatæ semicirculi in punctis bisectionum formant, ut pote  
XLVI. cujus natura per æquationem biquadraticam exprimitur (\*)

$$\begin{aligned} 16x^4 - 8aaxx + a^4 &= 0 \\ - 8ayxx - 2a^3y \\ + 16yyxx + aayy \end{aligned}$$

Haud absimili modo invenitur natura curvæ ABC, (Fig. 4) quæ talis est, ut a quocunque curvæ puncto B tangens utrinque protensa, & a cruribus anguli recti FA, FC intercepta, ED, sit æqualis constanti datæ. Invenio namque pro æquatione naturam curvæ exprimente [posito FG = x, GB = y, ED = a] (c)

$$\begin{aligned} x^6 - 3aax^4 + 3a^4xx - a^6 &= 0 \\ + 3yyx^4 + 21aayyxx + 3a^4yy \\ + 3y^4x^2 - 3aay^4 \\ + y^6 \end{aligned}$$

Curvæ autem portio BC [ut & hoc moneam] æqualis est  $\frac{1}{3}$  BD, proinde longitudo totius curvæ ABC æquatur  $\frac{1}{3}$  AF vel  $\frac{1}{3}$  ED.

Insuper natura curvæ CKIH, quæ ex evolutione curvæ ABC describitur

(b) Est enim FH = FG +  $\frac{1}{2}$ GD = FG +  $\frac{1}{2}$ FD -  $\frac{1}{2}$ FG =  $\frac{1}{2}$ FD +  $\frac{1}{2}$ FG vel 2FH = FD + FG. Sed posita AE = a, FH = x, AF = y, est FD =  $\sqrt{(aa - yy)}$  & FG =  $\sqrt{(ay - yy)}$ . Ergo 2x =  $\sqrt{(aa - yy)} + \sqrt{(ay - yy)}$ , aut 4xx = aa - yy + ay - yy + 2 $\sqrt{(aa - yy)(ay - yy)}$ , & (4xx - aa - ay + 2yy)<sup>2</sup> = 16x<sup>4</sup> - 8aaxx + a<sup>4</sup> - 8ayxx + 2a<sup>3</sup>y + aayy + 16xxyy - 4aayy - 4ay<sup>4</sup> + 4y<sup>4</sup> = 4a<sup>3</sup>y - 4aayy - 4ay<sup>4</sup> + 4y<sup>4</sup>, quæ ad cyphram reducta ipsissima est Auctoris æquatio.

(c) Dicatur insuper FD = z, & erit GD = z - x, atque EF<sup>2</sup> = ED<sup>2</sup> - DF<sup>2</sup> = aa - zz. Igitur, propter BG parallelam FE, erit EF<sup>2</sup> [aa - zz] : FD<sup>2</sup> [zz] = BG [yy] : GD<sup>2</sup> [zz - 2xz + xx]. ideoque aazz - x<sup>4</sup>

- 2aaxz + 2xz<sup>3</sup> + aaxx - xzz = yyzz, quæ ordinata, & per duplicem progressionem arithmeticam multiplicata, post varias reductiones, eliminata z, tandem dabit æquationem Auctoris nostri. Sed ea multo facilius, per Calculum infinitesimallem obtineatur. Videatur *Analysis infin. parvorum* March. HOSPITALII, §. 152. sq. ubi ostenditur FG [x] = z<sup>3</sup> : aa, ideoque GD = z - z<sup>3</sup> : aa = (aa - zz) z : aa, nec non GB [y] = (aa - zz)  $\sqrt{(aa - zz)}$  : aa, propter FD : GD = EF : GB: unde eliminata z, habetur æquatio Auctoris nostri. Vide ibidem demonstratas plerasque hujus curvæ, & ejus evolutæ proprietates.

bitur, [posito  $FG = x$ ,  $GI = z$ ] exprimitur per hanc æquationem <sup>(4)</sup>. Num. XLVI.

$$4x^6 - 12aax^4 + 12a^4xx - 4a^6 = 0 \\ + 12zzx^4 - 24aazxx + 12a^4zz \\ + 12z^4xx - 15aaz^4 \\ + 4z^6.$$

Curvæ hæ habent hanc proprietatem insignem: Spatium curvilineum BDC est ad spatium curvilineum DKC ubique ut 4 ad 5.

Facta  $FL$  &  $FM = \frac{2}{3} AF$  seu  $FC$ , ductisque  $MN$  &  $LN$  parallelis  $FC$  &  $AF$ : erit punctum concursus  $N$  centrum gravitatis curvæ  $ABC$ .

Facta vero  $FO = \frac{2}{3} FG$ , erit centrum gravitatis portionis  $AB$  in linea parallela  $OP$ .

Facta  $FQ = \frac{2}{3} GB$ , erit centrum gravitatis portionis  $BC$  in linea parallela  $QR$ .

Cæterum animadvertit *Clarissimus Frater*, methodum hanc posse generalem effici, & adhiberi ad determinandas naturas omnium Evolutarum & Causticarum, hoc est curvarum, quæ per intersectiones perpendicularium aut radiorum reflexorum formantur: Etenim si duæ rectæ [ *Figura V* ]  $BD$ ,  $CD$ , fingantur esse perpendiculares ad curvam  $ACB$ , vel radiorum incidentium  $LB$ ,  $LC$  reflexi, interfecantes sese in communi puncto  $D$ ; sequitur utique, quod vice versa ex dato puncto  $D$  duæ quoque hujusmodi lineæ inflecti possint, quæ sint vel perpendiculares curvæ  $AB$ , vel reflexi radiorum in punctum  $L$  vergentium. Quo circa, si rectæ  $AE$ ,  $ED$ , utut indeterminatæ, considerentur tantisper ut cognitæ & determinatæ; hoc est, punctum  $D$  ut datum, & quærat exinde longitudo  $z$ , puta ipsius  $DB$  vel  $BL$ , vel  $BG$ , vel  $AG$  [ prout hoc illudve simplicius videbitur ] habebit æquatio, longitudinem  $z$  exprimens, duas radices æquales quidem, sicubi puncta  $B$  &  $C$  indistantia, hoc est, punctum  $D$  in curva optata fuerit: quare, si porro dicta æquatio nota methodo tractetur, & eliminetur ex illa littera  $z$ , resultabit alia, quæ relationem indeterminatarum  $x$  &  $y$ , sive rectarum  $AE$ ,  $DE$ , adeoque naturam curvæ quæsitæ exhibet. E quibus concludit, Geometriam vulgarem, si dextre adhibeatur, posse nonnunquam ad ea quoque problemata extendi, quæ absque reconditiore indivisibilium Geometria solvi non posse credebantur; quanquam cætera cum hac neutiquam comparari mereatur. Speciatim annotat, evolutam Parabolæ expeditiori calculo sic inveniri, quam nuper illam ope methodi infinite parvorum repererat. Positis enim

O o o 3

Latere

(4) Demissa ex  $K$  normali  $KS = s$ ,  $= x - z$  atque  $KS [s] = \frac{1}{2} BG$  & vocata  $FS = x$ , quoniam  $BK = (aa - zz) \sqrt{(aa - zz) : 2aa}$ ;  $= BC = \frac{1}{2} BD$ , erit  $DK = \frac{1}{2} BD$ , unde, eliminata  $z$ , habetur æquatio. &  $DS = \frac{1}{2} GD = [aa - zz] z : 2aa$

Num.  
XLVI.

Latere recto  
Parab.  $= a$

$$AI = \frac{1}{2} a$$

$$IE = x$$

$$ED = y$$

$$BG = z$$

$$\text{erit } AG = zt : a$$

$$GF = \frac{1}{2} a$$

$$EF = ay : 2z$$

$$AI + IE = AG + GF + FE$$

$$\frac{1}{2} a + x = zt : a + \frac{1}{2} a + ay : 2z$$

$$x = zt : a + ay : 2z$$

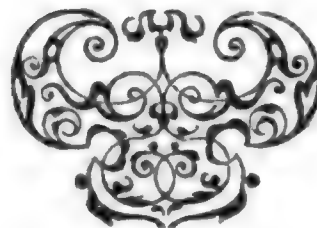
$$\begin{array}{ccccccc} 2z^3 & * & - & 2axz & + & aay & = 0 = 2z^3 & * & - & 2axz & + & aay \\ 0 & 1 & & 2 & & 3 & & 3 & 2 & 1 & & 0 \end{array}$$

$$-4axz + 3aay = 0 = 6z^3 - 2axz$$

$$z = 3ay : 4x \quad 3zz = ax$$

$$zz = 9aayy : 16xx \quad zz = ax : 3$$

$$\text{Unde } 9aayy : 16xx = ax : 3 \text{ \& } 27aayy = 16x^3$$



Nº. XLVII.



N°. XLVII.

## ADDITAMENTUM

## AD SOLUTIONEM

## CURVÆ CAUSTICÆ

Fratris JOANNIS BERNOULLI,

*Una cum Meditatione de Natura Evolutarum,  
& variis osculationum generibus.*

**A**Ntequam *Frater* hanc suam lucubratiunculam *Geneva* mihi transmisisset, pervenit ad Nos *September Actorum*,  
ubi Celeberrimus LEIBNITIUS in excussione *Solutionum Problematis Catenarii* [ de quarum pulchro consensu nobis multum gratulamur ] occasionem captat recordandi subtilissimæ suæ *Meditationis de Contactu* [ quem significanter vocat ] *osculi*, \* memorando HUGENIUM primum animadvertisse, quod centra circulorum curvas osculantium perpetuo incidant in lineas istas, quas proxime contemplati sumus, eas scilicet, ex quarum evolutione illæ describuntur. Qua occasione Evolutas aliter reperire, insimulque osculorum naturam Geometris paucis hætenus satis perspectam, plenius cognoscere didici; quod jam ostendo. Pono iterum [ Tab. XVII. N°. 46. Fig. 5. ]  $AE = x$ ,  $ED = y$ ,  $DB = z$ , &  $BG$ , vel  $AG = u$ : consideroque tres priores

*Act. Erud. Lips. 1692. Mart. pag. 110.*

\* G. G. L. *Meditatio nova de Natura anguli contactus & osculi, horumque usu in practica Mathesi, ad figuras faciliores succedaneas difficultioribus substituendas.* Acta Erud. Lips. 1686. Jun. pag. 289.

Num. XLVII. priores ut datas, hoc est, super puncto dato D concipio descriptum esse circulum radio DB, & quæro exinde per naturam curvæ ACB quartam  $u$ , cujus valor exprimetur per æquationem tot dimensionum, in quot diversis punctis circulus iste curvam secat, vel secare potest. Sint duæ intersecções proximæ B & C, ac intelligatur super D novus describi circulus, radio continuo majori vel minori, quousque puncta B & C propius subinde cocuntia tandem in unum coalescant, quod sit B; quo facto & ipsæ CH & BG uniuntur, radixque æquationis  $u$  duos æquales valores acquirit, radius vero DB fit curvæ perpendicularis, ipsamque cum secasset antea, nunc tangit circulus: ad quem proin contactum inveniendum multiplico repertam æquationem per progressionem arithmeticam, & quod provenit cum dicta æquatione [aliave per aliam progressionem arithmeticam similiter quæsita] methodo, qua supra usus est *Frater*, confero, ut eliminata littera  $u$  habeam æquationem inter  $x$  &  $y$  [quam tamen necessario etiam ingreditur  $z$ ]. Quare si hac data manente, cæteræ  $x$  &  $y$  spectentur ut indeterminatæ, denotabit æquatio ultima lineam, in qua sumpto ubivis puncto D, circulus super illo descriptus radio constanti DB curvam AB tangit. Quod si nunc radius DB, sive  $z$ , continuo major minorve assumatur, nascentur subinde aliæ curvæ infinitæ, quæ omnes inter se & principali AB erunt parallelæ, ceu eodem constanti intervallo perpendiculari DB ab illa distantes, hacque inter se affinitate gaudent, quod ab evolutione ejusdem curvæ ID per filum DB [in infinitum, si vis, ex parte B productum] facta simul omnes describantur; unde principali AB *condescriptæ* dici possunt.

Porro si circulus OCBPQS [ut in ea quam hic sistimus figura 1 Tab. XVIII. N<sup>o</sup>. 47.] præter contactum curvæ TCBPRS in puncto B, eandem insuper secat alibi in punctis C, P, S, ab alterutra vel utraque parte: tum fluere intelligatur centrum D in recta indefinita DB, & novi subinde concipiantur circuli per B transeuntes; sic manebit quidem contactus singulorum cum curva fixus in B, at intersecções reliquæ erunt ambulatoriæ, permeabuntque omnia curvæ puncta: nimirum si circulus curvam tan-

gat

gat exterius in B, & centrum D fluat versus idem punctum : aut N. XLVII  
 si tangat illam interius, & recedat centrum ab eodem, futurum  
 utroque modo, ut intersectiones P, C, contactui B proximæ huic  
 continuo appropinquent, quousque alterutra earum, puta C, in  
 illum incidat, & sic duabus intersectionibus, quibus contactus B  
 æquivalet, tertiam jungendo, osculum primi gradus efficiat : ubi  
 hoc singulare evenit, quod postquam C cum B coaluit, [ P  
 nondum attingente ipsum B, vel etiam nulla existente intersec-  
 tione P, ] arcuum circuli CO [ hoc est, BCO ] & BP alter ab intra,  
 alter ab extra curvam osculatur, eamque adeo revera secatur, non  
 tangit; ipso contactus genere perfectiori contactum quasi destruen-  
 te, & in sectionem transformante. Quod si durante fluxu puncti  
 D per rectam BD contingat, ut ambæ intersectiones C & P eo-  
 dem momento ad punctum B appellent [ quod accidit, cum por-  
 tiones curvæ BC, BP, aut prorsus similes sunt, aut saltem in  
 partibus suis minimis ipsi B proximis eandem flexionem, curvedi-  
 nem, seu declivitatem habent, ] tum circulus curvam in puncto  
 B excipiet osculo secundi gradus; coincidentibus ibidem quatuor  
 intersectionibus, sed sectione jam iterum in contactum abeunte;  
 vel potius [ quia ob simultaneum appulsus punctorum C & P  
 nulla in B sectio præcessit ] ipso contactu externo tantum in in-  
 ternum verso, aut vicissim; qui vero altera vice sectionis natu-  
 ram indueret, si quinta intersectio accederet, & denuo rediret in  
 contactum, ubi sexta. In genere osculationes graduum a numero  
 impari denominatorum sunt sectiones, a pari contactus. Jam ve-  
 ro tametsi ulteriori fluxu puncti D per rectam BD, circuli, quorum  
 centrum est, crescere vel decrescere pergant, nulla amplius reliqua-  
 rum intersectionum osculo in B addi potest; præterquam enim quod  
 intersectiones P & C in contactu B non stabiles manent, sed ex  
 eodem subinde emergentes ad oppositas curvæ partes prorepunt,  
 aut prorsus evanescent; cæteræ [ qualis S ] a contactu B perpe-  
 tuo longius recedere coguntur; tantum abest ut ei appropinquent:  
 ad hoc enim efficiendum requireretur, ut novi isti circuli, ima-  
 ginatione supplendi, curvam nostram & prius ipsum circulum hic  
 expressum [ quem in B tangere supponuntur ] alicubi inter B & S

Num.  
XLVII.

secarent, quod absurdum: unde discimus, quod si circulus quamcumque curvam primi vel secundi gradus osculo amplectitur, nullus alius circulus inter ipsum curvamque duci potest. Secus sentiendum de hyperbolis & ellipsis: quia enim duæ hyperbolæ, vel ellipses duorum laterum cum transversum recti, in vertice se tangentes, in duobus quoque aliis punctis se secare queunt, fieri potest, ut dum una earum, fluxu lateris sui, ampliatur, vel contrahitur; alteram tandem osculo secundi gradus salutare incipiat, collectis in ipso vertice duabus illis intersectionibus; quod contingit, ubi ambo recta latera æquata fuerint: quo circa substituta, in schemate nostro, loco circuli hyperbola, quæ propositam curvam  $T C B P R$  itidem secundi gradus osculo amplectatur, & eandem præterea secet alibi, poterunt utique duæ intersectiones proximæ, hinc inde existentes, fluxu transversum lateris ad punctum  $B$  adduci, osculumque sic duobus gradibus perfici; quippe quod, manente latere recto, interea non turbari potuit: atque tum inter hyperbolam & curvam alteram nulla amplius hyperbola interjici poterit. At hoc non impedit, quominus altera curvarum [quam magis compositam supponimus] ampliacione vel contractione sui inter angulum osculi  $R P Q$  se insinuare, & sectionem  $S$  ad punctum  $P$  vel  $B$  adducendo perfectiorem congressum efficere valeat. Osculum duarum curvarum, quod fluxu solius simplicioris curvæ dividi amplius nequit, dicetur osculum *completum*; quod fluxu neutrius ita dividi valet, ut alibi nova curvarum sectio oriatur, *coitus* appellabitur. Curva curvam *complete* tum osculatur, cum illam tanti gradus osculo complectitur, quot ordinarie punctis *aliam sui nominis* secare potest, quanquam inferior gradus sufficere possit. Ita parabola aliam parabolam quatuor quidem punctis secare potest; at quia nunquam omnes hæ quatuor intersectiones coalescere possunt, fit ut si quam curvam secundo, nonnunquam etiam primo tantum gradu osculatur, jam complete osculetur: uti circulus quamcumque curvam osculatur, complete osculatur; uti recta quamcumque tangit, complete tangit; hyperbolæ vero vel ellipsis osculum, nisi tertiæ, vel quartæ sit perfectionis, completum non est. Quod si omnes intersectiones,



nes, quibus alias datæ curvæ se mutuo secare possunt, in unum <sup>Num.</sup> punctum confluant, oritur *coitus*, qui est consummatissimus earum congressus, quo quam maxime fieri potest, sibi assimilantur vel uniuntur; quanquam in diversis curvarum generibus unus alio perfectior esse possit; nec datur perfectissimus, nisi fortasse curvarum congruentiam perfectissimum coitum appellare velis.

XLVII.

Jam vero, relictis superiorum graduum osculis, ad considerationem Evolutarum descendamus, reassumpto, in eundem finem, primi gradus osculo. Hoc quia consistit in concursu trium intersectionum, pono nuperam æquationem pro his intersectionibus inventam habere tres radices æquales, eamque bis multiplico per progressionem arithmeticam, aut brevius semel per productum duarum, & quod resultat, cum alia, aliisve, per productum duarum progressionum similiter quæsitis æquationibus varie conféro, donec elisa, non tantum littera  $u$ , sed & ipsa  $z$ , æquationem inveniam, quam solæ  $x$  &  $y$  [ sed tamen ambæ necessario ] ingrediantur. Ea enim suppeditabit lineam, in qua sumptum quodvis punctum centrum esse potest circuli alicujus curvam propositam primo gradu osculantis, cujusque cum evoluta identitatem HUGENIUM notasse ex relatione Celeberrimi LEIBNITII constare supra diximus. Ipsa vero  $z$ , hoc est, radius circuli osculatoris, seu longitudo fili evolventis, ex se indeterminata, per ipsam  $x$  vel  $y$  determinationem accipit. Exemplum Parabolæ reassumo; Tab. XVII. N°. 46. Fig. 5.

$$\begin{array}{lll} \text{Lat. rect. Parab.} = a & DB = z & \text{crit } AG = uu : a \\ AE = x & BG = u & EG = [AE - AG] = x - uu : a \\ ED = y & & BG + DE = u + y \end{array}$$

$$EGq + (BG + DE)q = DBq$$

$$u^4 : aa - 2xu^2 : a + xx + uu + 2yu + yy = zz,$$

P p p 2

hinc

Num. XLVII.  $u^4 * - 2axu^2 + 2aayu + aaxx = 0$  hinc  $u^4 * - 2axu^2 + 2aayu + aaxx = 0$

$+ aau^2$ $+ aayy$ $- aazx$	$+ aau^2$ $+ aayy$ $- aazx$
<hr/> 0 — 1 — 2 — 3 — 4 <hr/> 4. 3. 2. 1. 0 <hr/> 0. — 3. — 4. — 3. 0 <hr/> + 8axu — 6aay = 0 — 4aa five $u = 3ay : (4x - 2a)$	<hr/> 4. 3. 2. 1 0 <hr/> 3. 2. 1. 0 — 1 <hr/> 12. 6. 2. 0 0 <hr/> 12uu * — 4ax + 2aa $uu = (2ax - aa) : 6$

five ponendo  $t = x - \frac{1}{2}a$   
 $u = 3ay : 4t$ , &  $uu = 9aayy : 16tt = at : 3$   
unde  $27aayy = 16t^3$ .

Ad inveniendum circulum, qui curvam propositam secundo gradu osculetur, coincidentibus in puncto osculi quatuor intersectionibus, pono æquationem habere quatuor radices æquales, eamque multiplico per productum trium progressionum arithmeticarum, quod aliquoties repeto; donec via constet, non tantum ipsas  $u$  &  $z$ , sed alterutram quoque ipsarum  $x$  vel  $y$  ex æquatione eliminandi: sic reliqua determinata erit, & per ipsam etiam cæteræ determinabuntur. Itaque non nisi definitus existit circulorum numerus, qui curvam quampiam secundi gradus osculo complecti possunt, secus ac illorum, qui eandem duntaxat primo gradu osculantur. Centra vero horum circulorum non possunt alibi quam in ipsis evolutis existeret, quandoquidem quatuor radices æquales etiam tres, & osculatio perfectior imperfectiorem continet: non hærent autem in mediis evolutarum partibus, quia circulus osculator super quovis evolutæ puncto intermedio descriptus, curvam necessario secat contra naturam osculi secundi gradus. Sit  $N$  centrum,  $NB$  radius circuli osculatoris, erit  $NB [= NM + MC] > recta NC$ : iterum sit  $M$  centrum &  $MC$  radius, erit  $MC [= NB - NM] < recta MB$ ; quare circulus osculator versus principium evolutionis jacet extra, versus finem intra curvam, ideoque secat. Hærent ergo centra illa in extremitatibus

mitatibus evolutarum, earumque mutuis contactibus: unde quot Num.  
XLVII. locis curva osculi secundæ perfectionis capax est [ est vero, ubi curveto ejus maxima est, vel minima ] tot requiruntur ad illam evolutione describendam aliæ curvæ, & una præterea. Ita semiparabola cubica AEG, [ Tab. XVIII. N°. 47. Fig. 2. ] ( in qua videlicet abscissæ AB sunt ut cubi ordinarum BE ) tametsi in eandem partem cava sit, nec pars ejus ulla similis alteri, non potest unius solius curvæ evolutione tota describi, sed requiruntur duæ, quarum una DH, axi AC asymptotos, inservit describendæ portioni EA, altera DI portioni EG, quæque communi extremitate sua D centrum definiunt circuli, curvam in E secundo gradu osculantis. Reperitur autem circulus hic osculator (posito latere recto Parabolæ 1) faciendo  $AC = \frac{2}{3} \sqrt{\sqrt{45}}$ ;  $CD = 2 : 5 \sqrt{\sqrt{45}}$ ;  $DE = \frac{1}{3} \sqrt{\sqrt{\frac{4}{3}}}$ , ut fiat  $BE = 1 : \sqrt{\sqrt{45}}$ . (\*)

Summatim dicta recolligo: *Contactus simplex circuli & curvæ* cujuscvis invenitur per *duas* radices æquales, & locus centri ejus

P p p 3

est

(\*) Si, juxta methodum Auctoris, dicatur AC, x; CD, y; ED, z; BE, u; & ideo AB,  $u^3$ ; cum sit  $BC^2 + (BE - CD)^2 = DE^2$ , habebitur æquatio  $u^6 - 2xu^3 + xx + uu - 2yu + yy = zz$ , seu

$$u^6 - 2xu^3 + uu - 2yu + yy = 0$$

$$+ xx$$

$$- zz$$

quam si multiplices 1°, per 90, 40, 12, 0, — 2, 0, 0 productum ex 3 progr. arith.

$$\begin{array}{cccccc} 6. & 5. & 4. & 3. & 2. & 1. & 0 \\ 5. & 4. & 3. & 2. & 1. & 0 & - 1 \\ 3. & 2. & 1. & 0. & - 1. & - 2. & - 3 \end{array}$$

habebis  $90u^6 - 2uu = 0$ , seu  $u^4 = \frac{1}{45}$  aut  $u = 1 : \sqrt{\sqrt{45}} = BE$  At si dictam æquat. multiplices 2° per

$$120, 60, 24, 6, 0, 0, 0,$$

productum ex 3. progr. arithm.

$$\begin{array}{cccccc} 6. & 5. & 4. & 3. & 2. & 1. & 0 \\ 5. & 4. & 3. & 2. & 1. & 0. & - 1 \\ 4. & 3. & 2. & 1. & 0. & - 1. & - 2 \end{array}$$

habebis  $120u^6 - 12xu^3 = 0$ , vel  $x = 10u^3 = 10u^4 : u = \frac{10}{13} \sqrt{\sqrt{45}} = \frac{2}{3} \sqrt{\sqrt{45}} = AC$ .

Denique, si hanc multiplices per 72, 30, 8, 0, 0, 2, 0 productum ex 3. progr. arithm.

$$\begin{array}{cccccc} 6. & 5. & 4. & 3. & 2. & 1. & 0 \\ 4. & 3. & 2. & 1. & 0. & - 1. & - 2 \\ 3. & 2. & 1. & 0. & - 1. & - 2. & - 3 \end{array}$$

habebis  $72u^6 - 4yu = 0$ , vel  $y = 18u^5 = 18u^4 : u = \frac{18}{43} \sqrt{\sqrt{45}} = 2 : 5 \sqrt{\sqrt{45}} = CD$ .

ED vero, seu z; cum sit  $zz = (x - u^3)^2 + (u - y)^2 = (\frac{2}{3} \sqrt{\sqrt{45}})^2 + (3 : 5 \sqrt{\sqrt{45}})^2 = \frac{2}{3} \sqrt{\sqrt{\frac{4}{3}}}$ ; erit  $z = \frac{1}{3} \sqrt{\sqrt{\frac{4}{3}}}$ .

Num.  
XLVII.

est ad infinitas lineas condescriptas, hoc est, *superficiem*: *Osculum primi gradus* reperitur per *tres* radices æquales, & locus centri osculantis circuli est ad *lineam* [scilicet *Evolutam*]. *Osculum secundi gradus* indagatur per *quatuor* radices æquales, & locus centri osculantis est ad *punctum*, vel *puncta* [Evolutarum scilicet extremitates].

Quæ cum ita se habeant, difficulter capio, quo sensu verum esse possit, quod dicitur, (\*) *contactum inveniri per duas radices æquales, flexum contrarium per tres, & osculum primi gradus per quatuor, seu duos contactus coincidentes, &c.* Vidimus enim, in osculo primi gradus tres tantum intersectiones coincidere, non duos contactus, qui quatuor intersectionibus æquivalent: Potest quidem centrum osculatoris circuli seu punctum Evolutæ D [Tab. XVII. N°. 46. Fig. 5.] considerari ut concursus duarum curvæ perpendicularium minime distantium BD, CD; at tum reperitur, nec per tres, nec per quatuor, sed per duas tantum radices æquales, ut supra ex *Fratri* schediasmate liquet. Et quanquam si perpendiculares istæ habentur pro radiis circulorum centro D descriptorum, & per B & C transeuntium, catenus concursus harum perpendicularium spectari potest ut concursus duorum contactuum, nullo modo tamen per quatuor radices æquales, ex nostra æquatione elicietur; quoniam eo sensu quantitas  $z$  fit indeterminata, hoc est, ipsæ DB, DC, quæ deberent poni radii ejusdem circuli, inæquales redduntur, illa hac perpetuo minore existente, siquidem  $BD + DN = BN = NM + MC < ND + DC$ ; adeoque  $DB < DC$ .

Quod flexum contrarium spectat, is revera per tres æquales radices invenitur, at non aliam ob causam, quam quod ejus inventio casus tantum specialis est generalis inventionis osculationum primi gradus: in omni enim flexu contrario circulus osculator

(\*) A LEIBNITIO in *Meditatione* superius laudata. Videatur Nus. LV.

lator abit in lineam rectam, & fit radii infinite magni; (\*) quamquam non vicissim, ubicunque circulus osculator infinite magnus est, ibi requiritur flexus in contrarium. In Paraboloidibus omnibus [excepta Parabola communi] circulus osculator verticis infinite magnus, veruntamen nonnisi in illis, quorum potestates a numero impari denominantur, flexus contrarius supervenit, ceteræ ubique versus easdem partes curvæ manent.

(\*) Exceptiones patitur hæc Propositio, de quibus videatur Num. LXXVI.



Nº. XLVIII.

JACOBI BERNOULLI

*Mathematicum Professoris  
Basileensis*

CURVATURA VELI.

*In literis ejus d. 9. Martii hujus Anni,  
Lipsiam perscriptis communicata.*

EX iis, quæ celeb. Dn. LEIBNITIUS \* & ego †, superiori anno, de Loxodromiis Nauticis in lucem emisimus, colligi potest, quod si verus Navis cursus, ejusque velocitas semper cognita essent, omnia data haberentur, supputarique ad quodvis momentum posset, ubi terrarum Navis versetur; in quo consistit

*Act. Erud.  
Lips. 1691.  
Mai. p. 103*

\* *Acta Erud. Lips.* 1691. April. pag. 181.

† Supra, Nº. XLII.

tit ultima Histiōdromices perfectio, & desideratissimum Longitudinum Problema. At illa duo cognosci nequeunt, nisi prius cognoscatur quantitas deviationis a plaga, in quam Navis dirigitur [ Gallis, *la dérive du Vaisseau* ] quæ vero nec ipsa haberi potest, nisi prius sciatur, juxta quam directionem Velum a vento impellatur; sed nec hæc determinari potest, nisi ipsa Veli Curvatura comperta habeatur,† adeo ut totius negotii certitudo tandem in cognitione *Figura Veli* terminetur; quæ quia huc usque latuit, efficit, ut Nautæ nondum optatum in his finem assequi potuerint, & fallacibus plerumque conjecturis deludantur.

Huic investigandæ cum me nuper applicuissem pertinacius, tandem, post aliquot conamina, voti compos factus fui, compereque [ ne curiosum Lectorem diu morer, ] Problema subtilissimum in ipsam *Funiculariam* desinere; adeo fuit in fatis, ut quæ figura conveniunt, in diversis linguæ nostræ Dialectis nomine quoque convenirent, idemque vocabulum *seyl* & Germanis *Funem*, & Belgis *Velum* significare debuerit. Præstitit hic etiam *Frater* aliquid, postquam ejus Methodum (significarat enim per litteras se calculum *Leibnitianum* plurimum perfecisse,) Problemate ad puram Geometriam reducto, velut specimine tentaturus, curvaturam Veli sub ista proprietate delitescentem ei communicassem: [ *Sumptis aequalibus Curvæ portiunculis, Cubi ex primis differentiis ordinatarum sunt proportionales secundis differentiis abscissarum* ] suppresso quo huc perveneram artificio; namque & ipse ex proprietate hac *Funiculariam* feliciter elicit.

Veruntamen etiamsi constet, Velum vento inflatum funis curvedinem inducere, hoc nondum sufficit, ad determinandum [ quod palmarium est ] juxta quam directionem, quaque vi a vento impellatur, nisi quoque constet, quibus suppositionibus usus fuerim, ut Problema a concreta Geometria ad puram reducerem, curvamque sub caracteristica hac proprietate exhiberem. Notum est, quod in theoria Artis Nauticæ, Velum considerari vulgo soleat instar Figuræ planæ, quæ a vento juxta directionem sibi perpendicularem impellatur: unde cum talis non sit, quid mirum,

† Imo, Vide Notam (p.)

mirum, si ex ficta hypothefi plerumque erroneæ, quandoque etiam cum inæstimabili hominum merciumque damno conjunctæ, conclusiones deducantur? Agnoscit hac in parte imperfectionem Artis Anonymus Gallus \* sub finem libelli egregii, quem *de la Théorie de la Manœuvre des Vaisseaux* inscriptum, ante paucos annos, jussu Regio edidit, monetque Velum in suis partibus, ob curvaturam suam, secundum varias directiones impelli, adeoque inter omnes directiones mediam quandam assumendam esse; at quænam illa sit, uti determinare non audet, sic per meras conjecturas æstimat, quod ego scientificè & accurate consequi docebo, & quidem ita, ut vel stupidissimus Nauta meas regulas deinceps in usum transferre possit, quas sequentibus Positionibus comprehendam. (\*)

\* Dnus Bern. RENAUD, cujus Vitam vide in *Hist. Acad. Reg. Scient. Paris. ad Annum 1719*. Excusus est liber *Paris. An. 1689. in 8. cum fig.* Vid. *Acta Erud. Lips. 1690. p. 388*.

[\*] Data est N°. XXXIX, æquatio generalis exprimens naturam Curvarum in quas flectitur filum ab innumeris potentiis singula ejus puncta urgentibus incurvatum. Quæ, ut ad filum ab incumbente fluido, vel ad labente inflexum applicetur, statuenda est, in eadem Fig. N. XXXIX. potentia BK perpendicularis ad Bb, quia pressiones fluidorum exeruntur per lineas ad superficiem pressam perpendiculares. Ideoque Triangula KBL & KBM erunt similia Tr. BbE, & sinus s anguli KBM = sinui dy : dz anguli bBE, atque sinus  $\sqrt{(1-ss)}$  anguli KBL = sinui dx : dz anguli BbE. Quibus in æquatione generali  $adx = dy spdz$

Fac, Bernoulli Opera,

1. Si  $+dxspdz \sqrt{(1-ss)}$  substitutis, ea reducitur ad  $adx - dxspdx = dy spdy$ . Hæc simplicior evadit, dividendo per dx,  $a - spdx = \frac{dy}{dx} spdy$ ; differentiando,  $-pdx = \frac{pdy^2}{dx} + \frac{dxddy - dyddx}{dx^2} spdy$ ; scribendo  $-dxddx : dy$  pro ddy [quia posita dz constante, diff. æquationis  $dz^2 = dx^2 + dy^2$  est  $0 = dxddx + dyddy$ ] ( $pdx^2 + pdy^2$ ) : dx =  $[dx^2ddx + dy^2ddx] spdy : dx^2dy$ ; dividendo per  $[dy^2 + dx^2] : dx^2$ ,  $pdx = \frac{ddx}{dy} spdy$ , vel  $pdy : spdy = ddx : dx$ . Igitur  $pdy = ddx$ , aut, [multiplicando homogeneitatis gratia, per b : dz]  $pdy = bddx : dz$ , vel  $pdydz = bddx$ .

Jam, tensio fili in B, quæ N°. XXXIX generaliter inventa est  $\frac{dz}{dx}$

Qq q

Num.  
XLVIII.



Num.  
XLVIII.

1. Si subtenſa veli EBF, [Fig. 1.] hoc eſt, per extremitates veli ducta recta E F lineæ directionis venti AB perpendicularis eſt, arcuatur velum in *Circuli ſegmentum*, cujus baſis EF, axis AB directioni venti parallelus. (b)

2. Vis qua velum juxta axem AB impellitur, componitur ex celeritate venti, & ſubtenſa veli. (c)

3. Hinc, ab eodem vento, eadem vi impelluntur vela EBF, ELF, quorum ſubtenſa eadem.

4. Et idem velum EBF majore vi impellitur, ubi diductis extremitatibus E & F in arcum majoris circuli tranſierit.

5. Celeritas navium eodem ſecundo vento velitantium, cæteris paribus, ſunt ut velorum ſubtenſæ.

6. Potentia ſuſtinens venti impetum, ſeu firmitas veli requiſita, ne rumpatur, in omnibus ejus punctis eadem eſt, & componitur ex celeritate venti & radio circuli. (d)

7. Hinc potentia impellens ad potentiam ſuſtinentem, ſeu agens ad patientem eſt, ut ſubtenſa veli ad radium.

8. Ve-

$\frac{dz}{dx} ſp dz$ , hic erit [propter  $s = dy$

$$: dz] \frac{dz}{dx} ſp dy = \frac{dz}{dx} \times \frac{b dx}{az} = b.$$

Eſt igitur ubique conſtans & uniformis. Sed in A ponebatur  $= a$ . Ergo  $b = a$ , & æquatio  $p dy dz = b dx$  evadit  $p dy dz = a dx$ .

Directio autem media biſecat angulum ATB, quia potentiæ per TA, TB trahentes, quæ ſunt tensiones ſili in A & B, ſunt æquales.

[b] In 9 prioribus §§. Auctor aſſumit hypotheſin, quam tamen ipſe poſtea [Nº. LXVI.] repudiavit, ſcil. preſſionem aeris, qui poſt apuſſum ad velum eſſluere nequit, undique æqualem eſſe: hoc eſt, aſſumit  $p$ , quæ celeritatem venti hic denotare poteſt, eſſe quantitatem

conſtantem. Ergo  $p dy dz = a dx$ , integrando fiet  $py dz = a dx$  vel  $yz dz = a dx : p$  & [quadrando, & pro  $dz$  ſcribendo  $dx^2 + dy^2$ ]  $yy dx^2 + yy dy^2 = a a dx^2 : p^2$ , unde eſt  $dx = y dy : \sqrt{(aa : pp - yy)}$ , quæ integrata dat  $a : p - x = \sqrt{(aa : pp - yy)}$ ; æquatio ad circulum cujus radius eſt  $a : p$ .

[c] Vis, qua velum juxta axem impellitur, æqualis eſt ſummæ preſſionum verticalium  $= ſp dy = py$ . Componitur itaque ex [ $p$ ] celeritate venti, & [ $y$ ] ſubtenſa (dimidia) veli. Hinc fluunt art. 3. 4. & 5.

[d] Firmitas, aut tenſio, ſili inventa eſt  $= z = p \times a : p$ . Componitur itaque ex [ $p$ ] celeritate venti, & [ $a : p$ ] radio circuli. Hinc. art. 7. 8. & 9.

8. Velum EBF minorem requirit firmitatem velo ELF, cu-  
jus major radius. Num.  
XLVIII.

9. Idemque velum EBF minus subit rupturæ periculum, si adductis suis extremitatibus curvetur in arcum minoris circuli.

10. Porro si velum EGB [Fig. 2.] super extremitatibus suis E & B ita sit expansum, ut per extremitatem B directioni venti AB ducta perpendicularis recta BD tangat velum in B; curvatur velum in *Funiculariam*, cujus vertex B, axis AB (\*)

11. Ut longitudo veli EGB ad axem BA; ita sinus totus BC, ad rectam CH tangentem anguli CBH, quem faciunt duæ lineæ directionis, una venti, altera secundum quam a vento velum impellitur. (†)

Qq q 2

12. Hinc

(\*) Nunc assumit Auctor aliam hypothefin, singulas nempe fili particulas Bb impelli venula, seu rivulo, ut ita dicam, aereo, cujus celeritas  $v$ , latitudo bE [dy]. Sumatur itaque  $Be = vdy$ , & ex pressione obliqua derivetur perpendicularis BK =  $vdy^2 : dz$  [Nam Bb [dz] : bE [dy] = Be [vdy] : BK]. Sed BK, in æquatione generali, vocabatur  $pdx$ , hic igitur  $p = vdy^2 : dz^2$ . Unde æqu.  $pdydz = addx$ , reducit ad  $dy^3 : dz = addx : v$ ; Quæ, multiplicata per  $dx : dy^3$  poterit integrari. Evadit enim  $dx : dz = adx : vdy^3 = adx : v \sqrt{(dz^2 - dx^2)^3}$ , cujus integralis est  $x : dz + a : vdz$  [constans addita, ut  $x$  &  $z$  simul evanescant] =  $a : v \sqrt{(dz^2 - dx^2)}$  =  $a : vdy$ . Ergo  $(x + a : v) dy = (a : v) dz$ , aut [quadrandò, & pro  $dz^2$  scribendo  $dy^2 + dx^2$ ]  $(xx + 2ax : v + aa : vv) dy^2 = (aa : vv) dy^2 + (aa : vv) dx^2$ ; unde  $dy = adx : v \sqrt{(2ax : v + xx)}$  quæ est æquatio ad *Funiculariam* vulgarem, cu-

jus Parameter =  $a : v$ . Vid. Not. ad N. XXXIX.

Quoniam autem  $dz = (x + a : v) dy : (a : v) = (x + a : v) dx : \sqrt{(2ax : v + xx)}$ , erit, integrando,  $z = \sqrt{(2ax : v + xx)}$  &  $2ax : v = 2z - xx$ ; atque  $dz : dy : dx = (x + a : v) : (a : v) : z$ ; id quod annotasse, utile erit in sequentibus.

(†) Media directio TZ bifecat angulum ATB. Huic si parallela ducatur BN, erit Isosceles Triangulum BbN. Nam ang. bBN = BTz = ATz = FBN = bNB. Igitur bN = bB = dz, & EN = bN - bE = dz - dy. Ergo BE [dx] : EN [dz - dy] = z : x +  $\frac{a}{v} - \frac{a}{v}$  = z[AB] : x[AF] hoc est, longitudo veli AB, ad axem AF, ut BE ad EN, vel, ut sinus totus ad tangentem anguli EBN quem faciunt directiones EB venti, & NB veli; hoc est, in fig. Auctoris, ut BC ad CH.

Num.  
XLVIII.

12. Hinc angulus directionis venti & impulsionis veli perpetuo semirecto minor.

13. Si recta BC sit Parameter & punctum C centrum funiculariæ, sumaturque portio veli BG=CH & per G ducatur recta FG parallela ipsi BH, erit hæc & curvæ perpendicularis, & simul linea directionis veli, & axis æquilibri impulsionum. (\*)

14. Eadem reperitur aliter, si velum ita secetur in G, ut segmentum EG se habeat ad segmentum BG, sicut aggregatum quadratorum EGB & AB ad differentiam eorundem. (b)

15. Producta recta FG transit per mutuum occursum rectarum BD, ED, extremitates veli B & E tangentium: hinc constat, quomodo ex concursu rectarum tangentium ED, BD ducenda sit perpendicularis ad funiculariam DF, quæ alias sine respectu ad velum habito difficulter inveniretur. (c)

16. Vis, qua velum secundum directionem suam FG, impellitur, componitur ex celeritate venti & differentia quadratorum EGB & AB applicata ad radicem aggregati eorundem. (b)

17. Hinc

(\*) Hactenus recte. Sed cum arbitraretur Auctor mediam directionem esse perpendicularem ad Curvam, quæsit punctum G in quo normalis ad curvam esset ipsi BH parallela, seu, in quo  $dy$  esset ad  $dx$  ut BC ad CH. Sed est ubique  $dy$  ad  $dx$  ut  $[a:v]$  Parameter BC ad arcum  $[z]$  BG. Ergo BC:CH=BC:BG. Igitur CH=BG. Unde quidem sequitur GF esse perpendicularem ad Curvam, & mediæ directioni parallelam. Sed non est ipsa media directio, quæ ad curvam obliqua N°. LXVI ostenditur. Errorem suum Auctor agnovit, & correxit, N°. LVIII & LXVI, quos vide.

(b) Quoniam BE  $[z]:BA[x]=BC[a:v]:BG=ax:vz$ , erit

$$\begin{aligned} EG [z-ax:vz] &= (zz-ax:v):z: \\ BG [(ax:v):z] &= zz- \\ \frac{ax}{v} : \frac{ax}{v} &= 2zz - \frac{2ax}{v} : \frac{2ax}{v} \quad [\text{scribendo } zz-xx \text{ pro } 2ax:v] = zz + xx : zz-xx. \end{aligned}$$

(i) Hic error ab Auctore agnitus & correctus N°. LXVI.

(b) Potentia TZ, seu vis, qua velum impellitur secundum directionem mediam, & tensio veli in B sunt inter se, ut latera parallela BN, Bb, Trianguli BbN. Sed  $BN = [13. II. Elem.] = \sqrt{(Bb^2 + bN^2 - 2bN \times bE)} = \sqrt{(2dz^2 - 2dzdy)} = \sqrt{(2dz(dz-dy))}$ . Ergo Potentia TZ ad Tensionem  $[a]$  in B  $= \sqrt{(2dz(dz-dy))} : dz = \sqrt{2(dz-dy)} : \sqrt{dz} = \sqrt{2x} : \sqrt{(x+a:v)} = \sqrt{4xx} : \sqrt{(2xx+2ax:v)} = 2x : \sqrt{(xx +$

17. Hinc idem velum fortius impellitur, quo magis diminuitur <sup>Nam.</sup> ejus axis, quod obtinetur adducendo propius extremitatem veli XLVIII: E ad tangentem BD.

18. Robur veli, seu firmitas requisita, ne dilaceretur, ubique eadem & componitur ex celeritate venti & parametro BC [sive differentia quadratorum EGB & AB applicata ad duplum axis BA.] Nota hic discrimen inter velum funemque, qui in summis quam imis partibus majore firmitate opus habet. (1)

19. Hinc vis impellens ad vim sustententem, ut duplum axis BA ad radicem aggregati quadratorum EGB & AB. (2)

20. Constat etiam ex secunda & decima sexta inter se collatis, quod si semel de velocitate navis, quæ velum juxta hypothesein primæ expansum habet, experientia constiterit, eadem quoque in hypothesei decimæ cæteris paribus supputari possit.

21. Quod si Veli extremitates sint in punctis E & G, & per G ducta recta GI directioni venti GL perpendicularis, cum velo expanso angulum faciat, nec illud secet, curvatur velum in *portionem Funicularia*. (3)

22. Si portio hæc continuetur ad verticem usque B, ponanturque axes æquilibrii impulsorum totius curvæ EB & portionis GB per 13, 14, iique proportionentur respectivis viribus impulsorum, erit prior axis diagonalis, alter latus alicujus parallelogrammi, cujus latus alterum est axis æquilibrii portionis EG, & simul virium quibus impellitur proportionem exhibet. (4)

23. Ad æstimandam ergo directionem veli & impulsus vim;

Q q q 3

postu-

$\sqrt{(xx + zz)}$  [scribendo nempe  $zz - xx$  pro  $2ax : v$ ]. Ergo Potentia  $TZ \equiv 2ax : \sqrt{(xx + zz)} =$  [quia  $2ax = v(zz - xx)$ ]  $= v(zz - xx) : \sqrt{(xx + zz)}$ ; composita ex celeritate venti, & differentia quadratorum veli & axis, applicata ad radicem aggregati eorundem.

(1) Firmitas vel Tensio veli, ubique eadem [ $a = vx : v$ ] compo-

nitur ex celeritate  $v$ , & parametro  $a : v = (zz - xx) : 2x$ .

(m) Vis impellens [ $v(zz - xx) : \sqrt{(zz + xx)}$ ] est ad vim sustententem [ $a = v(zz - xx) : 2x$ ] ut  $2x$  ad  $\sqrt{(zz + xx)}$ .

(n) Sequitur ex Art. 10.

(o) Ex notissimo Theoremate; de compositione virium sequitur ultro.

Num.  
XLVIII.

postulatur, ut datis punctis E, G, longitudine portionis EG, & positione rectæ GL axi parallelæ, duci possit funicularia ejusque vertex assignari; quod Naucerus hac praxi mechanica consequetur facile; Punctis E, G, & recta GL in plano similiter positis, ductaque EM, ad G, L, perpendiculari, erigatur planum, & in illo recta GL ad perpendicularum, firmataque catenulæ extremitate in puncto E, ejus annulo inseratur stylus & promoveatur super recta EM, quo usque catena transeat per punctum G, & simul intercepta ejus pars portioni datæ EG adæquetur; nam si secus eveniat, alii annulo inferendus stylus, donec æqualis fiat; tum notetur styli locus M, & bisecta recta EM, dimittatur perpendicularum AB secans catenulam, quæ positionem veli referet, in optato vertice B. (†)

24. Si veli denique extremitates sint E, B, [ *figura 3.* ] & ex B ducta recta BG, directioni venti perpendicularis, secet velum in G, curvatur ejus portio GB in *circulum*, altera EG in *funiculariam* quæ continuata per G C habeat parametrum CD æqualem circuli radio GA. Intelligitur curva tota uno motu continuo describi, si concipiatur evolutæ funiculariæ IFH filum circumplicari GFH ope plumbi filo annexi, & ex E demissi, illudque postquam convolutum fuerit circa partem curvæ HF, offendere in descensu suo clavum A, positum in centro futuri circuli. Requiritur autem ad constructionem curvæ, ut datis punctis E, B, longitudine ejus EGB, & positione recta BG, dari possint segmenta curvæ. Mechanice Naucerus, postquam velum vento inflatum fuerit, rem facile expediet: ducta enim positione data BG, dantur arcus & subtenfa GB, & hinc radius circuli AG, ipsumque punctum G; & quia datum quoque punctum E, & curva EG longitudine, dabitur eadem etiam positione, per præcedentem. Unde & dabuntur axes æquilibrii, viresque impulsio.

(†) Facilius multo; Ducantur veli tangentes in E & G, quod mechanice efficere, ope funiculorum tensorum, nihil habet difficultatis; &

angulus, quem comprehendunt tangentes, bisecetur. Linea bisecans mediam directionem exhibet,

pulsionum tum funiculariæ EG, tum circuli GB, ac proinde æquilibrii veli totius EGB, seu parallelogrammi diagonius, vireſ-<sup>Num. XLVIII.</sup> que quibus juxta hunc impellitur, per 2. & 22. (1)

25. Nota, ſupponi, quod fluidum, poſt adlapſum ad portionem veli EG, libere poſſit motum ſuum proſequi: At hypotheſis hæc in rigore ſumpta, ut opinor, vera non eſt. Videtur enim torrens fluidi a ſtagnante ejus portione in ſegmento GB ita ſufflamini debere, ut ſupra chordam GB ad partes G exundet, ibique certum formet ſpatium BGL, intra quod omnis aer vel ſtagnare proſus vel labi ſaltem ſegnius cogatur, & ſic plus motus ſui in veli portionem EG transferre neceſſum habeat, quam alias faceret, ſi non impedito curſu poſſet pergere: unde conſequitur velum quidem in parte GB circuli, in parte LE funiculariæ curvaturam induere, at in parte GL mediæ inter utramque naturæ eſſe, & quæ ab exuberantis fluidi figura ejusque in velum agendi ratione dependeat. Hanc vero uti conjecturis, quæ in promptu mihi ſunt, definire nolo, ita eorum ſagacitati quorum pluris intereſt rem nauticam perficere, indagandam relinquo. Ego interea pro homine mediterraneo ad negotium maritimum, quo non eſt aliud e quo rebus humanis major accedit utilitas, plus ſatis contuliſſe mihi videor.

Quia in eo huc uſque fui, in Funiculariæ uſum in re nautica oſtenderem, lubet hic quoque aliam ejus proprietatem non inelegantem, quæ in Staticis aliquando uſui futura eſt, quamque *Fratriſ* indiſtriæ debemus, aperire: Sit recta horizontalis AD [Fig. 4.] Vectis nullius gravitatis & ſimul axis funiculariæ CE, punctum B vectis hypomochlium & curvæ centrum, ſitque  $AB = BC$ , & in A appenſum pondus F, atque aliud huic æquale G ubivis in curva conſtitutum, cujuſvis deſcenſus impediatur per ſilum DHG, quod trochleam H complectens perpendiculariter

(1) Imo tota curva BGE funiculariæ portio eſt, agnoſcente Auctore [Nº. LXVI.] Media autem di-  
rectio ſemper invenitur per biſectionem anguli, quem comprehendunt Tangentes extremæ.



Num. XLVIII. culariter ex vecte dependeat; erunt sic constituta pondera æqualia F & G in æquilibrio. (¹)

Proxime *Elateris curvaturam* dabo. (¹) Deprehendo hic vero [ quod in antecessum monere lubet ] rem satis memorabilem. Ut enim lintheum vento tumidum *Funicularia*, sic idem ab incumbentis liquoris pondere expansum *flexi Elateris* curvaturam induit.

(¹) Sit  $AB = BC = a : v$ , Funiculariæ parameter, pondus F, vel  $G = 1$ , eritque momentum ponderis  $F = 1 \times a : v = a : v$ ; momentum vero ponderis  $G = BD \times$  tension. funis DH. Sed  $BD = x + a : v$ ; Tensio vero funis DH ad pondus G, ut altitudo plani inclinati juxta quod G descendere nititur, ad ejus longitudinem, hoc est, ut  $dy$  ad  $dz$ , vel ut  $a : v$  ad  $x + a : v$ . Igitur, cum pon-

dus G sit  $= 1$ , erit funis DH tensio  $= \frac{a : v}{x + a : v}$ . Ergo  $BD \times$  tens. funis DH, seu momentum ponderis  $G = (x + a : v) \times \frac{a : v}{x + a : v} = a : v =$  momento ponderis F. Erunt igitur pondera F & G in æquilibrio.

(¹) Vide Num. LVIII.





(491)

17.

Fig. 2.



No. XLII.

# LINEÆ CYCLO EVOLUTÆ, ANT- CAUSTICÆ, ANTI- PERI-CAUS

Earum, usus & simplex re-  
Spira mirabilis.

Per J A C. B E R N

**C**yclois mechanica [ quæ ex revoli  
recta oritur ] jam toto hoc secu-  
metrica, quæ ex circuli super c  
Clarissimis Viris T S C H I R N H A U S I O  
primum considerari cœpit. Evolutarum  
N I O debemus. Causticæ præfatum itid  
H A U S I U M \*\* Auctorem agnoscunt. C  
ctatæ, cæteræque initio memoratæ curva  
sed nec extitit, qui Evolutarum & C  
ab his dependentium relationem mutual  
paucis abhinc diebus, cum in contempli

Jac. Bernoulli Opera.

† Acta Erudit. 1690. April. pag. 169.

\* Phil. Nat. Princ. Math. Lib. I. Sect. X.

\*\* Acta Erudit. 1682. Nov. pag. 364.

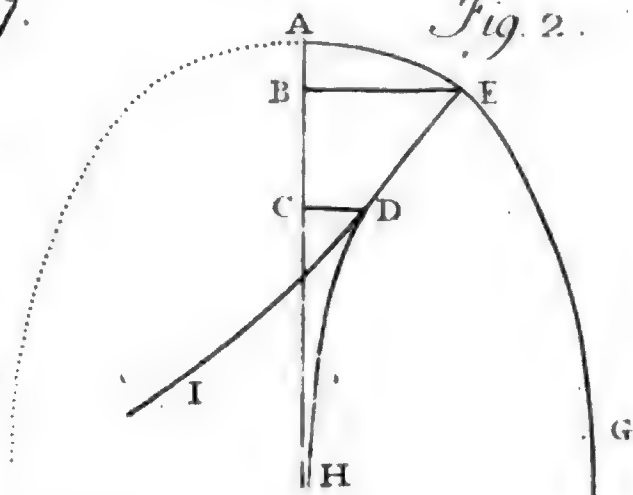


Fig. 2.

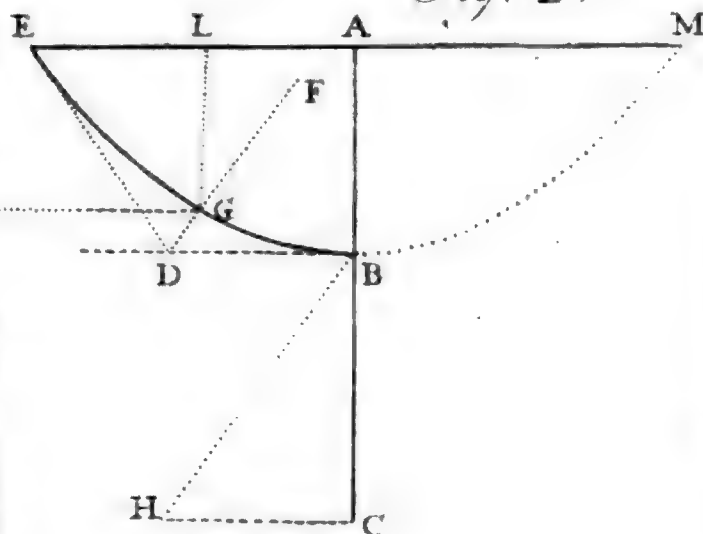
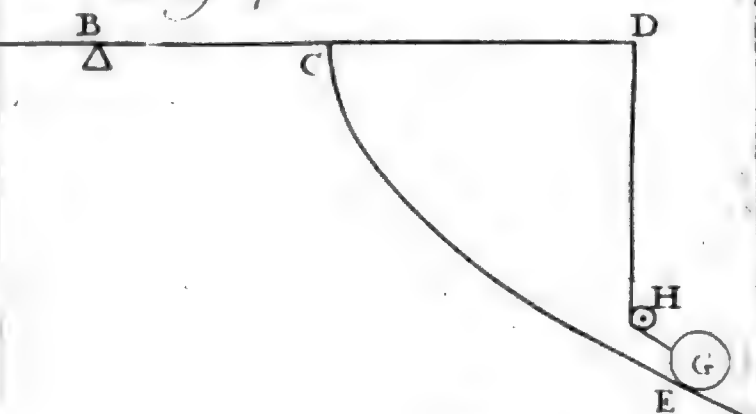


Fig. 4.



N. XLIX. *fani* paulo attentius versarer, reperi, ac ob rei præstantiam & utilitatem publico ocus impertiendam duxi, præmissis, quatenus necessariae videbuntur, terminorum fere novorum definitionibus.

Si curva quævis super alia sibi æquali & simili, hoc est, eadem super se ipsa inverse posita, puta  $dHm$  super  $DHM$  [ Fig. 1. ] rotetur, ita ut perpetuo in punctis similiter positis sese contingant, describet punctum  $a$ , in plano genitricis curvæ  $dHm$  ubi-vis acceptum & ab illo una abreptum, curvam  $Fa$ , quam ob affinitatem cum Cycloide *Cycloidalem* nuncupo. Ipsam  $DHM$ , super qua rotatio peragitur, voco *Expositam*. Curvam  $BL$ , ex cujus evolutione *Exposita*  $DHM$  ope fili  $LBH$  describitur, appello *Evolutam*, Rectam  $BH$  *Radium*, punctum  $B$  *Centrum circuli expositam* in  $H$  *osculantis*. Porro curvam  $CI$ , quam radiorum  $AH$ , ex puncto quovis  $A$  emanantium, reflexi  $HI$  suis intersectionibus formant, voco *Causiticam ex puncto A*. Et si reflexus  $IH$ , producatul ultra *expositam* in  $a$ , ut sit  $Ha$  æqualis  $HA$ , erit, quam punctum  $a$  formabit, curva  $Fa$ , *Anti-Causitica*. Sin radius incidens  $AH$  producatul in  $i$  ut sit  $Hi$  æqualis radio reflexo  $HI$ , erit punctum  $i$  ad Curvam  $Ei$  dictam *Peri Causiticam*. Denique, si radius circuli osculatoris  $BH$  producatul in  $b$ , donec  $Hb$  fiat æqualis ipsi  $HB$ , formabit punctum  $b$  *Ant-Evolutam* Curvam  $Gb$ . Reperi autem, cum recorderar D. LEIBNITIIUM affinia quædam antehac de *Lineis opticis* in *Actis* \* publicasse, *Causiticas* & *Anti-Causiticas* nostras quodammodo easdem esse, quas Vir Celeberrimus ἀνάμτες καὶ ἀνλάτες nuncupat. Officium tribus lineis *Anti-Causitica*, *Peri Causitica* & *Ant-Evoluta* [ ne omni usu destitutæ videantur ] hoc tribuo, ut prima determinet locum imaginis puncti radiantis  $A$  ex *Causitica*  $CI$  per reflexionem conspectæ; altera sit ipsa totius *Causiticae* in speculum  $DHM$  projectæ, & ab oculo in  $A$  exceptæ imago; tertia denique locum imaginis oculi semet ipsum ex *Evoluta* intuentis indicet. Præterea observatu dignum, *Anti-Causiticam* ex evolutione *Causiticae* describi, & insuper eandem esse cum *Cycloidali*, quotiescunque punctum lineans  $a$  respectu genitricis curvæ  $dHm$  similiter positum est, ac punctum

\* A°. 1689. Janv. pag. 36. sq.

punctum radians A respectu expositæ DHM (<sup>1</sup>): proinde Cau. N. XLIX. sticam  $ACI = aHI = aH + HI = AH + HI$ , hoc est, aggregato radii incidentis & reflexi, vel saltem eodem majorem minoremve constante longitudine.

Palmarium autem, quod ostendere suscepi, relationem concernit, eamque longe simplicissimam, inter *Causlicas* & *Evolutas*, quam sic determino: Si in puncto radiante A, erigatur radio incidenti AH perpendicularis AN, secans radium circuli osculatoris HB [productum si opus sit] in N, fiatque ut  $2HN = HB$  ad HB, sic AH ad HI abscindendam ex radio reflexo HI, eris punctum I in Causlica ex A (<sup>2</sup>); adeoque si  $2HN = HB$ , fiet

$$Rrr \quad 2 \quad HI$$

(<sup>1</sup>) Sit Fa Cycloidalis genita ex rotatione curvæ dHm super DHM & Ha ducta ex puncto contactus H ad punctum lineans a erit ad descriptam Fa perpendicularis. Sed si sumatur punctum radians A, similiter positum respectu genitricis dHa ac punctum lineans a respectu expositæ DHM, non modo semper erit  $AH = aH$ , sed insuper aH producta designabit radium reflexum HI emanantis AH. Nam, propter similem situm rectarum HA, Ha, est ang. AHR = ang. aHR = ang. oppos. rHI. Ergo radii AH reflexus est HI. Igitur recta aHI, perpendicularis ad Cycloidalem, perpetuo tangit causticam CI. Cycloidalis igitur quæ [propter HA = Ha] eadem est cum Anti-Causlica, ex evolutione Causlicæ describitur.

(<sup>2</sup>) Sint H, b [Fig. 3.] expositæ puncta vicinissima; HB, bB radii circuli osculatoris ad curvam Hb normales; AH, Ab radii incidentes;

HI, bI reflexi. Summa angulor. AHB, & HAB æqualis est ang. ASB, qui pariter æqualis est summæ ang. AbB, bBH. Ergo summa ang. AHB, HAB æqualis summæ ang. AbB, bBH; atque ideo differentia angul. AHB, AbB, æqualis differentiæ ang. A & B. Paritur ang. BTI æqualis summæ tam angulor. BHI, HBb, quam angulor. BbI, HbI. Igitur hæ summæ sunt æquales, atque ideo differentiæ angul. BHI, BbI, æqualis differentiæ ang. B & I. Jam autem, ex lege reflexionis, æquales sunt ang. AHB, AbB, angulis BHI, BbI, & horum differentia æqualis illorum differentia. Quare etiam differentia ang. A & B æqualis est differentiæ angulorum B & I. Est igitur ang. B medius arithmeticus inter ang. A & I, & anguli B duplum æquale summæ angul. A & I. Angulor. autem A, I, B mensuræ, sunt arcus HQ, HO, Hb [centris A, I, B, per H descripti] divisi per suos respective radios HA,

N.XLIX. HI infinita; hoc est radii reflexi contigui erunt paralleli: si  $2HN < HB$ , radii reflexi fient divergentes: si  $2HN > HB$ , fient convergentes: si  $HN = HB$ , [ut in præfenti schemate] erit  $HI = AH$ ; denique si HN vel AH infinita, hoc est, si punctum A radiet ex infinita distantia, fiet congressus radiorum in puncto medio radii reflexi HI, abscissi a perpendiculari BI (\*). Valet etiam regressus a data Caustica ad punctum radians, vel ab utroque dato ad Evolutæ puncta invenienda. At quanti usus sit hoc Theorema, præsertim in catoptricis, & quam fecundum in deducendis corollariis, quamque elegantes & expeditæ praxes inde fluant, periti harum rerum judicent. Ego unum tantum alterumve, in exemplum adducam.

1. Si punctum radians A reperiatur in peripheria circuli HcP, super semi-radio circuli osculatoris HP, ceu diametro descripti, radii reflexi contigui erunt paralleli; si illud extra peripheriam constitutum sit, erunt hi convergentes; si intra, divergentes (d)

2. Si

HA, HI, HB. Sed [propter  $HbO = IbV = HbQ$ , angulos rectos O, Q, & communem hypothensam Hb] æqualia sunt Triangula HO b, HQ b, adeoque HO æquale HQ. Et Triangula bHQ, HAN, præter rectos Q, A, habentia angulos æquales bHQ, AHN [uterque enim cum ang. QHS rectum efficit] sunt similia, adeoque dant  $HA : HN = HQ : Hb$ , unde

$Hb = \frac{HN}{HA} HQ$ . Mensuræ igitur angulorum A, I, B, sunt HQ, HQ,  $\frac{HN}{HA} HQ$  vel HA, HA, HN, divisi per radios HA, HI, HB. Quamobrem cum sit  $A + I = 2B$  vel  $I = 2B - A$ , erit  $\frac{HA}{HI} = \frac{2HN}{HB} - \frac{HA}{HA}$ ,

vel, [multiplicando per H B. HI]  $HA \cdot HB = 2HN \cdot HI - HB \cdot HI$ , quæ æquatio in Analogiam resoluta dat, ut  $2HN - HB$  ad HB, sic HA ad HI.

(\*) Nam, ubi HN & AH sunt infinite majores quam NB, Analogia  $2HN - NB : HB = AH : HI$ , reducitur ad  $2HN : HB = AH : HI$ , vel  $HN : AH = HB : 2HI$ . Unde &c.

(d) Nam si A sit in peripheria circuli HcP, HN est  $= HP$ , &  $2HN = 2HP = HB$ . Si A sit extra peripheriam HcP, HN est  $> HP$ , &  $2HN > HB$ . Si A sit intra HN  $< HP$ , &  $2HN < HB$ .

2. Si radii reflexi contigui sunt paralleli, habebit Anti-Causti-N. XLIX. ca in parte opposita flexum contrarium; si illi convergant, erit hæc concava; sin divergant, convexa versus partes expositæ D H M.

3. Si exposita curva D H M est geometrica, ejus Evoluta, Caustica, Cycloidalis, cæteræque omnes tales erunt. De Evoluta constat ex demonstratione HUGENII in *Horologio oscillatorio*, & nupero meo schediasmate de angulo osculi. \* De cæteris liquet ex relatione, quam tum inter se, tum ad Evolutam habent. Speciatim quod Cycloidalem ex circuli super circulo rotatione ortam attinet; ejus puncta geometricè inveniri possunt, non tantum cum ambo circuli æquales, sed & subinde cum inæquales fuerint [modo determinatam rationem habeant]; nonnunquam per geometriam communem [ut puncta Cycloidis *Tschirnhausiana*] aliquando per conicas sectiones, aliquando per altioris generis curvam, &c. At indefinite conceptum Problema supponit sectionem anguli in data ratione. Nam posito, rotationem in D incepisse, si ducantur subtenfa D H & communis circulorum tangens H R, fiatque angulus R H  $d$ , qui sit ad angulum R H D reciproce, ut radius expositi ad radium genitoris, secabit recta H  $d$  genitorem circulum in  $d$ , quod vel ipsum erit punctum lineans, vel saltem ad punctum lineans  $a$  positionem datam habebit. (e)

4. Quia Evoluta tota Circuli in unum punctum abit, quod est ejus centrum, hinc Caustica *Tschirnhausiana* dicto citius determinatur (f): sed nec minus facile inveniuntur puncta alterius cujusvis Causticæ, ex puncto distantia finitæ.

R r r 3

5. Ejus

\* Supra N°. XLVII. p. 473.

(\*) Ex genesi Cycloidalium circularium arcus D H arcui  $dH$  longitudine est æqualis. Ergo arcus D H mensura per angulos, ad similem mensuram arcus  $dH$ , reciproce, ut radius circuli expositi ad radium genitoris, & in eadem ratione est angulus D H R ad  $dH R$  angulum.

(f) Demissa scil. in radium reflexum perpendiculari, ex medio semidiametri ad punctum reflexionis ducti, per Not. (c). Est igitur radii reflexi pars inter circulum expositum & Causticam intercepta, dimidium partis radii incidentis, quæ inter expositam semiperipheriam, & diametrum ejus interceptitur. Vid. Num. seq.

N. XLIX. 5. Ejus Pericaustica est Ellipsis, cujus minima semidiameter radio circuli est æqualis, maxima ejusdem sesquialtera (g). Caustica ergo *Tschirnhausiana* per reflexionem oculo ex infinita distantia aspectanti apparet Ellipsis.

6. Quoniam e converso Parabolæ Caustica [Fig. 2.] ex radiis DB axi AN parallelis, tota concentratur in ejus umbilicum F, qui proin *Focus* appellatur; hinc, per Theorema nostrum, expedite construitur Paraboloides illa IH, ex cujus evolutione Parabola ABC describitur, hoc pacto: sumto in curva parabolica ubi-vis puncto B, & abscissa in axe  $FP = FB$ , ut sit ducta BP curvæ perpendicularis; fiat angulus rectus BFG, vel, si mavis, erigatur in umbilico normalis ad axem FT, & producat BP usque in T; eritque dupla ipsius BG, vel PT, nempe BH, radius circuli Parabolam in B osculantis, hoc est, punctum H in optata Paraboloides. (h)

7. Hinc porro quædam elegantes Parabolæ proprietates demonstrantur: ut, quia dicta Caustica colligitur in punctum, & ex puncti evolutione circulus describitur, sequitur, Anti-Causticam Parabolæ esse peripheriam circuli CM super F descripti, vel ei verius concentricam aliam, adeoque  $FC = FB + BM = FB + BD$ . Quod si permutatis inter se puncto radiante & foco Parabolæ, illud in puncto F collocari, hic in puncto axis infinitæ distantie colligi intelligatur, erit ex foci evolutione descripta Anti-Caustica circulus infinite magnus, hoc est, recta axis perpendicularis EL, distans a vertice A quantum umbilicus; ac propterea  $BL = BF$ . Sequitur & in revolutione Parabolæ super se ipsa, focum, loco Cycloidalis, rectam EL describere.

8. Quin

(g) Ex Nota præced. Peri-caustica habet ordinatas ordinarum semicirculi expositi sesquialteras. Hæc igitur ellipsis est.

(h) Nam, ex demonstr. Nota (c), congressus radiorum sit in medio radii reflexi abscissi a perpendiculari demissa ex centro circuli osculantis; vel, quod idem est, in ex-

tremitate radii reflexi abscissi a perpendiculari demissa ex medio radii osculatoris. Quia igitur is congressus fit in F, & est GF ad BF perpendicularis, BG est semissis radii osculatoris, &  $BH = 2BG =$  radio osculatori. Est autem Triang. FPT  $= FBG$ . Ergo  $PT = BG$  &  $2PT = 2BG =$  radio osculi.



8. Quin & Caustica ex radiis  $RB$  axi perpendicularibus uno N. XLIX. ductu calami sic determinatur: Ex radio reflexo abscinde  $BS = FT$ , vel si videatur elegantius, ipsi  $FG$  fac parallelam & æqualem  $BS$ , eritque  $S$  utroque modo punctum in optata Caustica (1). Quæ constructio conferri potest cum *Tschirnhausiana*, mensis Februarii 1690.

9. Super omnia vero utilitatem novi Theorematis commendare potest, quod occasionem subministraverit detectioni *Curvæ mirabilis*. Sic voco *Loxodromicam* illam *planam*, seu *Spiralem Logarithmicam* (cujus dimensionem, ipeciminis loco, in superioris Anni *Actis* (\*) exhibui], propterea quod non modo sui evolutione seipsam describere, [quod jam olim etiam *Fratri* meo observatum in *Actis* retuli], sed præterea sui ipsius *Ant-Evolutam*, *Cycloidalem*, *Causticam* ex umbilico, *Anti-Causticam*, *Peri-Causticam* esse, & infinitis aliis modis ex seipsa generari posse deprehendi, & quidem ita, ut perpetuo non tantum similes, vel ejusdem speciei curvæ prodeant [ut fieri solet in evolutione Cycloidis *Tschirnhausiana*] sed prorsus identicæ & positione tantum diversæ, talesque quæ sibi superimpositæ plane congruant. Quorum specialiter adaptavi schema primum, in quo  $ADHM$  est exposita Spiralis, hujus naturæ, ut ex umbilico  $A$  projecta recta quævis  $AH$  curvam secet constanti angulo  $AHR$ :  $BL$  ejus Evoluta:  $CI$  Caustica ex umbilico  $A$ :  $Fa$  Cycloidalis Anti-Caustica:  $EI$  Peri-Caustica:  $Gb$  Ant-Evoluta; ubi sequentia notare convenit, (1)

a. Omnes

(1) Cum sit ang.  $GBS = GBR$  &  $GBD = GBF$ , erit  $SBD = RBF$ ; ideoque [addito communi  $RBS$ ]  $FBS = RBD =$  recto. Ergo si  $BS = FG$ , erit  $BFGS$  parallelogr. rectangulum. Abscinditur ergo radius reflexus  $BS$  a perpendiculari  $GS$  demissa ex medio  $G$  radii osculatoris  $BH$ . Congressus radiorum fit igitur in  $S$ , hoc est, punctum  $S$  est

in Caustica. Sed  $BS = FG = FT$ .

(\*) Supra N°. XLII. pag. 442.

(1) Quæ de Spira mirabili Auctor habet noster, demonstrabimus, sed ordine nonnihil inverso.

I. Si a dato puncto  $A$  [Fig. 4] ad expositam quamcunque Curvam  $Hbb$  ducti radii  $AH$ ,  $Ab$ , ita producantur, ut producti  $AL$ ,  $Al$  ad radices  $AH$ ,  $Ab$  datam rationem habuerint, tan-



N XLIX. tangent productorum extremitates curvam  $Lll$  expositæ similem; id est, curva  $Lll$  per productorum extremitates designata expositæ est similis.

Propositio Axiomatis loco assumi potest. Manifestum enim est figuras  $AHb$ ,  $ALl$  sola magnitudine differre.

II. Si ad extremitatem  $H$  radii cujusvis  $AH$ , ipsi adjungatur sub angulo dato  $AHK$  recta quæpiam  $HK$  ad  $AH$  datam rationem habens, tanget rectæ adjunctæ extremitas  $K$  curvam  $Kk$  expositæ similem.

Quia datus est ang.  $AHK$  & data laterum  $AH$ ,  $HK$  ratio, datum est specie triangulum  $AHK$ , Datus ideo ang.  $HAK$ , & data ratio  $AH$  ad  $AK$ . Curva  $Hb$  quiescente, gyretur curva  $Kk$  circa punctum  $A$ , & gyrando describat angulum  $KAH$ , ut  $AK$  cadat super  $AH$ , & sit  $AL$ , curva  $Kk$  perveniente in  $Ll$ . Ergo radius  $AH$  ad productum  $AL$ , id est  $AK$ , datam rationem habet. Curva igitur  $Ll$ , id est  $Kk$ , expositæ  $Hb$  est similis, per præced.

Coroll. Si Triang.  $AHK$  latera  $AH$ ,  $AK$  habuerit æqualia, curva  $Kk$  cum gyratione descripserit ang.  $KAH$  congruet cum exposita  $Hb$ . Eo igitur in casu, genita expositæ similis est & æqualis.

III. Spirales logarithmicæ similes sunt etiam æquales.

Sint  $Hb$ ,  $Ll$ , Spirales logarithmicæ similes, eodem umbilico  $A$  descriptæ. Centro  $A$ , radiis  $AL$ ,  $Al$ , describantur circuli  $LM$ ,  $lm$ , Spirali  $Hb$  occurrentes in  $M$ ,  $m$ . Quia latera  $AL$ ,  $Al$  lateribus  $AH$ ,  $Ab$ ,

circa eundem angulum  $A$  sunt proportionalia, similia sunt Tr.  $AHb$   $ALl$ , atque ideo æquales sunt ang.  $AHb$ ,  $ALl$ . Sed, ex natura Spiralis, æquales sunt ang.  $AHb$ ,  $AMm$ . Igitur ang.  $ALl$ ,  $AMm$  sunt æquales. Sunt etiam latera  $AL$ ,  $Al$ , lateribus  $AM$ ,  $Am$  æqualia. Ergo prorsus æqualia sunt Tr.  $ALl$ ,  $AMm$ , & illud circa punctum  $A$  gyrando & angulum  $LAM$  describendo cum isto congruet. Pariter congruent  $Al$ ,  $Am$ , & quocunque volueris Triangula congruent. Congruere igitur possunt curvæ  $Lll$ ,  $HbMm$ , quas ideo rite dixeris æquales vel eandem.

Coroll. I. Ergo, in hyp. Prop. II. Si exposita  $Hb$  fuerit Spiralis logarithmica, genita  $Kk$  est eadem Spiralis.

Coroll. II. Spirales  $Ll$ , &  $Mm$  inter se constituunt angulum  $LAM$ , quem metitur arcus  $LM$  centro  $A$  descriptus, & inter utramque interjectus. Nam, si  $Ll$  circum  $A$  gyrando describat angulum  $LAM$ , cum  $HM$  congruit.

Coroll. III. Is angulus  $LAM$  proportionalis est logarithmo rationis  $AL$  ad  $AH$ , radii ad radium productum. Etenim N<sup>o</sup>. XLII, Art. I. ostensum est, si sumantur in Spirali logarithmica radii in geometrica progressionem, esse angulos quos comprehendunt in arithm. progr. Sunt igitur hi illorum logarithmi. Angulus verbi gr.  $MAH$  est logarithmus rationis  $AM$  [vel  $AL$ ] ad  $AH$ .

Coroll. IV. Ductis, ut libet, radiis  $AL$ ,  $Ab$ , angulus quem constituunt Spirales  $Hb$ ,  $Ll$ , æqualis est angulo  $LAh$  radiorum una cum angulo

gulo qui logarithmus est rationis eorum  $AL : Ab$ . Nam ang.  $LAM$ , quem constituunt spirales, æqualis est ang.  $LAh$ , simul & ang.  $bAM$ , qui logarithmus est rationis  $AM$  [vel  $AL$ ] ad  $Ab$ .

Ex his facillime sequitur Auctoris Prop. 2; eisdem scil. esse cum spirali exposita  $DH$ , [Fig. 1]

1°. *Evolutam* ejus  $AB$ . Evolvatur enim Spiralis  $AB$ , sitque  $BH$  radius evolutæ, ipsi æqualis, ipsamque tangens in  $B$ , perpendicularis autem in  $H$  ad curvam evolutione descriptam  $DH$ . Demonstratum est N°. XLII. Art. I.  $AH$  normalem ad radium  $AB$ , ex tangente rescindere partem  $BH$  curvæ  $AB$  æqualem. Ergo punctum  $H$  reperitur in curva evolutione descripta. Quoniam igitur in rectangul.  $Tr. ABH$ , datus est ang.  $ABH$  (ex spiralis natura) datum est specie Triangulum, & data ratio radii  $AB$  ad adjunctam  $BH$  sub dato angulo  $ABH$ . Ergo curva  $DH$  eadem cum curva  $AB$  [Cor. 1. III].

2°. *Antevolutam*  $Gb$ . Quia datum est specie  $Tr. AHB$ , datus est ang.  $AHB$ . Datus ideo ang. deinceps  $AHb$ . Data quoque ratio  $AH$  ad  $HB$ , vel  $Hb$ , radio  $AH$  adjunctam sub angulo dato. Ergo  $Gb$  curva eadem cum curva  $DH$ . [Cor. 1. III.]

3°. *Causlicam*  $CI$ . Per Theor. cujus demonstrationem vide Nota (c), est  $2HN = HB : HB = HA : HI$ . Sed hic  $HN = HB$ , ideoque  $2HN = HB = HB$ . Quare  $HA = HI$ . Præterea datus est ang.  $AHB$ . Datus igitur  $BHI$ , ipsi, ex lege reflexionis, æqualis. Data itaque  $AHI$ , summa eorum. Ergo radio  $AH$  ad-

jungitur recta  $HI$  ipsi æqualis, sub N°. XLIX. dato angulo  $AHI$ . Curva igitur  $CI$  eadem est cum curva  $DH$ .

4°. *Anticauslicam*  $Fa$ . Propter datum ang.  $AHI$ , datus est ang. deinceps  $AHa$ , sub quo adjungitur radio  $AH$  recta  $Ha$  ipsi æqualis. Ergo genita  $Fa$  eadem cum exposita  $DH$ .

5°. *Pericauslicam*  $Ei$ . Quoniam  $Hi = HI = HA$ , productus  $Ai$  est radii  $AH$  duplus. Ergo [Prop. I.] curva  $Ei$  curvæ  $DH$  similis, & [Cor. 1. III.] eadem.

Ex his tam aperte fluunt Prop. 3. 3. . . . , ut iis demonstrandis immorari necesse non sit. Prop. 8. demonstratio habetur ex Cor. 3. aut 4. III. Hinc enim sequitur angulum expositæ cum . . . . .

evoluta = ang  $HAB$ . rect. + Log.  $AH : AB$   
causlica - -  $HAI$  [AHR] + Log.  $AH : AI$   
anticauslica -  $HAa$  [AHB] + Log.  $Aa : AH$   
pericauslica - - - - - Log.  $Ai : AH$   
antevoluta - -  $HAb$  + Log.  $Ab : AH$ .

Hi autem anguli, & hæ rationes, dato angulo quo spiralis a radiis suis secatur, datæ sunt. Ergo & anguli quem spirales inter se constituunt dati sunt, saltem transcendentaliter, hoc est, concessis logarithmis.

Est autem logarithmus rationis æqualitatis nullus. Quare, ubi quædam ex prædictis rationibus sit ratio æqualitatis, tunc, absque logarithmis, datur angulus cujus mensuram ingreditur logarithmus illius rationis.

Sic, pone  $AH = AB$ , id quod sit ang.  $ABH$  existente 45 gr. &  
Sff ang.

Jac. Bernoulli Opera.

N. XLIX. α Omnes istæ sex Spirales sunt eadem Helix, hoc est, eodem angulo a suis radiis ex umbilico projectis secantur.

β. Omnes post infinitos anfractus in communi umbilico A coeunt.

γ. Nulla alteram alibi tangit secatve.

δ. Si radius incidens & reflexus, HA, HI, producantur ultra H ad usque occursum Peri-Causticæ & Anti-Causticæ in i & α, & jungantur puncta A, α, i & I, erit AαiI Parallelogrammum rectangulum, cujus diagonalis αI tangit Causticam & latus αi Peri-Causticam.

ε. Si per H ducantur HB, HR, parallelæ oppositis Parallelogrammi lateribus, tanget una expositam, evolutam altera.

ζ. Triangula AHα, ABI, sunt similia: AH = HI = Hα = Hi; Caustica ACI = 2 HI. Evoluta AB = HB.

η. Si communi umbilico recta projiciatur secans spirales, harum tangentes omnes per sectionum puncta ductæ erunt parallelæ, & portiones, umbilico ac sectionibus interjectæ, rectæ portionibus conterminis sunt proportionales.

θ. Si super communi umbilico, tanquam centro, describatur quocunque radio circulus secans spirales in punctis B, C, D, E, F, G; erunt spiraliū omnium portiones centro & peripheria interjectæ æquales: radiorum vero ex centro ad intersectiones ductorum anguli sunt iidem cum angulis, quos ipsæ spiræ post infinitos circuitus in centro inter se constituunt. Speciatim, si angulus communis radiorum ex umbilico projectorum cum spirali-

ralibus

ang. expositæ cum evoluta est æqualis [ HAB ] recto.

Pone AH = AI; quo casu æquilaterum est Triang. AHI, & HAI seu AHR est 60 gr., & ang. expositæ cum caustica erit quoque 60 gr.

Pone Aα = AH, seu pone Tr. AHα esse æquilaterum, & AHR 30 gr. & erit ang. expositæ cum anticaustica 60 gr.

Nec minus liquet angulum causticæ cum anticaustica = αAI + Log. Aα: AI = recto + Log. AH: AB = angulo causticæ cum exposita.

Pariter ang. evolutæ cum caustica = BAI + Log. AI: AB = αAH + Log. Aα: AH [ sunt enim similia Triangula AHα, ABI ] = angulo expositæ cum anticaustica.

ralibus sit semirectus, Helix Exposita & Evoluta faciunt rectam: N. XLIX. Si ille 60 gr. Exposita & Caustica itidem faciunt angulum 60 gr. Si ille 30 gr. Exposita & Anti-Caustica faciunt angulum 60 gr. In genere vero spectata angulorum relatio est transcendentalis. Angulus Evolutæ cum Caustica perpetuo æquatur angulo Expositæ cum Anti-Caustica, sicut & angulus Evolutæ cum Exposita angulo Causticæ cum Anti-Caustica.

1. Præter recensitas autem quinque Spiras infinitis insuper aliis modis transformari potest exposita Helix, sic ut semper eadem Helix prodeat; ad id enim obtinendum non est necesse, ut  $HI$ ,  $HA$  vel  $Hi$  sint æquales  $HA$ , neque etiam ut  $Hb$  æquetur ipsi  $HB$ ; sed nec opus, ut angulus  $AHI$  per  $HB$ , aut  $AHa$  per  $HR$  sit bisectus &c. Generaliter namque verum est, quod quotiescunque rectæ ex umbilico in Expositam projectæ  $AH$  adiungitur in  $H$  alia ad quascunque partes, veluti  $Hd$ , dummodo angulus interceptus  $AHd$  semper constans sit, crura quoque  $AH$ ,  $Hd$  constantem rationem servant, adjunctæ extremitas  $d$  eandem numero cum Exposita, & circa communem umbilicum constitutam Helicem describet.

Nescio vero, an hujus proprietatis meminisse tanti sit, cum omnibus omnino curvis æque competere videam, quanquam ignorem id a quoquam observatum esse. Nimirum si cuique expositæ curvæ  $DHM$  applicetur quodvis Triangulum  $AHa$ , illudque supra datum punctum  $A$  rotari, & simul fluere intelligatur ita, ut manente angulo  $H$  in peripheria expositæ, latera omnia crescant decrescant-ve proportionaliter, ipsumque Triangulum sibi semper maneat simile, describet angulus  $a$  curvam similem & eandem [*specie*] cum exposita, subinde & numero, ubi  $AH$ ,  $Aa$  fuerint crura Trianguli Isoscelis. Numero easdem curvas voco [forte rectius quam existimarent Logicorum filii] quæ sibi superimpositæ congruunt. At quod Evolutæ, Causticæ, Anti-Causticæ &c. non perinde quoque eadem specie numero sunt in quovis curvarum genere, in causa est sola anguli, quem recta  $AH$  ad expositam curvam ejusve tangentem facit, inæqualitas, quæ omnia turbat. Hic enim, cum in sola nostra

N. XLIX. Spira constans maneat, videtur quasi natura hoc essentiali caractere illi soli id privilegii vindicare voluisse.

Cum autem ob proprietatem tam singularem tamque admirabilem mire mihi placeat Spira hæc mirabilis, sic ut ejus contemplatione satiari vix queam; cogitavi, illam ad varias res symbolice repræsentandas non inconcinne adhiberi posse. Quoniam enim semper sibi similem & eandem Spiram gignit, utcumque volvatur, evolvatur, radiet; hinc poterit esse vel sobolis parentibus per omnia similis Emblema; *Simillima Filia Matri*. Vel, [ si rem æternæ Veritatis Fidei mysteriis accommodare non est prohibitum ] ipsius æternæ generationis Filii, qui Patris veluti imago, & ab illo ut Lumen a Lumine emanans, eidem *ὁμοῖος* existit, qualiscunque adumbratio. Aut, si mavis, quia curva nostra mirabilis in ipsa mutatione semper sibi constantissime manet similis & numero eadem, poterit esse, vel fortitudinis & constantiæ in adversitatibus; vel etiam carnis nostræ post varias alterationes, & tandem ipsam quoque mortem, ejusdem numero resurrectionis symbolum; adeo quidem, ut si ARCHIMEDEM imitandi hodiernum consuetudo obtineret, libenter Spiram hanc tumulo meo juberem incidi cum Epigraphe: *Eadem numero mutata resurget*.

Nº. L



N°. L.

# A D D I T I O

## A D S C H E D A M

### D E

## LINEIS CYCLOIDALIBUS &c.

*Proximo Maii Aëtorum borum mense  
exhibitam.*

**V**ix dum submiseram Editoribus *Aëtorum*, nuperam speculationem de Cycloidalibus cæterisque curvis, cum postmodum a Fratre Parisiis litteras acciperem, in quibus nonnulla egregia huc spectantia communicavit; significans, quod præter causticam *Tschirnhausianam*, aliam repererit, quæ quoque sit Cyclois; quod deprehenderit Cycloidem vulgarem *Hugenianam* sui ipsius, ut Evolutam, sic Causticam existere; & quod observaverit eandem proprietatem Spirali logarithmicæ [quod partem constituit inventi Curvæ mirabilis] communem esse: quæ omnia non sine stupore perlegere potui; cum considerarem, neutri de alterius speculationibus has curvas concernentibus quicquam constituisse. Ansam vero dederunt ista materiam hanc jam sepositam denuo reassumendi, ac observandi sequentia: 1°. Quod omnes Cycloides ex circuli super circulo revolutione per punctum in ejus peripheria acceptum genitæ, evolutione sui similes, seu eadem specie, Cycloidas describunt. 2°. Quod Caustica vulgaris Cycloidis ex radiis axis parallelis est alia Cyclois vulgaris, cujus

Sff 3.

basis.

*Acta Erud.  
Lips. 1692.  
Jun. p. 291.*



No. L. basis prioris est dimidia. 3°. Quod Cautica circuli ex puncto in ejus peripheria sumpto, Cyclois est genita ex revolutione circuli super æquali circulo, & quod sui quoque evolutione seipsam describit. 4°. Quod Cautica hujus Cauticæ, sive Cycloidis, & ipsa Cyclois est, sed *Tschirnhausiana*, & cujus circulus genitor radii est subdupli ejus super quo revolvitur. Quæ omnia, ut Lectoribus isthæc examinaturis laboris compendium faciam, breviter hic demonstrata sisto.

## L E M M A.

Si circulus *dcl* [Fig. 1.] super convexa aut cava peripheria alterius cujusvis circuli *bdg* rotetur, & in prioris peripheria acceptum punctum *c* sit punctum lineans alicujus Cycloidis & *m* punctum respondens in evoluta ejus, adeoque recta ducta *cm* Cycloidi perpendicularis, & propterea transitura per contactum circulorum *d*. Dico, fore *cd* ad *dm*, ut *al* ad *ad*, aggregatum puta, vel differentia radii expositi & diametri genitoris circuli ad radium expositi.

DEMONSTR. (\*) Sit *df* particula infinite parva peripheriæ *bdg*.

(\*) Demonstrationem, quæ subobscura visa est, nonnihil immutatam exhibemus. Dum circulus genitor *dcl* [Tab. XVIII. b. N°. L.] transit in *feb*, percurritque particulam *df* circuli expositi *bdfg*, describat punctum lineans *c* particulam *ce* Cycloidis *bce*. Et quia *cd*, *ef* ad curvam normales concurrunt in *m*, spectari potest *ce*, tanquam arcus circuli centro *m* descripti. Eodem centro, radio *mf*, describatur arcus *fi*; & centro *f*, radio *fn* = *dc* arcus *no*. Quoniam *me* = *mc*, & *mf* = *mi*, est *ef* = *ci*, & *co* [ = *ef* — *fo* = *ef* — *fn* = *ef*

— *dc* = *ci* — *dc* ] = *di*. Præterea, ex natura & generatione Cycloidis, arc. *bd* = *dc* = *fn*, & arc. *bdf* = *fne*, ideoque *df* = *ne*. Igitur triangula rectangula *dfi*, *eno*, cum habeant æqualia latera *df*, *ne*, & *di*, *eo*, æqualia sunt, consequenter *fi* = *no*. Jam vero notum est angulos, quos arcus æquales metiuntur, esse in radiorum ratione reciproca. Ergo, cum æquales sint *fi*, *no*, erit ang. *fmi* : ang. *nfe* = *ef* : *fm* sed *nfe* =  $\frac{1}{2}$  *nke*, & *fmi* [ in Cycl. exteriore ] = *mua* — *mfa* = *daf* + *mda* — *mfa* = *daf* + *cdl* [ *nfb* ] — *efb* = *daf* + *nfe* = *daf*



$bdg$ , quam tangant rectæ  $ds$  in  $d$ , &  $ft$  in  $f$ , sumptæque intelligentur  $ch$ ,  $hi$ , sigillatim æquales ipsi  $df$ ,  $ip$  vero quarta proportionalis ad  $ad$ ,  $dl$  &  $df$ ; ducantur  $hf$ ,  $if$ ,  $pf$ , secantes rectam  $cq$  parallelam ipsi  $ft$  in  $n$ ,  $o$ ,  $q$ ; ut &  $ir$ ,  $pr$  diameter: quo facto angul.  $pfs = hfs$  [ $cds$ ] +  $ifh \pm pfi = cld + ifh \pm pfi = cld + dlf \pm pfi = clf \pm pfi = clf \pm pri =$  [ob  $ad: dl$  vel  $pr = df: pi$ ]  $clf \pm daf = clf \pm ifs$ : hinc  $pft = pfs \mp ifs = clf =$  [postquam continuata rotatione circulus circum tetigerit in  $f$ ] angulo tangentis  $ft$  & secantis  $cf$ : quare tum  $cf$  cadet super  $pf$ , eoque situ Cycloidi perpendicularis erit, ac productam alteram perpendicularem productam  $cd$  secabit in puncto evolutionis  $m$ : unde porro sic arguere licet;  $ad: al$  [ $ad \pm dl$ ]  $= ad \times df: ad \times df \pm dl \times df = df: df \pm (dl \times df: ad) = ch: hi \pm ip$  [ $hp$ ]  $=$  [ob arcum  $cp$  habendum pro recta, & rectas  $hn$ ,  $pq$ , pro parallelis]  $cn: nq = df: nq =$  [ob similia Triangula  $dmf$ ,  $nfq$ ]  $dm: nf$  [ $cd$ ]. Q. E. D.

COROLLARIA. I. Si  $ad$  sit radius infinite magni, hoc est,  $bdg$  linea recta, erit  $cd = dm$ .

II. Si circulus genitor sit infinite magnus, hoc est,  $cdr$  linea recta, fiet  $dm = 0$ , ipsaque Cyclois coincidat cum illa quæ ex evolutione circuli expositi describitur.

III. Si circulus expositus sit infinite parvus, hoc est, punctum, degenerabit Cyclois in circumulum.

IV. Si  $ad = dl$ , erit  $cd = 2dm$ .

V. Si  $2ad = dl$ , erit  $cd = 3dm$ .

VI. Si  $ad = dl$ , & circulus rotetur super peripheria concava,

$daf + \frac{1}{2}nke$ . At  $fmi$  [in Cycl. interiore]  $= mfa - mua = mfa - mda - da = mfa - nfa - da = mfn$  [ $nfe$ ]  $= da = \frac{1}{2}nke - da$ . Ergo  $ef: fm$  [ $= fmi: nfe$ ]  $= \frac{1}{2}nke \pm da: \frac{1}{2}nke = nke \pm 2daf: nke$ . At-

qui propter æquales arcus  $ne$ ,  $df$ , qui metiuntur angulos  $nke$ ,  $daf$ , sunt hi anguli reciproci ut radii  $nk$ ,  $da$ . Igitur  $ef: fm$  [ $= nke \pm 2dfe: nke$ ]  $= ad \pm 2nk$  [ $ab$  vel  $al$ ]:  $ad$ . Q. E. D.

No. L. cava, erit *dm* infinite magna, adeoque punctum lineans *c* loco Cycloidis rectam, videlicet, diametrum circuli expositi describet.

Patet ergo, quo pacto linea recta & circulus pro speciebus quoque Cycloidum haberi possunt.

## PROPOSITIO I.

Sit BEF [Figura 2.] Cyclois genita ex revolutione circuli CDL super convexa, ut in superiore, aut super concava peripheria circuli BKF, ut in inferiore figuræ parte: & sumantur AH tertia proportionalis ad AL & AD, cæteraque fiant, ut figura monstrat; quo pacto  $AL:AD = AD:AH = \pm AL \mp AD: \pm AD \mp AH = LD:DH = CD:DM$ : quare punctum M est in evoluta Cycloidis BEF per *Lemma* præcedens. Item, quia  $DK:HG = AD:AH = LD:DH = CL[DK]:HM$ , erit  $HG = HM$ ; & propterea etiam punctum M in Cycloide a circulo MDH super GH revoluto descripta. Cyclois vero hæc *eadem specie* seu similis alteri BEF, quia diameter genitoris circuli ad radium expositi utrobique eandem habet rationem, ut ostensum. Ergo Cycloides omnes, evolutione sui, *easdem specie* Cycloidas describunt. Q. E. D.

COROLL. Si BKF sit circulus infinite magnus, sive linea recta, Evoluta Cycloidis erit *eadem numero* cyclois; ratione AL ad AD, seu LD ad DH, in rationem æqualis abeunte.

## PROPOSITIO II.

Sit vulgaris Cyclois ACK [Figura 3.] & similis alia ALH, cujus basis AH prioris AK sit dimidia; estoque BF majori Cycloidi perpendicularis, BG radius illi incidens parallelus axi HC, BE radius reflexus, qui sumatur æquali incidenti BG, cæteraque fiant, ut figura docet: quo facto,  $\text{ang. } BFD = FBG = FBD$ ; proinde  $BD = DF$  & D centrum genitoris circuli FBI: & quoniam Triang. BFG, BFE, per hypothesin & constructionem se habent

habent juxta 4. I. EUCL. erit angulus  $BEF = BGF$  recto, & No. L. consequenter jacebit in peripheria circuli diametro DF descripti; cumque angulus  $FDE = DBF + DFB = 2DFB$ , & contra diameter DF diametri FI subdupla, erunt arcus subtensi angulis æquales, nempe arcus  $FE =$  arcui  $BI =$  rectæ FH: unde punctum E est in Cycloide descripta a genitore circulo FED, cujus diameter DF alterius FI est dimidia, hoc est, in Cycloide ALH. Itemque quia BF est semiradius circuli Cycloidem ACK in B osculantis, per *Corollarium 1. Lemmatis præcedentis*, atque recta FE radio reflexo perpendicularis; idem quoque punctum E est in Caustica Cycloidis ABC ex radiis axi HC parallelis, per nuperum meum *Theorema* (\*), quod relationem inter Causticas & Evolutas exhibet. Caustica ergo Cycloidis hujus, similis & eadem specie Cyclois est. Q. E. D.

### PROPOSITIO III.

Anti-Caustica curvæ cujusvis eadem est cum ejus Cycloidali, quoties punctum radians respectu expositæ, & punctum lineans respectu genitricis curvæ similiter posita sunt, ut nuper innui (c). Ergo & Anti-Caustica circuli ex puncto in ejus peripheria sumpto coincidit cum Cycloide, quam describit punctum similiter sumptum in peripheria circuli super eodem circulo rotantis. Sed ejusmodi curva, qua est Cyclois, per *Prop. 1.* ex evolutione similis Cycloidis; & per ea quæ nuper, qua est Anti-Caustica, ex Causticæ evolutione describitur. Quare & Caustica ex puncto in peripheria circuli accepto Cyclois est ex circuli super æquali circulo revolutione genita. Q. E. D.

Patet hinc, *Fraternum* hñc inventum Theorematum istorum generalium duntaxat consecrarium esse. Constat etiam, quod *Frater* inobservatum præterit, Causticam hanc non secus ac *Tschirnhausianam*, ex sui evolutione seipsam describere.

*Jac. Bernoulli Opera.*

T t t

PRO-

(\*) No. præced. pag. 493. sub finem. Vide etiam Notam (b).

(\*) *Ibid.* pag. 492 sub finem & pag. 493. Vide Notam (a).

## PROPOSITIO IV.

Sit BGC [ *Figura 4.* ] Cautica semicirculi DEC ex puncto C, eademque Cyclois genita ex revolutione GEFH super æquali ipsique DEC concentrico circulo BHR. Esto autem H circulo-  
rum contactus, G punctum lineans Cycloidem, Q centrum geni-  
toris, & ducantur rectæ AHQ, BG, QG, BH, GH, perpendi-  
cularis futura Cycloidi, quæ producat in N, junctaque BN &  
demissa in BG perpendiculari HO, diametro HQ describatur cir-  
culus HPQ secans rectam QG in P, &c. Quo pacto  $QG = QH =$   
 $AH = AB$ , ut & arcus & subtensa  $HG =$  arcui & subtensæ HB,  
per defin. Cycloidis; unde Triang. Iloscelia ABH, QGH, si-  
milis & æqualia, & tum anguli  $HGB = HBG$ , tum  $QHG =$   
 $AHB$ ; cumque ambo illi sint æquales his ambobus [ quandoqui-  
dem additus utrisque communis BHG duos rectos complet ] erit  
unus  $HGB =$  uni  $QHG = QGH$ ; ideoque GQ reflexus radius  
incidentis BG. Deinde quoniam  $GP = QP =$  recto [ ut-  
pote in semicirculo ]  $= GOH$ , erunt quoque Triangula GPH &  
GOH similia & æqualia, &  $GP = GO = \frac{1}{2} GB$ : Præterea etiam  
 $HB = HG =$  [ ob æqualitatem circulo-  
rum GHE, BHN ] ipsi HN; quare circulus centro H radio HG descriptus, per B & N  
transibit, angulumque GBN rectum ostendet. Denique, si sup-  
ponatur punctum I in evoluta Cycloidis BGC, erit HI tertia  
pars ipsius HG vel HN, per §. *Coroll. Lemm.* Quibus præmissis,  
ex nupero Theoremate evincitur, punctum P in hujus Cycloidis  
Cautica ex puncto B versari: Nam juxta Theorema <sup>(4)</sup> debet  
esse  $GP = GB \times GI : (2 GN - GI) = 4GB : (12 - 4) =$   
 $\frac{1}{2} GB = \frac{1}{2} GB$ ; ut repertum est. At idem punctum P versatur  
quoque in Cycloide *Tschirnhausiana* BKR, ea scilicet quæ gigni-  
tur ex revolutione circuli radii subdupli HPQ super circulo dupli  
radii BHR. Cum enim idem angulus PQH, vel GQH, existat  
tum in peripheria circuli HPQ, tum in centro circuli duplæ dia-  
metri.

(<sup>4</sup>) No. præced. pag. 493.

metri HGE, erit arcus subtensus HP = arcui HG = arcui HB; No. L. unde constat &c.

Nota, ABGQ est Trapezium regulare, in quo BG parallela AQ, AB = GQ, & ABG = BGQ.

COROLL. Hinc casu in solutionem incidimus Problematis, quod alias satis perplexum videri posset ei, qui illud de industria vellet aggredi: Nempe Punctum ex infinita & aliud ex finita distantia radiare debent in diversas curvas expositas, sic ut reflexi utrobique radii suis intersectionibus eandem numero & positionem Causiticam forment. Queruntur Expositæ, cum communi Causitica? Resp. Quæsito satisfaciunt expositæ Cyclois BGC, & radio AQ descriptus MKT circulus; in illa enim si radiet punctum B, in hunc punctum infinite distans per radios rectæ BT parallelos, radii reflexi utrobique eandem causticam *Tschirnhausianam* BPKR formabunt. (\*)

Tres ergo Curvas deteximus, *Spiralem Logarithmicam*, *Cycloidem vulgarem*, & *Cycloidem nostram* ex circuli super æquali circulo revolutione ortam, quæ eximia inter se affinitate gaudent, duasque proprietates notabiles communes habent: una est quod singularum evolutione eadem curvæ describantur, [qua quidem etiam reliquæ Cycloides conspicuæ sunt;] altera, quod singularum Causiticæ quoque eadem curvæ sint: quanquam & hic non leve discrimen animadvertimus, quod facit, ut ea, quæ communia habent, singularitati *Spiræ mirabilis* nihil derogent. Nam primo non tantum Evoluta & Causitica Spiræ mirabilis, sed & Ant-Evoluta, Anti-Causitica, Peri-Causitica, &c. eadem curva sunt, quæ in cæteris fere diversæ existunt. Deinde, in evolutione Spiræ mirabilis, partes curvæ eodem ordine describuntur, quo evolvuntur, in evolutione Cycloidum omnium inverso. Tertio, Spiræ mirabilis eandem numero & Evolutam habet & Causiticam; Cyclois vulgaris eandem quidem numero Evolutam, sed Causiticam similem tantum, seu *specie* eandem: nostra vero Cyclois si-

T t t 2

mitem,

(\*) N°. præc. pag. 495. Art. 4. Vide etiam Notam (f)

No. L. milem, seu eandem *specie* Evolutam; at dissimilem ac *genere* duntaxat eandem Causticam. Colligitur hinc, si vulgaris Cycloidis Causticæ, simul ac nascuntur, speculi consistentiam acquirere possent, ad excipiendum ac reflectendum eos ipsos radios ex infinita distantia profectos, e quibus enatæ fuerant; fore ut aliæ novæ orirentur Cycloides prioribus continuo minores minoresque, eo modo quem *Figura 3*, parte dextra refert: cum contra Spiræ mirabilis Caustica, in speculum mutata, & radios ex communi umbilico emanantes reperiens, aliam, non minorem, sed identicam prorsus Spiram producat. Quemadmodum itaque per productionem Spiræ mirabilis communicationem essentia divini *ad intra*, [ut in scholis loqui amant,] qua Deus Filius Patre non minor, sed æqualis, ex intima Patris essentia, & Deitatis quasi umbilico nascitur, & ab utroque exit Spiritus Sanctus utriusque par, non inconcinne adumbrari nuper partim diximus: ita nunc continuata analogia communicationem imaginis divini *ad extra*, qua Creator ex infinito quasi intervallo, [quo a Creaturis suis distat] ipsis radios Divinitatis impertit; eo vero imperfectiores, minoresque, quo minus immediate ad nos emanarint, per Cycloidis productionem non minus apte representari posse arbitramur.



Nº. LI.

Nº. LI.

*ÆNIGMA GEOMETRICUM*DE MIRO OPIFICIO TESTUDINIS  
QUADRABILIS HEMISPHERICÆ:*A D. PIO LISCI POSILLO**Geometra*

Propositum die 4. April. A. 1692.

*Cujus divinatio a secretis artibus illustrium A-  
nalystarum vigentis ævi expectatur, quod in  
Geometriæ pura Historia tantummodo versa-  
tus ad tam recondita videatur invalidus.*

**I**Nter venerabilia eruditæ olim Græciæ monumenta extat adhuc, per- Vid. *Assa*  
petuo equidem duraturum, Templum augustissimum ichnographia *Erud.* 1692.  
circulari, ALMÆ GEOMETRIÆ dicatum, quod Testudine Jun. p. 274.  
intus perfecte hemisphærica, operitur: Sed in hac fenestrarum  
quatuor æquales aræ [circum ac supra basim hemisphærae ipsius dispo-  
sitæ] tali configuratione, amplitudine, tantaque industria, ac inge-  
nii acumine sunt extructæ, ut his detractis superstes curva Testudinis  
superficies, pretioso opere musivo ornata, tetragonismi vere geometrici  
sit capax. Quæritur modo, quæ sit; qua methodo, quave arte pars ista  
hemisphæricæ superficiei curvæ quadrabilis, tensæ ad instar carbasi, vel  
turgidi veli nautici, ab Architecto illo Geometra fuerit obtenta? & cui  
demum plano geometricæ quadrabilis sit æqualis?

Tit 3.

Præ-



No. LI. Præsentis Ænigmatis enodatio [ quod spectat ad hujus admirabilis Fornicis tum constructionem expeditissimam, tum quadraturam ] *Serenissimo FERDINANDO Magno Principi Etruriæ* scientiarum & nobilium artium Cultori ac Patrono Generosissimo, ab eodem Ænigmatista oblata jam est; qui quidem simul non dubitat, quin hoc ipsum Ænigma a singulis litterario in Orbe degentibus hodie præclarissimis Analytibus sit statim divinandum, proprias quadrationes impertiendo singularis Testudinis hujus tetragonismicæ ab hemisphæra dissectæ, & ipsorum peracutas indagines, multiplicesque industrias ad hoc unum idemque geometricum collimantes impatienter expectat, ut hinc, qui temere contumelias in Geometriam jacere audent, silere discant, vel potius maxima cum voce exclament, *Oh unica verorum sciscitabilium scientia a Divina in hominum mentes infusa*; ut hæc imperviis, mutabilibus, fallacibusque contemptis, æterna ista, quæ semper & unicuique sunt eadem, tantum appetat, nilque aliud unquam magis innocuum scire perquirat.



Nº. LII.

ÆNIGMATIS FLORENTINI

SOLUTIONES

VARIE INFINITÆ.

Per JAC. BERNOULLI.

*Act. Erud.  
Lips. 1692.  
Aug. p. 370.*

**E** Sto [ *Figura 1.* ] ABC quarta pars superficiæ hemisphæricæ, terminata quadrantibus verticalibus AB, AC, & horizontali BC; quo posito,

*Primo.* sumatur ubivis in quadrante punctum F, per quod transeat circulus major FC, e quo abscindatur arcus FE = arcui BF; eritque punctum E in quæsito margine fenestræ BEC: hoc est, si concipiatur Testudo ad instar superficiæ Globi Terrestris,

restis, in qua C Polus, BA Æquator, BC primus Meridianus, No. LII. ac jungantur omnia loca, quorum eadem longitudo est & latitudo, curva BEC; præsentabit hæc curva fenestræ desideratæ marginem: quippe Testudinis superficies ABECA, quæ relinquitur deducta fenestræ area BECDB, æqualis quadrato radii, ac proinde tota Testudo quadrato diametri sphaeræ. (\*)

*Secundo:* Etiam si arcus FH abscindatur minor arcu BF, dummodo sinus horum arcuum proportionales sint, nascetur semper superficies ABHIA quadrabilis, ut pote eandem rationem obtinens ad quadratum radii sphaeræ, quam sinus arcus FH habet ad sinum BF (b).

*Tertio:* Quin etiam, si ipsi arcus FH, FB, proportionales fuerint, evadet superficies ABHIA quadrabilis, quippe quæ ad rectangulum sub radio sphaeræ & sinu verso illius arcus, qui ad quadrantem est, ut arcus FH ad FB, vicissim eam rationem habet, quam FB ad FH. (c)

*Quarto:*

(\*) Sit K [Fig. 3] centrum sphaeræ, cujus superficiei octavam partem exhibeat ABC, literis idem in Fig. 3. ac in 1<sup>a</sup>. denotantibus. Sitque Cef circulus circulo CEF infinite vicinus, & per hujusmodi circulos dividatur superficies ABECA, in innumeras areolas quales FfeE. Hæc æqualis est [Vid. Not. (d) N. XLII pag. 447] rectangulo sub Ff, & sub sinu arcus FE, vel arcus æqualis FB, qui sinus est FG. Verum Triang. similia FGK, FfL, dant FK ad FG ut Ff ad fL aut Gg. Igitur rectang. sub Ff & FG, hoc est areola FfeE æquatur rectang. sub FK radio & sub Gg elemento sinus versi BG arcus BF. Est igitur Tr. BFH æquale rectang. sub radio & sub sinu verso arcus BF, atque ideo, cum arcus BF definit in quadrantem BA,

est tota superf. BFACEB æqualis rect. sub utroque radio FK & BK, hoc est, quadrato radii.

(b) Si arcus FH sinus sit sinui arcus BF proportionalis; quoniam est semper FfhH [elementum Tr. BFH] ad FfeE [elem. Tr. BFE] ut rect. sub Ff & sinu arcus FH ad rect. sub Ff & sinu arcus FE, vel ut sinus arcus FH ad sinum arcus FE, hoc est, in data ratione, erit quoque Tr. BFH ad Tr. BFE, & tota superf. BFAIHB ad totam superf. BFACEB, in eadem data ratione sinus FH ad sinum FE vel BF.

(c) Quod si ratio arcus BF ad arcum FH data fuerit, & æqualis rationi quadrantis BA ad arcum AI, in quem definit arcus FH, quando BF definit in quadrantem BA, sumantur AM, Am, æquales ipsis FH, fh,

No. LII. *Quarto*: Sit punctum D, sumptum ubivis in quadrante horizontali BC, per quod transeat quadrans verticalis AD, ac intelligatur diametro basis hemisphærii BCM seorsim positæ [Figura 2.] insistere figura quævis rectilinea, aut curvilinea, quadrabilis BQM; tum sumatur arcus BP duplus arcus BD, inque centrum N agatur recta PN, secans perimetrum insistentis figuræ in Q. Dico, si facta CS tertia proportionali ad PN, & QN; ductaque SR parallela ipsi BM, abscindatur, [Figura 2.] arcus AL = arcui intercepto CR, fore punctum L in curva quadam BLC, quæ terminet superficiem ABLCA æqualem figuræ quadrabili BQM. (4)

*Quinto*:

fh, & quia est BA ad AI ut BF ad FH vel AM, & ut Bf ad fh vel Am, erit quoque BA ad AI ut Ff ad Mm, aut ut rect. sub Ff & MN, ad rect. sub Mm & MN, quod æquale est rect. sub AK radio & Nn. Nam, ob similia Triang. MKN & MmO, est MK vel AK ad MN ut Mm ad mO vel Nn, & ideo rectang. sub extremis æquale rectangulo sub mediis. Igitur BA ad AI ut rect. sub Ff & MN, ad rect. sub radio & Nn. Sed rect. sub Ff & MN sinu arcus AM, æquale est rect. sub Ff & sinu arcus FH, cui æqualis AM, hoc est æquale areolæ FfhH, elemento Triang. BFH. Pariter rect. sub radio & Nn, est elementum rectang. sub radio & AN sinu verso arcus AM vel FH. Igitur BA ad AI, ut elem. Triang. BFH, ad elem. rectang. sub radio & sinu verso arcus FH, & ideo BA ad AI ut ipsum Tr. BFH ad rect. sub radio & sinu verso arcus FH; consequenter BA ad AI, vel BF ad FH, ut superf. BFAIHB ad rectang. sub

radio & sinu verso arcus AI.

(4) Sit [Fig. 4] ABM sphæræ quadrans, cujus basis semicirculus BCM, centro N descriptus, & si omnia juxta constr. Auctoris fiant, dico Triang. ABL æquale esse Tr. BNQ. Nam sit Ad quam proximus ipsi AD, & Bp duplus Bd, ut est BP duplus BD, ideoque Pp duplus ipsius Dd. Trianguli ABL elem. est ALl, cujus area [Not. (d) N. XLII.] æqualis est rect. sub Dd & AT, sinu verso arcus AL, vel rect. sub Dd & CS, sinu verso arcus CR. [Sunt enim arcuum æqualium AL, CR, sinus versi AT, CS æquales] Igitur, ob Pp duplum ipsius Dd, est ALl semissis rectang. sub Pp & CS. Centro N radio NQ describatur arcus Qt, & erit Pp ad Qt ut PN ad QN, id est per constr. ut QN ad CS. Ergo rect. sub Pp & CS, quod duplum est Tr. ALl, æquatur rect. sub Qt & QN, quod pariter duplum est Tr. QNq. Æqualia sunt igitur Triang. ALl, & QNq; conseq. Triang. ABL, NBQ, quorum

*Quinto* : Cæteris positis, ut prius; si BCMQB, fingatur lunula Hippocratis, non superficies quidem ABLCA, sed ipsa fenestræ area BLCDDB tetragonismi capax erit, ut pote æqualis dictæ lunulæ. (\*)

rum illa sunt elementa, æqualia sunt, atque ubi BD in BC, & BQ in BQM definit, æquales sunt superf. ABLCA, BQMB. quadrans ABC hemisphærii æqualis semicirculo BCMB. Sed, per const. ABLC superf. æqualis est superf. BQM. Ergo fenestra BLC æqualis lunulæ BCMQB.

(\*) Est enim, per Theor. Archimedeum, [ N°. XLII. pag. 447. ] Videatur Num. LXXIII.



No. LIII.

# SOLUTIO PROBLEMATIS

DE

MINIMO CREPUSCULO,

Per JAC. BERNOULLIUM.

*Communicata in litteris, Basileæ,  
die 20. Julii, 1692, datis.*

**N**Otum, Crepuscula maxime diuturna quidem in solstitio æstivo contingere; brevissima vero, non in hyberno, sed medio quodam inter hoc solstitium & æquinoctium tempore, de quo definiendo nunc agitur. Problema autem ex eorum numero  
*Jac. Bernoulli Opera.* Vu u est,

No. LIII. est, in quibus utilitas cum inveniendi difficultate conjungitur; unde multis magni nominis Geometris subinde quidem, at frustra, \* tentatum fuit: nec mirum; obstat enim insuperabilis calculi molestia, devoranda iis qui illud communi more aggrediuntur: sed nec etiam per methodum indivisibilium, promiscue & sine delectu adhibitam, quæsitum facile quis consequetur: peculiaris via est, qua dextre & commode solvatur, quam si quis init, totam difficultatem in unica & simplici proportionem trigonometrica terminari comperiet, quæ talis: *Ut Sinus totus ad Tangent. 9 grad. Sic Sinus Elevationis Poli ad Sinum quæsitæ Declinationis Australis, quam Sol tempore minimi Crepusculi obtinet.*

Eo itaque Problema impeditissimum redactum videmus, ut posthac in vulgaria systemata Astronomica referri, & simplicissimis quibusque Problematibus connumerari valeat.

\* Imo, nisi fallor, jam anno 1542 id Problema fuit a P. NONNIO legitime solutum, in Tractatu de *Crepusculis*. Librum quidem reperire non potui; Sed exstat ad calcem *Commentarii in Spharam J. DE SACROBOSCO* per Cbr. CLAVIUM [utor Edit. An. 1608] Digressio de *Crepusculis*, cujus Auctor in Proœmio profitetur, se NONNII librum in compendium duntaxat redegisse. Hujus au-

tem Digressionis Prop. XXII. docet reperire Punctum Eclipticæ in quo Sol brevissimum efficit Crepusculum, ejusque Crepusculi magnitudinem definire. Etsi vero non incidit in Analogiam tam simplicem, quam ea est quæ hic proponitur, legitimam tamen solutionem esse negari nequit, quæque facile ad istam reduci-  
tur.

Nº. LIV.

Nº. LIV.  
POSITIONUM ARITHMETICARUM  
DE  
S E R I E B U S  
I N F I N I T I S,

Earumque  
S U M M A F I N I T A :  
*Quas,*

Præfide  
J A C O B O B E R N O U L L I,  
Math. P. P. & Facult. Art. p. t. Dec.

*defendit*  
H I E R O N Y M U S B E C K I U S, Basil.

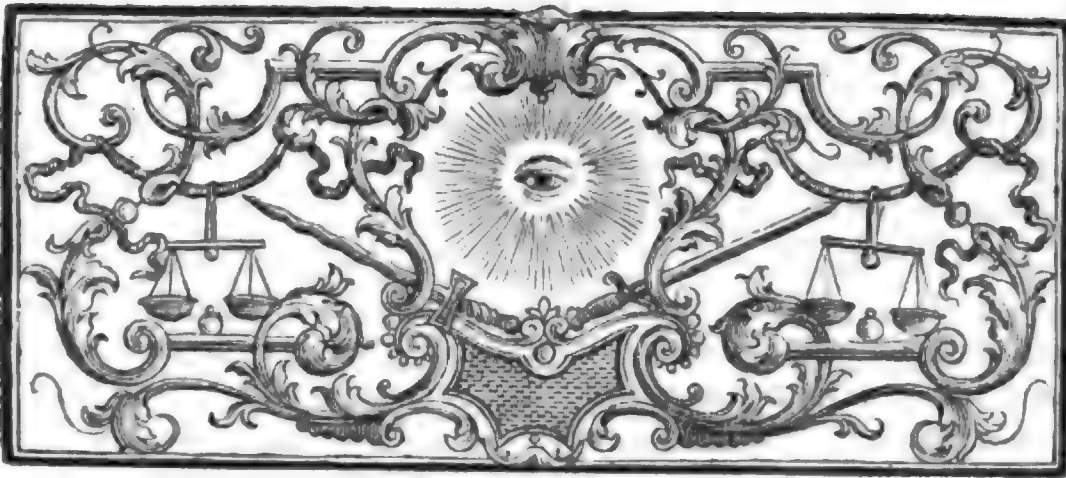
*Ad diem 18. Novemb. M. DC. XCII.*

---

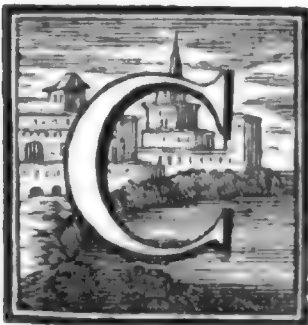
Editæ primum  
B A S I L E Æ.  
1692.







POSITIONUM  
DE  
SERIEBUS  
INFINITIS  
Pars altera.



UM ea , qua de Seriebus infinitis , ante hoc No. LIV.  
triennium & quod excurrit , speculati fuimus ,  
uni etiamnum alterive pagina commaculanda  
sufficiens ; placuit Primæ de illis Disputatio-  
ni \* Secundam hanc attexere , quam ex ab-  
rupto ordior , continuatis Propositionum nume-  
ris , ut eo commodius earum citatio peraga-  
tur.

Vou 3.

XVIII, In-

\* N°. XXXV.

## XVIII.

*Invenire summam seriei infinita reciproca numerorum Trigonalium, Pyramidalium, Trianguli-Pyramidalium, Pyramidi-Pyramidalium, & figuratorum altioris cujuscvis gradus in infinitum: atque infinitarum summarum summam (a).*

1. Quemadmodum si a serie fractionum harmonice progressionalium, hoc est, serie reciproca numerorum naturalium A, eadem multata primo termino subtrahatur, nascitur series fractionum, quarum numeratores sunt *unitates*, denominatores *Trigonalium dupli*; ut patet ex demonstr. XV. \* Ita si a serie reciproca Trigonalium B, eadem truncata primo termino subducatur, exoritur series fractionum, quarum numeratores progrediuntur juxta numeros naturales 2, 3, 4, 5, &c. sed quæ reducuntur ad fractiones, quarum omnium numeratores sunt *binarii*, denominatores vero *Pyramidalium tripli*; unde ipsa series ad seriem reciprocam Pyramidalium C, ut  $\frac{2}{3}$  ad 1. Pariter si a serie hac reciproca Pyramidalium, ipsamet mutilata primo termino subducatur, relinquitur series fractionum, quarum numeratores progrediuntur juxta numeros Trigonales 3, 6, 10, 15, &c. sed quæ reduci possunt ad alias, quarum numeratores omnes sunt *ternarii*, denominatores vero *Trianguli-pyramidalium quadrupli*, unde ipsa series ad seriem reciprocam Trianguli-pyramidalium D, ut  $\frac{3}{4}$  ad 1: Et sic deinceps in infinitum. Quocirca cum singulæ hæ per subductionem genitæ series, quarum numeratores sunt *unitatum*, denominatores figuratorum multipli, per Ax. 3. æquipollegant unitati, ipsæ figuratorum series reciprocarum ordine dabunt summas, ut sequitur:

$$\text{A. Natur. } \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \text{ \&c.} = \frac{1}{0} = 1\frac{1}{0}, \text{ per XVI.}$$


---

B, Tri-

(\*) Vid. Not. (c) Prop. seq.

\* pag. 388.

B. Trigon.  $\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} \&c. = \frac{2}{1} = 1\frac{1}{1}$ , per XV.

C. Pyramid.  $\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{35} + \frac{1}{56} \&c. = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$ .

D. Triang. Pyr.  $\frac{1}{1} + \frac{1}{5} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{70} + \frac{1}{126} \&c. = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$ .

E. Pyr. Pyr.  $\frac{1}{1} + \frac{1}{6} + \frac{1}{21} + \frac{1}{56} + \frac{1}{126} + \frac{1}{252} \&c. = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$ .

2. Summæ hæc a secunda serie B ordine collectæ sunt  $1\frac{1}{1}$ ,  $1\frac{1}{2}$ ,  $1\frac{1}{3}$ ,  $1\frac{1}{4}$ , &c. unde summa summarum est  $1\frac{1}{1} + 1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{3} + 1\frac{1}{4} + \&c.$  quæ infinita est: quin & demtis singularum serierum primis terminis seu unitatibus, summa fit  $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \&c.$  quæ itidem infinita existit, per XVI: at demtis insuper secundis terminis  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \&c.$  summa evadit finita & æqualis  $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ , per Axiom. 3.

## XIX.

*Invenire summam seriei finita reciproca Trigonalium, Pyramidalium, Trianguli-Pyramidalium, Pyram. Pyramidalium, & figuratorum altioris cujuscvis gradus in infinitum.*

Posito in qualibet serie numero terminorum  $n$ , postremi termini in seriebus directis numerorum Naturalium, Trigonalium, Pyramidalium, &c. per ea quæ demonstrabuntur alibi (\*), sunt ordine

(\*) Seriei Naturalium differentia prima est 1, reliquæ evanescent. Ergo, per ea quæ demonstrata sunt N°. XXXV. Not. (b). pag. 389. Terminus generalis Seriei Naturalium ab unitate incipientis est  $1 + (x-1).1 = x$ .

Seriei Trigonalium terminus primus sit  $= 1$ , prima different. primarum erit 2, prima tertiarum  $= 1$ , reliquæ nullæ sunt. Ergo terminus generalis  $1 + (x-1).2 + (x-1).$

$$(x-2):2 = (xx+x):2 = x.$$

$$(x+1):2$$

Seriei Pyramidalium terminus primus  $= 1$ , prima diff. primarum  $= 3$ , prima secundarum  $= 3$ , prima tertiarum  $= 1$ , ultiores nullæ sunt. Ergo Terminus generalis

$$\text{est } 1 + (x-1).3 + \frac{x-1.x-2}{1.2} .3$$

$$+ \frac{x-1.x-2.x-3}{1.2.3} .1 = \frac{x.x+1.x+2}{1.2.3}$$

Eodem modo Seriei Trigono-Pyrami-

No. LIV. ordine hi, qui sequuntur: ( denotantibus hic & ubique punctulis continuam multiplicationem quantitatum, quibus interferuntur. )

$$n, \frac{n \cdot n+1}{1 \cdot 2}, \frac{n \cdot n+1 \cdot n+2}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \frac{n \cdot n+1 \cdot n+2 \cdot n+3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}, \&c.$$

& qui hos immediate excipiunt, sunt isti:

$$n+1, \frac{n+1 \cdot n+2}{1 \cdot 2}, \frac{n+1 \cdot n+2 \cdot n+3}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \frac{n+1 \cdot n+2 \cdot n+3 \cdot n+4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}, \&c.$$

ac propterea erunt ultimi termini in eorundem seriebus reciproci isti:

$$\frac{1}{n}, \frac{1 \cdot 2}{n \cdot n+1}, \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{n \cdot n+1 \cdot n+2}, \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{n \cdot n+1 \cdot n+2 \cdot n+3}, \&c.$$

& qui hos immediate sequuntur,

$$\frac{1}{n+1}, \frac{1 \cdot 2}{n+1 \cdot n+2}, \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{n+1 \cdot n+2 \cdot n+3}, \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{n+1 \cdot n+2 \cdot n+3 \cdot n+4}, \&c.$$

Jam si a qualibet serie reciproca eadem ipsa truncata ab initio & aucta in fine uno termino, methodo Prop. XV, subtrahatur; subducto sigillatim secundo termino a primo, tertio a secundo, sequente ultimum ab ultimo; nascitur series terminorum totidem, quæ, per ea quæ in præced. Propos. dicta sunt, seriei reciprocæ figuratorum gradus sequentis aut subdupla est, aut subsequaltera, aut subsequitertia, &c. atque insuper, per observata Propos. XV, æqualis primo termino minus sequente ultimum ejus seriei, per cujus subtractionem nata fuit: unde ipsa summa seriei finitæ reci-

ramidalium terminus primus & primæ differentiarum ad quartas usque (ulteriores enim nullæ sunt) ordinatim positæ constituunt uncias binomii ad quartam potestatem elevati, 1, 4, 6, 4, 1. Terminus igitur generalis est  $1 + \frac{x-1}{1}, 4 +$

$$\frac{x-1 \cdot x-2}{1 \cdot 2} \cdot 6 + \frac{x-1 \cdot x-2 \cdot x-3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 4 + \frac{x-1 \cdot x-2 \cdot x-3 \cdot x-4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{x \cdot x+1 \cdot x+2 \cdot x+3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \text{ Et ratio}$$

procedendi manifesta est. Hic  $x$  nobis est, quod Auctori nostro  $n$

reciproca figuratorum quorumcunque obtinetur facile; ut sequi. No. LIV.  
tur: (c)

B. Trigon.  $\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} \&c. \dots$  usque ad  $\frac{1.2.}{n. n+1}$   
 $= \frac{2}{1} - 2 \times \frac{1}{n+1} = \frac{2}{1} - \frac{2}{n+1}$

C. Pyram.  $\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} \&c. \dots$   $\frac{1.2.3.}{n. n+1. n+2}$   
 $= \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \times \frac{1.2.}{n+1. n+2} = \frac{3}{2} - \frac{1.3.}{n+1. n+2}$

D. Triang. Pyr.  $\frac{1}{1} + \frac{1}{5} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} \&c. \dots$   $\frac{1.2.3.4.}{n. n+1. n+2. n+3}$   
 $= \frac{4}{3} - \frac{4}{3} \times \frac{1.2.3.}{n+1. n+2. n+3} = \frac{4}{3} - \frac{1.2.4.}{n+1. n+2. n+3}$

E. Pyr. Pyr.  $\frac{1}{1} + \frac{1}{6} + \frac{1}{21} + \frac{1}{56} \&c. \dots$   $\frac{1.2.3.4.5.}{n. n+1. n+2. n+3. n+4}$   
 $= \frac{5}{4} - \frac{5}{4} \times \frac{1.2.3.4.}{n+1. n+2. n+3. n+4} = \frac{5}{4} - \frac{1.2.3.5.}{n+1. n+2. n+3. n+4}$

XX. de

(\*) Methodo pag. 390 exposita;  
invenietur Series reciproca Trigon.

terminum generalem  $\frac{1.2.}{x. x+1}$  reduci

ad  $\frac{2}{x} - \frac{2}{x+1} = 2 \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right)$ ,

unde summa sit  $2 \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{x+1} \right)$ ;

Series recipr. Pyram. terminum

generalem  $\frac{1.2.3.}{x. x+1. x+2}$  reduci

ad  $3 \left( \frac{1}{x} - \frac{2}{x+1} + \frac{1}{x+2} \right)$ , ideoque

summam esse  $3 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} \right)$

$= 3 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{x+1. x+2} \right)$ ;

Series recipr. Trigono - Pyram.

terminum gener.  $\frac{1.2.3.4.}{x. x+1. x+2. x+3}$

reduci ad  $4 \left( \frac{1}{x} - \frac{3}{x+1} + \frac{3}{x+2} - \frac{1}{x+3} \right)$

summamque esse  $4 \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} \right)$ ;

$\frac{2}{x+2} - \frac{1}{x+3} = 4 \left( \frac{1}{3} - \frac{1.1.2.}{x+1. x+2. x+3} \right)$ ;

quæ cum Bernoullianis conveniunt,

& processum satis indicant.

Jac. Bernoulli Opera,

XXX

*Invenire summam seriei infinita reciproca Trigonalium, Pyramidalium, Triang. Pyramidalium, &c. mutata terminis initialibus quolibet: & infinitarum summarum summam.*

1. Summa seriei infinitæ integræ Trigonalium, Pyramidalium, Triang. Pyramidalium, &c. est  $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \&c.$  per XVIII. Si ex unaquaque serie ab initio abscindantur  $n$  termini, summa abscissorum est  $\frac{2}{1} - \frac{1}{n+1}, \frac{3}{2} - \frac{1 \cdot 3}{n+1 \cdot n+2}, \frac{4}{3} - \frac{1 \cdot 2 \cdot 4}{n+1 \cdot n+2 \cdot n+3}, \frac{5}{4} - \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5}{n+1 \cdot n+2 \cdot n+3 \cdot n+4}, \&c.$  per XIX. Subtracta ergo hac a summa omnium, erit summa reliquorum  $\frac{1}{n+1}, \frac{1 \cdot 3}{n+1 \cdot n+2}, \frac{1 \cdot 2 \cdot 4}{n+1 \cdot n+2 \cdot n+3}, \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5}{n+1 \cdot n+2 \cdot n+3 \cdot n+4}, \&c.$

2. Summa serierum omnium mutilatarum seu nullo, seu uno termino est infinita; duobus terminis est  $\frac{1}{2}$ , per XVIII. Hinc si demas tertios terminos (qui constituunt seriem trigonalium B truncatam duobus terminis, cujus summa per eandem est  $\frac{1}{2}$ ) erit reliquorum omnium summa  $\frac{3}{2} - \frac{2}{3} = \frac{5}{6} = \frac{5}{2 \cdot 3}$ . Hinc denuo si quartos terminos auferas (qui formant seriem pyramidalium C eadem truncatam duobus terminis, summamque proin per præced. efficiunt  $\frac{1}{2}$ ) relinquetur cæterorum omnium summa  $\frac{5}{2} - \frac{2}{3} = \frac{7}{6} = \frac{7}{3 \cdot 2}$ . Hinc iterum si quintos terminos resecas, exhibit cæterorum summa  $\frac{9}{4 \cdot 5}$ ; si sextos,  $\frac{11}{5 \cdot 6}$ ; septimos,  $\frac{13}{6 \cdot 7}$ ; &c. adcoque universaliter, si ex unaquaque serie tollantur  $n$  termini, erit mutilatarum ita serierum omnium summa reliqua  $\frac{2n-1}{n-1 \cdot n}$ .

COROLL. Series  $\frac{2}{n+1} + \frac{1 \cdot 3}{n+1 \cdot n+2} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 4}{n+1 \cdot n+2 \cdot n+3} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5}{n+1 \cdot n+2 \cdot n+3 \cdot n+4} + \&c.$

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{n+1, n+2, n+3, n+4} + \&c. \text{ five, } \frac{2}{1} \times \frac{1}{n+1} + \frac{3}{2} \times \frac{1 \cdot 2}{n+1, n+2} +$$

$$\frac{4}{3} \times \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{n+1, n+2, n+3} + \frac{5}{4} \times \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{n+1, \dots, n+4} + \&c. = \frac{2n-1}{n-1 \cdot n};$$

singula enim seriei hujus membra singulas figuratam serierum mutilatarum summas exprimunt, per 1. part. hujus; adeoque & omnia omnium.

## XXI.

$$\text{Seriei hujus, } \frac{1a}{1 \cdot 2} + \frac{2a}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{3a}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{4a}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \&c. \text{ hoc}$$

$$\text{est, } \frac{a}{2} + \frac{a}{1 \cdot 3} + \frac{a}{1 \cdot 2 \cdot 4} + \frac{a}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5} + \&c. \text{ summam invenire.}$$

Series hæc nascitur subductione sequentis seriei,  $\frac{a}{1} + \frac{a}{1 \cdot 2} + \frac{a}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{a}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \&c$ : multatæ primo termino a seipsa integra, methodo Prop. XV, quare ejus summa  $= a$ , primo sc. termino hujus, per Axioma 3.

$$\text{COROLL. Hinc } \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{4}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{16}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \&c. (= F + G + H + I + \&c.) = \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \&c.$$

$$\text{Nam F. } \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \&c. = \frac{1}{1}, \text{ per XXI.}$$

$$G. \dots + \frac{2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \&c. = F - \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{1 \cdot 2}$$

$$H. \dots + \frac{3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \&c. = G - \frac{2}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$I. \dots + \frac{4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \&c. = H - \frac{3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

## XXII.

Invenire summas serierum K, L, M, N, quarum numeratores

XXX 2

sunt



No. LIV. sunt arithmetice progressionales, denominatores Trigonaliū integrorum, aut Quadratorum unitate minutorum quadrata. (d)

K =

(d) Extendit hæc Propof. Methodum pag. 390 ad Series quæ formantur per subtractionem seriei reciprocarum quadratorum, vel cujusvis potestatis  $[\frac{1}{x^n}]$  a se ipsa truncata terminis uno, vel pluribus initialibus.

Reducatur enim fractio, quæ terminum Seriei generalem exprimit, in tot, quot fieri potest, fractiones hujus formæ,  $A : (x+a)^n + B : (x+b)^n + C : (x+c)^n$  &c. ubi  $x$  repræsentat successivos terminos progressionis arithmeticæ. Et si crescat  $x$  per differentiam quæ sit communis divisor quantitatum  $b-a, c-a$ , &c., sitque insuper  $A+B+C$  &c.  $= 0$ , Series erit summabilis.

Ex. gr. Seriei K terminus generalis  $4(2x+1) : xx(x+1)^2$ , reducitur ad  $A : xx + B : (x+1)^2$ ; ubi  $A=4$ , &  $B=-4$  dant  $A+B=0$ , &  $x$  crescendo per unitates alteram conditionem observat. Igitur Series K reducitur ad duas sequentes

$$4\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots - \frac{1}{xx}\right) - 4\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots - \frac{1}{(x+1)^2}\right)$$

quarum summa  $= 4\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{(x+1)^2}\right) =$

quæ, si sit  $x$  infinita, reducitur ad 4.

Pariter Seriei L terminus genera-

lis  $(x+1) : xx(x+2)^2$  reducitur ad  $\frac{1}{4} : xx - \frac{1}{4} : (x+2)^2$ . Ergo cum binæ conditiones requisitæ observentur, ea summari poterit. Reducitur enim Series L ad duas sequentes

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots - \frac{1}{xx}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{xx} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{4} - \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+2)^2}\right),$$

quæ, ubi  $x$  infinita est, abit in  $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$ .

Seriei M terminus generalis est  $x : (4xx-1)^2$ . Is reducitur ad  $\frac{1}{8} : (2x-1)^2 - \frac{1}{8} : (2x+1)^2$ . Ergo Series ipsa componitur ex hisce duabus

$$\frac{1}{8}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots - \frac{1}{(2x-1)^2}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots - \frac{1}{(2x+1)^2}\right)$$

quarum summa  $= \frac{1}{8}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{(2x+1)^2}\right) = (xx+x) : 2(2x+1)^2$ , quæ, posita  $x$  infinita, est  $= xx : 8xx = \frac{1}{8}$ .

Denique Seriei N terminus generalis  $\frac{1}{16}(2x+1) : xx(x+1)^2$ , reducitur ad  $\frac{1}{16} : xx - \frac{1}{16} : (x+1)^2$ . Hujus itaque summa  $= \frac{1}{16}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{(x+1)^2}\right)$ , quæ, cum  $x$  infinita est, reducitur ad  $\frac{1}{16}$ .

Posset ulterius extendi hæc Methodus & ad casus magis compositos applicari: sed Commentatorem oportet brevitatē esse memorem.

$$K = \frac{3}{1^2} + \frac{5}{3^2} + \frac{7}{6^2} + \frac{9}{10^2} + \frac{11}{15^2} + \frac{13}{21^2} + \&c.$$

$$L = \frac{2}{3^2} + \frac{3}{8^2} + \frac{4}{15^2} + \frac{5}{24^2} + \frac{6}{35^2} + \frac{7}{48^2} + \&c.$$

$$M = \frac{1}{3^2} + \frac{2}{15^2} + \frac{3}{35^2} + \frac{4}{63^2} + \frac{5}{99^2} + \frac{6}{143^2} + \&c.$$

$$N = \frac{3}{8^2} + \frac{5}{24^2} + \frac{7}{48^2} + \frac{9}{80^2} + \frac{11}{120^2} + \frac{13}{168^2} + \&c.$$

Per subductionem seriei  $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \&c.$  mutilatæ primo termino a seipsa integra, nascitur series aliqua; cujus termini sunt subquadrupli terminorum respondentium seriei K; unde, per Ax. 3, series  $K = 4 \times \frac{1}{1^2} = 4.$

Per subductionem vero ejusdem seriei mutilatæ duobus primis terminis a seipsa integra, oritur series, quæ quadrupla est seriei L; unde per idem Ax. Series  $L = \frac{1}{4} \times \left( \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} \right) = \frac{5}{16}.$

Denique per subductionem seriei  $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \&c.$  multatæ primo termino a seipsa integra, emergit alia, quæ octupla est seriei M; quare per 3. Ax. series  $M = \frac{1}{8} \times \frac{1}{1^2} = \frac{1}{8}:$  & propterea duplum seriei M, hoc est, omnes termini locorum imparium seriei L.  $= \frac{1}{4}$ ; adeoque reliqui termini ejusdem seriei, hoc est, ipsa series  $N = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$

### XXIII.

*Invenire summas serierum Q & R, item V & X, &c. quarum denominatores sunt termini integri progressionis quadrupla, noncupla, &c. numeratores vero termini progressionis dupla, tripla, &c. unitate tum minuti, tum aucti.*

XXX 3

Operatio

No. LIV.

Operatio talis:

$$\left. \begin{aligned} O &= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \&c. = 2 \\ P &= \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \&c. = \frac{4}{3} \end{aligned} \right\} \text{per Cor. VIII.}$$


---

$$\left. \begin{aligned} Q &= \frac{1-1}{1} + \frac{2-1}{4} + \frac{4-1}{16} + \frac{8-1}{64} + \frac{16-1}{256} + \&c. \\ \text{feu } \frac{0}{1} + \frac{1}{4} + \frac{3}{16} + \frac{7}{64} + \frac{15}{256} + \&c. \end{aligned} \right\} = O - P = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\left. \begin{aligned} R &= \frac{1+1}{1} + \frac{2+1}{4} + \frac{4+1}{16} + \frac{8+1}{64} + \frac{16+1}{256} + \&c. \\ \text{feu } \frac{2}{1} + \frac{3}{4} + \frac{5}{16} + \frac{9}{64} + \frac{17}{256} + \&c. \end{aligned} \right\} = O + P = 2 + \frac{4}{3} = 3\frac{1}{3}$$


---

$$\left. \begin{aligned} S &= \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \&c. = \frac{3}{2} \\ T &= \frac{1}{1} + \frac{1}{9} + \frac{1}{81} + \frac{1}{729} + \frac{1}{6561} + \&c. = \frac{9}{8} \end{aligned} \right\} \text{per Corol. VIII.}$$


---

$$\left. \begin{aligned} V &= \frac{1-1}{1} + \frac{3-1}{9} + \frac{9-1}{81} + \frac{27-1}{729} + \frac{81-1}{6561} + \&c. \\ \text{feu } \frac{0}{1} + \frac{2}{9} + \frac{8}{81} + \frac{26}{729} + \frac{80}{6561} + \&c. \end{aligned} \right\} = S - T = \frac{3}{2} - \frac{9}{8} = \frac{3}{8}$$

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{1+1}{1} + \frac{3+1}{9} + \frac{9+1}{81} + \frac{27+1}{729} + \frac{81+1}{6561} + \&c. \\ \text{feu } \frac{2}{1} + \frac{4}{9} + \frac{10}{81} + \frac{28}{729} + \frac{82}{6561} + \&c. \end{aligned} \right\} = S + T = \frac{3}{2} + \frac{9}{8} = 2\frac{5}{8}$$


---

Idem inveniri potest, resolvendo series propositas Q, R; V & X, methodo Prop. XIV. Exempli loco esto series

Q=

$$Q = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{7}{64} + \frac{15}{256} + \&c. = Y + Z + \Pi + \Sigma + \&c.$$

$$\left. \begin{aligned} Y &= \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \&c. = \text{per Coroll. VIII. } \frac{1}{3} \\ Z &= - + \frac{1}{16} + \frac{2}{64} + \frac{2}{256} + \&c. = 2Y - \frac{2}{4} = \frac{2}{3} - \frac{2}{4} = \frac{1}{6} \\ \Pi &= - - - - - \frac{4}{64} + \frac{4}{256} + \&c. = 2Z - \frac{4}{16} = \frac{2}{6} - \frac{4}{16} = \frac{1}{12} \\ \Sigma &= - - - - - + \frac{8}{256} + \&c. = 2\Pi - \frac{8}{64} = \frac{2}{12} - \frac{8}{64} = \frac{1}{24} \\ \&c. &= - - - - - + \&c. = \&c. \end{aligned} \right\} \frac{2}{3} \text{ per Coroll. VIII.}$$

## XXIV.

*In serie quavis infinita, cujus numeratores omnes sunt aequales; denominatores, vel numeri naturales, vel eorundem quadrata, cubi, aut alia quacunque potestas: summa terminorum omnium in locis imparibus est ad summam omnium in paribus, ut similis potestas binarii unitate mulsata ad unitatem.*

Puta in numeris naturalibus, ut 1 ad 1; in quadratis ut 3 ad 1; in cubis ut 7 ad 1; in biquadratis ut 15 ad 1; &c.

Modus investigandi talis:

*In Numeris Naturalibus:*

Series ista  $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \&c.$  æquatur suis partibus; videl. seriebus  $A + B + C + D + \&c.$

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \&c. = \frac{2}{1} \\ B &= \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \&c. = \frac{2}{3} \\ C &= \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{40} + \&c. = \frac{2}{5} \\ D &= \frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{28} + \frac{1}{56} + \&c. = \frac{2}{7} \end{aligned} \right\} \text{per Coroll. VIII.}$$

Est ergo  $\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \&c.$  æqualis, ideoque  $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \&c.$  dimidia seriei propositæ  $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \&c.$  hoc est, summa terminorum

No. LIV. minorum in locis imparibus dimidia seriei totius; & proinde æqualis summæ reliquorum  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \&c.$

Patet hinc rursus veritas Prop. XVI. cum enim  $\frac{1}{2} > \frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{4} > \frac{1}{8}$ ,  $\frac{1}{8} > \frac{1}{16}$ , &c. erit  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \&c. > \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \&c.$  cui tamen æqualis modo ostensa est; quæ utique conciliari nequeunt, nisi summa utriusque seriei statuatur infinita, hoc est, tanta ut quæ inter illas intercedit differentia rationem æqualitatis destruere non possit.

*In Numeris Quadratis.*

Series  $\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \frac{1}{49} + \frac{1}{64} + \&c. = E + F + G + H + \&c.$

$$\left. \begin{aligned} E &= \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \&c. = \frac{4}{3 \cdot 1} \\ F &= \frac{1}{9} + \frac{1}{36} + \frac{1}{144} + \frac{1}{576} + \&c. = \frac{4}{3 \cdot 9} \\ G &= \frac{1}{25} + \frac{1}{100} + \frac{1}{400} + \frac{1}{1600} + \&c. = \frac{4}{3 \cdot 25} \\ H &= \frac{1}{49} + \frac{1}{196} + \frac{1}{784} + \frac{1}{3136} + \&c. = \frac{4}{3 \cdot 49} \end{aligned} \right\} \text{per Cor. VIII.}$$

Est ergo  $\frac{4}{3 \cdot 1} + \frac{4}{3 \cdot 9} + \frac{4}{3 \cdot 25} + \frac{4}{3 \cdot 49} + \&c. = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \&c.$  adeoque prioris subsesquitercia, hoc est,  $\frac{1}{1} + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \&c.$  æqualis  $\frac{1}{4}$  posterioris, hoc est, termini omnes locorum imparium in serie proposita constituunt tres quartas partes totius seriei, & reliqui unam: quare summa terminorum illorum ad summam horum, ut 3 ad 1. Eadem investigandi methodus observetur in reliquis potestatibus.

Aliter

Aliter &amp; universaliter ita:

No. LIV.

$$x = \frac{1}{1^m} + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{4^m} + \frac{1}{5^m} + \frac{1}{6^m} \&c.$$

$$y = \frac{1}{1^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{5^m} \&c.$$

$$x - y = + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{4^m} + \frac{1}{6^m} \&c.$$

$$= \frac{1}{2^m 1^m} + \frac{1}{2^m 2^m} + \frac{1}{2^m 3^m} \&c.$$

$$2^m x - 2^m y = + \frac{1}{1^m} + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} \&c. = x$$

unde  $2^m x - x = 2^m y$ , &  $y = x - x : 2^m$ , &  $x - y = x : 2^m$ ,

ergo  $y : x - y = x - \frac{x}{2^m} : \frac{x}{2^m} = 1 - \frac{1}{2^m} : \frac{1}{2^m} = 2^m - 1 : 1$ , (\*)

SCHOL.

(\*) Manca, ut verum fatear, mihi videtur hæc Demonstratio, & quæ Auctorem, in Scholio sequenti, in errorem induxit. Ubi ponit  $2^m(x-y) = \frac{1}{1^m} + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \&c. = x$ , non animadvertit Seriei  $x$  terminos esse duplo plures terminis seriei  $2^m(x-y)$ . Scilicet, si Series  $x$  terminatur ad  $\frac{1}{\infty^m}$ , Series  $2^m(x-y)$

terminatur ad  $\frac{1}{(\frac{1}{2}\infty)^m}$ . Non ergo poni debent æquales hæ Series, nisi constet totam Seriem  $x$  primæ suæ medietati æqualem esse, hoc est, posteriorem medietatem prioris respec-

Jac. Bernoulli Opera.

tu evanescere. Nam si prior medietas ad totam Seriem sit ut  $r$  ad  $s$ , erit  $2^m(x-y) : x = r : s$ ; unde est  $y : x - y = 2^m s - r : r$ , quæ ratio redit ad  $2^m - 1 : 1$  (ut vult Auctor noster) tunc tantum quando  $r = s$ . Ut absolvatur itaque Demonstratio, necesse ut ostendamus quænam est ratio  $r : s$ . Ea vero ratio est æqualitatis, quotiescunque  $m$  numerus est unitate major. Nam si concipiatur, ut in Cor. 4. Prop. XV I. pag. 394, hyperboloides DEF [Tab. XX. fig. 1.] inter asymptotos AC, AG, ejus naturæ, ut sit ubique  $CD = 1 : AC^m$ , & BE =  $1 : AB^m$ , & fingatur AC divisa in partes Y y y

No. LIV. SCHOL. Liqueat hinc, quod summæ duarum serierum (etiā si incognitæ) possint ad se invicem habere rationem cognitam. Vid. Prop. XVII. sub fin. Extendit se autem demonstratio ad potestatum radices, sive ad potestates fractas, non minus ac integras: sic ex. gr. colligimus, in serie  $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{8}} + \frac{1}{\sqrt{27}} + \frac{1}{\sqrt{64}} + \frac{1}{\sqrt{125}} + \&c.$  (ubi denominatores sunt cuborum radices quadratæ) omnes terminos locorum imparium ad omnes parium esse, ut  $\sqrt{8} - 1$  ad 1. Mirabile vero est, quod in serie  $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \&c.$  (cujus summa infinita est, ceu major serie  $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \&c.$  ob denominatores minores) termini locorum imparium ad terminos parium juxta regulam inveniuntur habere rationem  $\sqrt{2} - 1$  ad 1, minoris sc. ad majus; cum tamen illi cum his sigillatim collati

tes innumeras æquales; quæ sumantur pro unitatibus, repræsentabit spatium ACDFG Seriem integram  $x = \frac{1}{1^m} + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \&c.$  Capiatur  $AB = \frac{1}{2} AC$ , & repræsentabit spatium ABEFG hujus seriei medietatem primam, spatium vero BEDC medietatem postremam. Ratio igitur  $r:s$  eadem est, quæ spatii ABEFG ad spatium ACDFG. Sed quælibet methodus quadraturarum, aut ipsa calculi integralis principia docent spatium ABEFG esse infinitum, quando  $m > 1$ . Spatium vero BEDC finitum est. Igitur, quando  $m > 1$ , spatii ABEFG ad spatium ACDFG ratio, vel ratio  $r:s$ , eadem quæ infiniti ad se ipsum finito auctum, hoc est, ratio  $r:s$  est æqualitatis ratio. Quare, in eo casu, verum est esse  $y$  ad  $x = y$  ut  $2^m - 1$  ad 1.

Sed, quando  $m < 1$ , spatium ABEFG  $= \frac{1}{1-m} AB^{1-m}$ , & spatium ACDFG  $= \frac{1}{1-m} AC^{1-m}$ . Quare hæc spatia sunt inter se ut  $AB^{1-m}$  ad  $AC^{1-m}$ , vel ut 1 ad  $2^{1-m}$ . Igitur  $r:s = 1:2^{1-m}$ , &  $y:x = y[2^m s - r:r] = 2^m \cdot 2^{1-m} - 1:1 = 2 - 1:1 = 1:1$ . Quotiescunque igitur  $m < 1$ , hoc est, quando loco potestatum, Series est radicum reciproca, toties summa terminorum parium æqualis est summæ imparium. Non satis caute venditavit Auctor, in Scholio quod mox sequitur, Regulam suam pro universali, nec locus est Paradoxo, quod ibidem tanquam verum, in medium affert.



collati iisdem manifesto sint majores : cujus *ερασιόφανείας* ratio. No. LIV. nem, etsi ex infiniti natura finito intellectui comprehendi non posse videatur, nos tamen satis perspectam habemus. Idem vero de similibus seriebus aliis, quæ infinitam summam habent, intelligendum.

XXV.

*Series Thesis X*,  $\frac{a}{b} - \frac{a+c}{b+d} + \frac{a+2c}{b+2d} - \frac{a+3c}{b+3d}$ ; & alia harmonica terminorum totidem & denominatorum eorundem,  $\frac{f}{b} - \frac{f}{b+d} + \frac{f}{b+2d} - \frac{f}{b+3d}$ ; signis + & — alternatim se excipientibus, summoque  $f = a - \frac{bc}{d}$ ; aequales summas, habent.

Etenim subtrahendo terminos locorum parium a terminis imparium, provenit eadem utrobique series,  $\frac{ad-bc}{bb+bd} + \frac{ad-bc}{bb+5bd+6dd}$  sive  $\frac{df}{bb+bd} + \frac{df}{bb+5bd+6dd}$ , &c.

Esto ex.gr. series Th. X.  $\frac{3}{1} - \frac{5}{2} + \frac{7}{3} - \frac{9}{4} + \frac{11}{5} - \frac{13}{6}$ , positoq;  $f = 3 - 2 = 1$ , series harmonica,  $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6}$ , erit

summa utriusque  $\frac{1}{2} + \frac{11}{12} + \frac{1}{30}$ , per saltum excerpta ex serie Q, Th. XV.

XXVI.

*Seriei infinita fractionum K* (quarum denominatores crescunt progressionem geometrica, hoc est, sequentes precedentium sunt aque-multiplices exacte, numeratores vero precedentium aque-multiplices autē vel minuti communi quodam numero,) summam ultimumve terminum reperire.

Yyy 2

(± de-

No. LIV.

( $\pm$  denotat vel ubique  $+$  vel ubique  $-$ )

$$K = \frac{a}{c} + \frac{ab \pm d}{cm} + \frac{abb \pm bd \pm d}{cmm} + \frac{ab^3 \pm bbd \pm bd \pm d}{cm^3} + \frac{ab^4 \pm b^3d \pm bbd \pm bd \pm d}{cm^4} + \&c.$$

1. Summa seriei invenitur, resolvendo illam, methodo Prop. XIV, in series fractionum pure proportionalium  $L + M + N + O + P + \&c.$

$$\begin{array}{lcl} L = \frac{a}{c} + \frac{ab}{cm} + \frac{abb}{cmm} + \frac{ab^3}{cm^3} + \frac{ab^4}{cm^4} + \&c. & = + \frac{am}{(m-b)c} \\ M = \pm \frac{d}{cm} \pm \frac{bd}{cmm} \pm \frac{bbd}{cm^3} \pm \frac{b^3d}{cm^4} & \&c. & = \pm \frac{d}{(m-b)c} \\ N = \dots \pm \frac{d}{cmm} \pm \frac{bd}{cm^3} \pm \frac{bbd}{cm^4} & \&c. & = \pm \frac{d}{(m-b)mc} \\ O = \dots \pm \frac{d}{cm^3} \pm \frac{bd}{cm^4} & \&c. & = \pm \frac{d}{(m-b)m^2c} \\ P = \dots \pm \frac{d}{cm^4} & \&c. & = \pm \frac{d}{(m-b)m^3c} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} L \\ M \\ N \\ O \\ P \end{array}} \right\} \text{per Cor. VIII.}$$

$\&c.$   $\&c.$

Summae serierum  $M, N, O, P, \&c.$  novam progressionem geometricam constituunt, cujus summa, per Coroll. VIII, est  $md : (m-1)(m-b)c$ , quae summae seriei  $L$   $am : (m-b)c$  addita vel subtracta efficit  $(amm - am \pm md) : (m-1)(m-b)c$  summam omnium serierum  $L, M, N, \&c.$  hoc est, ipsius seriei propositae  $K$ .

2. Observandum, si  $m > b$ , summam esse finitam, adeoque ultimum seriei terminum evanescere, vid. Cor. XIV.

Sin  $m < b$ , & summa infinita est, ultimus quoque terminus est infinitus; tum enim singulae progressionem geometricam  $L, M, N, \&c.$  sunt crescentes: confer Prop. V.

At existente  $m = b$ , summa quidem infinita est, sed postremus terminus finitus: tum enim surrogato  $m$  in locum  $b$ , secundus

dus terminus fit  $(am \pm d) : cm$ , hoc est,  $a : c \pm d : cm$ : tertius No. LIV.  
 $(amm \pm md \pm d) : cmm$ , hoc est,  $a : c \pm d : cm \pm d : cmm$ : quartus  
 $(am^3 \pm mmd \pm md \pm d) : cm^3$ , hoc est,  $a : c \pm d : cm \pm d : cmm \pm d : cm^3$ :  
 atque ita postremus  $a : c \pm d : cm \pm d : cmm \pm d : cm^3 \pm d : cm^4$ , &c. in infinitum: unde patet, terminum infinitesimum  
 resolvi in  $a : c \pm$  serie infinitorum geometrice progressionalium  
 in ratione  $m$  ad 1, quorum summa per Cor. VIII. est  $d : (m-1)c$ ,  
 quæ ipsi  $a : c$  addita vel subtracta efficit terminum infinitesimum  
 $(am - a \pm d) : (m-1)c$ , cujus numerator differentiam nu-  
 meratorum primi & secundi termini, uti & denominator deno-  
 minatorum eorundem differentiam exprimit: quare cum ex Prop.  
 X manifestum sit, terminum ultimum hujus progressionis

$$Q = \frac{a}{c}, \frac{am \pm d}{cm}, \frac{2am - a \pm d}{2cm - c}, \frac{3am - 2a \pm 3d}{3cm - 2c}, \frac{4am - 3a \pm 4d}{4cm - 3c}, \&c.$$

five  $\frac{a}{c}, \frac{a \pm d}{cm}, \frac{a \pm 2d}{2cm - c}, \frac{a \pm 3d}{3cm - 2c}, \frac{a \pm 4d}{4cm - 3c}, \&c.$

itidem esse  $(am - a \pm d) : (m-1)c$  five  $a : c \pm d : (m-1)c$ ;  
 sequitur in utraque progressionem K & Q, primis duobus terminis  
 existentibus iisdem, ultimos quoque esse pares, quamvis incre-  
 menta vel decrementa prioris magis subitanea sint, quandoqui-  
 dem ejus termini non nisi per saltum ex posteriore sunt excerp-  
 ti: Invenio enim, quod memorabile est, tertium terminum se-  
 riei K convenire cum termino  $m+2$ , quartum cum  $mm+m+2$ ,  
 quintum cum  $m^3+mm+m+2$ , sextum cum  $m^4+m^3+mm+m+2$   
 seriei Q, & sic deinceps (f); uti patere poterit ex subjunctis se-  
 riebus, ubi  $a$  valet 2,  $c$  3,  $b$  vel  $m$  3, &  $d$  1.

Y y 3

K =

(f) Seriei K terminus generalis  
 est  $\frac{a}{c} \left( \frac{b}{m} \right)^z \pm \frac{d}{c} \times \frac{b^{z-1} + b^{z-2} + b^{z-3} \dots 1}{m^z}$

$$\pm \frac{d}{c} \times \frac{(b^z - 1) : (b - 1)}{m^z} = [ \text{quando}$$

[pono  $z$  esse numerum terminorum  
 qui quæsitum præcedunt] =  $\frac{a}{c} \left( \frac{b}{m} \right)^z$

$$m = b ] \frac{a}{c} \pm \frac{d}{c} \times \frac{(m^z - 1) : (m - 1)}{m^z}$$

Seriei Q terminus, quem  $x$  ter-  
 mini

No. LIV.  $K = \frac{2}{3}, \frac{7}{9}, \frac{22}{27}, \frac{67}{81}, \frac{202}{243}, \&c.$  ultimus  $\frac{5}{6}$ .

$Q = \frac{2}{3}, \frac{7}{9}, \frac{12}{15}, \frac{17}{21}, \frac{22}{27}, \frac{27}{33}, \frac{32}{39}, \frac{37}{45}, \frac{42}{51}, \frac{47}{57}, \frac{52}{63}, \frac{57}{69}, \frac{62}{75}, \frac{67}{81}, \&c.$  ultimus  $\frac{5}{6}$ .

Intellige vero, quæ dicta sunt de summa ultimoque termino seriei K, si numeratores præcedentium sunt æque-multiplices aucti communi numero  $d$ , vel diminuti quidem eodem numero, at insuper  $ab > a + d$ . Nam si sit  $ab = a + d$ , æquivalentur singuli numeratores ipsi  $a$ , summaque seriei fiet finita, nempe  $a m : (m - 1)c$ , & ultimus terminus evanescet, siue  $m$  existat  $<$  vel  $=$  ipsi  $b$ .

## XXVII.

Si dati cujuslibet numeri radix quadrata ducatur in ipsum numerum, & producti radix quadrata denuo ducatur in eundem, & producti hujus radix iterum iterumque; idque fiat continuo in infinitum: erit radix producti ultimi equalis ipsi dato numero: [puta, si datus numerus vocetur  $a$ , erit  $\sqrt{(a \sqrt{(a \sqrt{(a \sqrt{(a \sqrt{(a \&c.))}))})})} = a$ ].

Ponatur enim  $x = \sqrt{(a \sqrt{(a \sqrt{(a \sqrt{(a \&c.))}))})}$  erit  $xx = a \sqrt{(a \sqrt{(a \sqrt{(a \&c.))}))}$  &  $xx : a = \sqrt{(a \sqrt{(a \sqrt{(a \&c.))}))} = x$ ; proinde  $xx = ax$ , &  $x = a$ . Q. E. D.

## XXVIII.

Si dati numeri cujuslibet radix quadrata addatur ipsi dato numero, & aggregati radix quadrata denuo addatur eidem, & aggregati hujus radix iterum iterumque; idque fiat continuo in infinitum: radix

mini præcedunt est  $\frac{a}{c} + \frac{d}{c} \times \frac{x}{(m-1)x+1}$ .  $x + 1$ ; unde habetur  $x = (m^2 - 1)$ :  
 $(m-1) = m^2 - 1 + m^2 - 2 +$   
 $m^2 - 3 \dots + 1$  adeoque  
 $x + 1 = m^2 - 1 + m^2 - 2 +$   
 $m^2 - 3 \dots + 2.$   
 Fiat terminus  $x + 1$  Seriei K æqualis termino  $x + 1$  Seriei Q, & demtis utrinque æqualibus  $a : c$ , ac dividendo per  $d : c$ , relinquetur  
 $(m^2 - 1) : m^2 (m-1) = x : (m-1)$

radix aggregati ultimi radicem dati numeri quarta parte unitatis No. LIV.  
aucti dimidia unitate superabit. [puta  $\sqrt{(a + \sqrt{(a + \sqrt{(a + \sqrt{(a + \&c.))}))})} = \frac{1}{2} + \sqrt{(\frac{1}{2} + a)}$ .]

Posito enim  $x = \sqrt{(a + \sqrt{(a + \sqrt{(a + \&c.))})}$  erit  $xx = a + \sqrt{(a + \sqrt{(a + \&c.))}$  &  $xx - a = \sqrt{(a + \sqrt{(a + \sqrt{(a + \&c.))})}$   
 $= x$ : proinde  $xx = x + a$ , &  $x = \frac{1}{2} + \sqrt{(\frac{1}{2} + a)}$  Q. E. D.

## XXIX.

Datis duobus numeris quibuscumque, si radix quadrata unius ducatur in alterum, & producti radix quadrata in primum, & hujus producti radix in alterum; atque ita semper productorum radices ducantur alternatim in datorum alterum; idque continuetur in infinitum: erit radix producti ultimi aequalis alterutri duorum mediorum proportionalium inter duos datos numeros [puta si dati numeri dicantur  $a$  &  $b$ , erit  $\sqrt{(a \sqrt{(b \sqrt{(a \sqrt{(b \sqrt{(a \sqrt{(b \&c.))}))}))})} = \sqrt[3]{a a b}$ .]

Esto namque  $x = \sqrt{(a \sqrt{(b \sqrt{(a \sqrt{(b \&c.))}))})}$ , erit  $xx = a \sqrt{(b \sqrt{(a \sqrt{(b \&c.))})}$  &  $xx : a = \sqrt{(b \sqrt{(a \sqrt{(b \&c.))})}$  &  $x^4 : aa = b \sqrt{(a \sqrt{(b \&c.))}$  &  $x^4 : a a b = \sqrt{(a \sqrt{(b \&c.))} = x$ ; proinde  $x^2 = a a b x$ , &  $x^3 = a a b$ , &  $x = \sqrt[3]{a a b}$  Q. E. D.

## XXX.

Datis duobus numeris quibuscumque, si radix cubica producti ex utroque ducatur in eorum primum, & producti radix quadrata ducatur in productum ex utroque, & hujus producti radix cubica denuo in eorum primum; & sic alternatim radices cubicae & quadrata ducantur in eorum primum & productum ex utroque: erit radix producti ultimi aequalis primo vel secundo quatuor mediorum proportionalium inter duos datos [puta  $\sqrt{(a^3 \sqrt{(a b \sqrt{(a^3 \sqrt{(a b \&c.))}))})} = \sqrt[3]{a^4 b}$ , &  $\sqrt[3]{(a b \sqrt{(a^3 \sqrt{(a b \sqrt{(a \&c.))}))})} = \sqrt[3]{a^3 b b}$ .]

## XXXI.

Datis duobus numeris quibuscumque, si radix quadrata secundi ducatur in primum, & producti radix quadrata iterum in primum, producti vero hujus radix in secundum, & hujus producti radix denuo in primum, & sic alternatim productorum radices multiplicen-  
tur.



omnium seculorum Geometrae a bis mille retro annis anxie, sed No. LIV. frustra quaesivere. Hanc ego, quoad fieri potuit, per seriem constructionis in infinitum continuandae, primus omnium exhibui in *Actis Lips.* mens. Septemb. 1689. \* cum nemo simile quicquam scripto publicasset, forte nec animo concepisset uspiam.

Atque hic speculationis de Seriebus infinitis fructus felicissimus & nunquam poenitendus nobis extitit; quem, ut infiniti Numinis benignitati unice acceptum ferimus; sic eundem, cum qualicunque hoc nostro exantlato labore, ad maiorem ejus gloriam directum & impensum volumus.

\* Supra No. XXXVII. pag. 411.

## EPIMETPA.

## I.

**D**atur linea curva infinitis circa centrum gyris convoluta, & tamen finita alicui recta aequalis (8).

## II.

Potest fieri ut curva quadam in se redeat instar Ellipsis, & tamen in infinitum excurrat instar Parabolae. Talis est illa, cujus natura exprimitur per aequationem  $ayy = bxx + x^3$  (h).

## III. Nec

(\*) Talem esse Spiralem Logarithmicam, demonstravit Auctor. No. XLII. p. 443.

(h) Haec est Curva 3<sup>i</sup>. ordinis, NEWTONO species 68, quam expraesit figura sua 73. Ruditer delineatam vide Tab. XX. fig. 2. Ex aequatione curvae, habente formam hanc  $y = \pm x \sqrt{\frac{b+x}{a}}$ , manifestum est, quo magis crescunt abscissae  $x$  positivae, eo magis crescere ordinatas  $y$ ,

Jac. Bernoulli Opera,

tam posit. quam negat. Excurrit igitur curva in infinitum ad hanc partem, sed, sumendo abscissas negativas, aequatio abit in hanc  $y = \mp x \sqrt{\frac{b-x}{a}}$ . Igitur si  $x$  excedat  $b$ , quantitatis negativae  $b - x$  radix extrahenda, esset imaginaria. Quamobrem ordinatae fiunt imaginariae ultra abscissam  $AB = b$ , hoc est, curva non ulterius extenditur, sed in se ipsam redit.

Z z z



## No. LIV.

## III.

*Nec absurdum est, unam eandemque numero magnitudinem in pluribus locis discretis & separatis simul existere. Sic dua curva non obstante intervallo quo dirimuntur, nonnunquam constituunt unam eandemque numero curvam; qualis est, qua exprimitur per  $ax - x' = ayy$  (<sup>1</sup>).*

## IV.

*Datur aliquod planum interminatum, quod tamen sit finitum (<sup>2</sup>).*

## V.

*Item aliud quod quidem habeat infinitam aream, sed rotatum circa axem gignat corpus finita magnitudinis (<sup>1</sup>).*

## VI. Ofcu-

(<sup>1</sup>) Hæc est species NEWTONI 67<sup>a</sup> fig. 70. 71. Vid. Tab. XX. fig. 3. Aequatio curvæ, si hanc accipiat formam  $y = \pm \sqrt{(ax - x'^2 : a)}$ , docet, ad partem positivam, curvæ ordinatas esse reales, quamdiu  $x < a$ . Positiva enim quantitas est sub signo radicali. Sed ubi  $x > a$ , tunc negativa evadit quantitas  $ax - x'^2 : a$ , & ejus radix  $y$  imaginaria. Constat igitur curva, ex parte positiva; ovali ACBD, cujus diameter AB =  $a$ . Ad partem vero negativam, imaginariæ sunt ordinatæ  $y = \pm \sqrt{(x'^2 : a - ax)}$ , quamdiu  $x < a$ , reales simul ac  $x > a$ , & inde crescentibus  $x$ , crescent  $y$ . Habet igitur Curva, ex parte negativa, formam Parabolæ campaniformis FEG, quæ distat ab ovali ACBD, intervallo AE =  $a$ . Nollem tamen inde concludere unam eandemque numero magnitudinem in pluribus locis discretis existere posse. Nam qui curvas ACBD, FEG, unam eandemque numero

curvam pronunciat, quoniam una eademque æquatio utriusque naturam exprimit, mihi videtur signum cum re significata confundere.

(<sup>2</sup>) Tale est in hyperbolis, quorum æquatio  $x^m y^n = 1$ , spatium inter ordinatam primariam asymptoton, & ordinatam quamvis comprehensum, quoties  $m < n$ , aut spatium inter ordinatam quamvis, axem asymptoton, & curvam contentum, quoties  $m > n$ .

(<sup>1</sup>) Spatium ABEDC, [Tab. XX. fig. 4] inter hyperbolam Apollonianam BE, ordinatam AB, & asymptotos AC, CD, comprehensum, magnitudinis licet infinitæ, rotando tamen circa asymptoton CD, tanquam axem, gignit solidum finitæ magnitudinis, quod est, nempe, ad solidum finitum generatum ex rotatione rectanguli ABFC circa axem CF, ut 2AC ad AB.

VI.

No. LIV.

*Osculum Curvarum simplex duobus contactibus aequipollere, repetito examine per absurdum deprehendi (°).*

VII.

*Hic Syllogismus, Quoddam animal mente præditum usu rationis caret: Solus homo est animal mente præditum: Ergo, quidam homo usu rationis caret; recte concludit, quamvis arietate videtur in utramque legem Syllogismorum prima figura.*

VIII.

*Est enim in modo Disamis figura tertia; unde liquet, enunciationem exclusivam non semper aequipollere neganti, sed quandoque conversa universali affirmanti.*

IX.

*Prima corporum principia, stamina, seu elementa, sunt necessario solida, non fluida.*

X.

*Si Aer Recipientis ope Antlia Pneumatica ad datum raritatis gradum perducendus sit, & queratur quot haustibus, seu emboli agitationibus integris id consequi liceat; hac observetur Regula: Logarithmum rationis, quam habet raritas aeris desiderata ad raritatem aeris naturalis, divide per Logarithmum rationis, quam habet cavitas Recipientis & Antliæ simul ad cavitatem solius Recipientis; Indicabit enim quotiens quasitum agitationum numerum. Intellige, si Recipiens & Antlia nullibi persuant. (°).*

Zzz 2

XI. Terra

(°) Vid. Num. XLVII. pag. 480, & Nos. LV. LVI. LXIV. LXVI.

(°) Singulis emboli agitationibus, aer, qui recipiente solum continebatur, diffunditur in recipientem simul & antliam. Rarefcit igitur singulis haustibus in ratione quam ha-

bet cavitas antliæ & recipientis simul ad cavitatem solius recipientis. Sit  $a:1$ , vel  $a$ , hæc ratio. Ergo raritas, quæ ante primum haustum erat 1, post primum haustum erit  $a$ , post 2<sup>um</sup>,  $a^2$ , post 3<sup>um</sup>,  $a^3$ , &c., post haustum  $x$ ,  $a^x$ . Sit  $r:1$ , vel  $r$ , ratio quam habet raritas desiderata ad

No. LIV.

## XI.

*Terra semidiameter facili & exquisita methodo sic exploratur. Per libellam accuratissimam Tubo optico instructam & in puncto A [ Fig. 5. ] linea alicujus ad perpendicularum erecta constitutam, observetur eminus punctum B nota distantia : hinc translata libella in punctum B, dirigatur versus dictam perpendicularem, & observetur in hac punctum C superius futurum ipso A : quo facto, erit CA ad AB, ut AB ad semidiametrum Terra quasitam. (\*)*

ad raritatem aeris naturalis. Igitur  $a^x = r$ , vel quoniam numerorum æqualium æquales sunt logarithmi,  $x \log. a = \log. r$ , aut denique  $x = \log. r : \log. a$ .

(°) Nam, quia lineæ AB, BC, sunt ad libellam, id est, horizontales, rectos angulos comprehendunt cum verticalibus AD, BD. Similia

sunt igitur Triangula CAB, BAD, & CA : AB = AB : AD, quæ pro Telluris semidiametro potest haberi. Sed vitiat hujus methodi *obscuritas*, refractionis aeris inæqualiter densi, qua fit ut lineæ AB, BC, quæ rectæ esse deberent, incurvantur.

*Videatur N°. LXXI.*



N°. LV.



Nº. LV.

G. G. L. \*

G E N E R A L I A

D E

N A T U R A L I N E A R U M ,

*Anguloque contactus & osculi, provolutionibus, aliisque cognatis, & eorum usibus nonnullis.*

**C**UM nihil mihi sit gratius, quam qualiacunque tentamina mea *Acta Erud. Viris egregiis digna videri quæ perficiantur; perplacere, quæ Lips. 1692. Clarissimus Basileensium Professor BERNOULLIUS, de linea-Sept. p. 440.* rum osculis mense Martio 1692 † in *Actis Eruditorum* publicavit. Cumque animadverterem, cogitationes quidem nostras in summa ipsi probari, nonnulla tamen aliter constituenda judicari, quod adeo non ægre fero, ut quoties doceor, in lucro ponam; meum esse putavi, rem de-nuo examinare, paratissimo ad retractandum animo, si monitis contrariis Doctissimi Viri locum dari posse deprehendissem.

Statueram ego, *Contactum* continere duas intersectiones coincidentes; *osculum* continere plures contactus coincidentes, osculum quidem primæ gradus esse, quando coincidunt duo contactus, seu intersectiones quatuor; osculum secundi gradus, quando coincidunt intersectiones sex, aut contactus tres &c. & circulum osculantem, sive maximum, aut minimum tangentium, intra, vel extra, in proposito puncto circulorum [ qui scilicet omnium tangentium proxime ad curvam accedit ] esse curvedinis mensuram, & definire quantitatem anguli contactus; ita ut angulus contactus

Z z z 3

duarum

\* *Goslofredi Gulielmi LEIBNITII* † Supra Nº. XLVII. pag. 473.

No. LV. duarum linearum se tangentium sit idem qui circulorum ibi eas osculantium. Et in lineis, quas circulus in pluribus punctis potest secare, altiora etiam oscula posse oriri; cum omnes intersectiones in unum coalescunt, atque ita aliquando, in casu maximæ vel minimæ curvedinis, seu transitus a curvedine crescente ad decrecentem, vel contra, coincidere oscula duo, seu contactus quatuor, intersectiones octo. Observavi etiam postea, centrum circuli curvam propositam osculantis semper cadere in lineam, quæ evolutione fili propositam generare potest, & unicam [suæ seriei] esse perpendicularem illam, quæ ex centro osculantis circuli ad lineam duci possit; sive unicam esse unicam, hoc est unicam esse maximam, vel minimam, ex eodem puncto ad curvam educibilem; cum ex aliis punctis intra curvam plures, vel duæ saltem perpendiculares, id est, in sua serie maximæ vel minimæ, seu *duæ suæ seriei unice* ad curvam duci possint. Et cum constet aliam atque aliam lineam evolutione describi, prout filum producit longius; animadverteram olim [ut hoc obiter dicam] eas, quas D. BERNOULLIUS nuper vocavit *condescriptas*, esse *parallelas* inter se; ita ut una sit ab alia ubique æquidistans, [seu æqualis ubique minimi intervalli, quod est recta minima ab una ad aliam ducenda] vel, ut recta perpendicularis ad unam, sit alteri quoque perpendicularis, quæ dudum mihi fuit definitio *parallelismi* in genere sumpti. Hanc nostram curvedinis mensuram usumque Evolutarum, etiam primo evolutionum Inventori Celeberrimo HUGENIO placuisse, ex solutione catenariæ lineæ animadverti. Porro cum tres intersectiones circuli & curvæ coincident, notavi *flexum* oriri *contrarium*, id est, contactum sumptum cum intersectione. Quemadmodum & coincidentes intersectiones quinque dant contactum cum flexu contrario coalescentem, seu intersectionem cum osculo primi gradus; & intersectiones septem coincidentes dant flexum contrarium cum simplici osculo, seu osculum secundi gradus, cum intersectione coalescens. Unde intelligitur, quotcumque intersectiones coincidentes in contactus, oscula, aut flexus contrarios resolvi posse. Et quidem in contactu vero atque osculo, recta, vel circulus, lineam ab utraque parte tangit extrorsum, vel ab utraque parte introrsum; sed in flexu contrario, unam partem tangit extrorsum, alteram introrsum, & ita compositum non tangit, sed secat.

Causam quoque, cur linea evolutione generans locus sit centrorum omnium circulorum lineam propositam osculantium, ita explicare mihi videbatur. Sumantur duo puncta curvæ A & B, & ducantur rectæ ad curvam perpendiculares in A & in B; earum intersectio communis in C dabit centrum circuli, qui radio CA descriptus, tanget curvam in A; radio vero CB descriptus, tanget eam in B; sed si coincident A & B, sive inassignabiliter distent, hoc est, ubi duæ perpendiculares concurrent; coincidunt duo contactus, duoque circuli *tangentes abeunt in unum*, qui curvam

curvam osculabitur. Sed per hunc ipsum concursum perpendicularium inaffi- No. LV.  
gnabiliter differentium inveniuntur & lineæ evolutione generantes, ut ex *Hu-*  
*geniano* de *Pendulis* Opere patet. Porro circulus, cujus centrum est in recta  
arctui ad easdem partes cavo perpendiculariter occurrente, per punctum oc-  
cursus descriptus, arcum non secatur, sed tangit. Itaque sicubi secatur, neces-  
se est ibi punctum adesse flexus contrarii, seu non esse lineam ad easdem  
partes cavam. Recte autem animadvertit D. BERNOULLIUS intersectione  
simplici ad contactum simplicem, vel ad osculum, seu contactum multipli-  
cem accedente, contactum mutari in sectionem; sed hinc manifestum est,  
cum circulus curvam osculatur, regulariter [ id est excepto flexus contra-  
rii puncto ] coincidere quatuor intersectiones, seu duos contactus: adeo-  
que hanc ipsam esse naturam osculi primi gradus; quandoquidem id oscu-  
lum definimus ordinaria osculatione circulorum, quæ in quocunque curvæ  
puncto regulariter locum habere potest, seu circulo curvedinem mensuran-  
te, qui scilicet proxime ad curvam accedit.

Et in universum dici potest, intersectionum circuli cum alia lineâ nume-  
rum regulariter esse parem. Itaque non video quomodo primi gradus os-  
culum tribus intersectionibus explicari queat; ita scilicet, ut tale osculum  
trium radicum sit regulare & tota curva diffusum; at osculum quatuor ra-  
dicum, seu quatuor coalescentium intersectionum pro secundo & singulari  
habeatur, nec nisi in punctis curvæ determinatis contingat. Contra enim  
se res habet, & quatuor intersectiones, seu duo contactus, osculo cuique  
regulariter insunt; & in solo casu extremo, qui est flexus contrarii, nas-  
cens, ut ita dicam, vel moriens, osculario tribus intersectionibus contenta  
est. Unde nolui ex casu trium intersectionum peculiarem osculi gradum  
facere, cum præsertim ex contactu [ cujus perfectior species osculum est ]  
in intersectionem degeneraret. Eademque ratione, & in altioribus, os-  
culatio sua natura paris est numeri radicum; nec nisi in flexus contrarii  
puncto in numerum imparem abit. Et sane, cum circulus post contactum  
in puncto proposito curvam adhuc in duobus punctis secatur, necesse est has  
intersectiones, promoti circuli centro, continuo ad dictum contactum ap-  
propinquantes, tamen ambas simul contactui coalescere; nam cum quamli-  
bet in eum pervenire necesse sit, ideo, si alterutra sola ad contactum per-  
veniente circulus fiat proximus curvæ, seu oscularis, sequitur ambabus  
intersectionibus separatim pervenientibus ad coalitionem cum contactu pro-  
posito, duos dari circulos lineæ proximos, seu osculantes, per idem ejus  
punctum propositum transeuntes, quod est impossibile. Nisi scilicet linea  
ibi secet semet ipsam; quo casu duarum vice fungitur, adeoque circuli illi  
duo revera lineas duas osculantur, licet unius partes; de quo hic non agi-  
tur. Facile etiam hinc intelligitur, si circulus post contactum internum  
secare curvam rursus [ utrinque ] possit, tunc in casu osculi, [ ubi duæ  
sectiones contactui coalescunt ] circulum osculantem esse extra curvam;  
86



No.LV. & contra ex contactu externo mox in casu coalescendi cum duabus reliquis sectionibus, fieri osculum internum, & ita transitum circuli, a contactu sectionem adjunctam habente ad osculum, esse transitum in oppositam curvæ partem.

Sed & hoc notandum est, *minimam curvedinem & maximam obtusitatem* esse in puncto flexus contrarii, & recte dixit D. BERNOULLIUS, circulum osculantem eo casu degenerare in rectam, radius enim est infinitus, seu centrum cadit in lineæ evolutæ concursum cum sua asymptoto \*. Quoniam antequam duæ proximæ ad curvam perpendiculares hætenus, sibi occurrentes ad plagam propositam, fiant sibi concurrentes ad plagam oppositam, seu ex convergentibus divergentes, debent fieri parallelæ: quo casu eorum concursus infinite abesse debet. Fieri tamen & aliunde potest, ut lineæ generatæ curvedo sit minima, seu maxima obtusitas; non quidem absolute, sed in toto aliquo arcu ad easdem partes cavo, seu in certa progressionem. Cum scilicet talis est natura curvæ per sui evolutionem generantis, ut evolutio continuari ultra certum punctum, & filum generans ulterius extendi nequeat; ut contingit cum curva evolvenda ex duabus convexitatibus sibi obvertentibus ac sese tangentibus composita est. Eodem modo prodibit maxima curvedo, seu minima obtusitas, ut lineæ curvedo ex crescente rursus incipiat fieri decrescens; veluti si curva generanda non intra duos arcus generantes convexitate obversa se tangentes, sed extra earum angulum cadat. Neutro tamen modo generata linea per continuam filii evolutionem producitur.

Hæc autem ut notarem, eo facilius adductus sum, quod linearum naturam in universum illustrant, mihiq; proferunt non tantum ad finiendam illam celebrem de angulo contactus controversiam, sed & a vaga logomachia ad usus solidos ac profuturos transferendam. Et video nuper Dominum EISENSCHMID dissertationem suam contra D. LAGNIUM defendentem, ac de diametro umbræ in eclipsi Lunæ loquentem, ex hypothese Terræ ovalis, adhibuisse diametrum circuli, qui ovalem osculatur, seu cum ea angulum osculi [angulorum contactus minimum] facit, atque ita quam proxime ad illam accedit; eo consilio, ut ex diversis proportionibus diametri umbræ ad diametrum Lunæ definiatur vera figura globi Terræ. Quod quantum præstare possit, observationibus committo.

Cum hæc scripsissem, venere in manus meas *Acta Mensis Maii 1692*, in quibus nova quædam *Bernoulliana* † legi, & lineæ illius, cum qua rectæ convergentes ad rectum punctum, eundem constantem angulum [sed obliquum] faciunt, proprietatem elegantissimam ibi detectam, non sine voluptate observavi, aliaque video notata, quæ generalem curvarum naturam

\* Vide tamen N<sup>o</sup>, LXXVI.

† N<sup>o</sup>, XLIX. pag. 491.



turam illustrent. Plurimum igitur linearum doctrinam hodie promotam No.LV. habemus, tum explicata flexus natura, tum adhibitis ad earum generationem *provolutionibus*, pariter atque *evolutionibus*. Interiorem naturam *flexus*, seu curvatis, aperuisse nonnihil visus sum detecta *mensura anguli contactus*, ope scilicet circuli curvam *osculantis*, seu maxime ad eam accedentis, eundemque cum ea in puncto osculi flexum habentis, de quo tum antea, tum etiam hoc loco dictum est.

Quod ad *provolutionem* attinet, GALILÆUS, ut arbitror, primus de lineis per eam generatis cogitavit, & simplicissimam ex iis *Cycloidem*, quam clavus rotæ in plano incedentis describet in aere, considerare cœpit, de qua multa a Viris doctis sunt demonstrata. ROMERUS *Damus*, Astrorum imprimis scientia clarus, cum in Observatorio Regio Parisino versaretur, elegantes, ut audiui, proprietates detexit Cycloidis altioris, cum rota, scilicet, sive circulus incedit super circulo. De quo tamen ad me nihil pervenit. NEWTONUS nuper de Cycloidibus iisdem egregia & universalia dedit \*.

*Evolutionem* curvarum generatricem primus illustravit HUGENIUS. Eam cogitationem promovit TSCHIRNHUSIUS, adhibitis [ ut ego appellare soleo ] *coevolutionibus*, animadversoque quomodo tales lineæ coevolutæ, ut *foci* spectari possint, & radiorum quoque concursu generentur; considerata imprimis caustica, quæ formatur radiis parallelis a speculo reflexis. Ego inde longius progressus sum, usumque reperi ad solvenda Problemata [ quorum in gratiam potissimum suscipitur speculatio ] *lineasque opticas* inveniendas, quarum ope radii redderentur ad datum punctum convergentes, vel divergentes, aut etiam inter se paralleli. Quod alia etiam ratione præstiterit NEWTONUS in *Principiis* †, HUGENIUS in libro *de Lumine* \*\*. Observavi quoque eadem opera dari figuras *Acamptas*, quæ etsi opticae & politæ sint, radios tamen non reflectunt, & *Aclastas*, quæ licet sint transparentes, seu ex materia radios refringente, vi formæ tamen suæ & positionis ad Solem, radios sine refractione transmittunt. His nunc observationes singulares BERNOULLIUS adjecit. Cæterum ab HUGENIO in tractatu *de Lumine*, & TSCHIRNHUSIO in *Actis*, notatum est, causticam illam, a speculo concavo sphaerico radios solares reflectente formatam, simul esse cycloidealem, provolutione circuli super circulo generatam. Postremo a me nuper proposita est *nova linearum formatio per concursum curvarum ordinatim datarum*, cum antea tantum radiorum seu rectarum concursus adhiberentur; cuius formationis ad Problemata solvenda egregium usum comperi.

Jac. Bernoulli Opera.

A a a a

Eximia

\* *Princ. Math. Phil. Nat. Lib. I. Sect. X. Prop. 48. & 49.*

† *Lib. I. Sect. XIV. Prop. 97. & 98.*

\*\* *Cap. VI. pag. 101. seq.*

**No. LV.** Eximia quædam inesse videntur illis, quæ de figura Veli a vento tensi Clarissimus BERNOLLIUS nuper differuit \*; tametsi de tota re [in qua non desunt scrupuli,] ob molem aliorum negotiorum non expensa, pronunciare non ausim. Ex reperta a me mensuratione *Loxodromiarum* per logarithmos, equidem non parum practici fructus duci potest; difficilem tamen arbitror cursus æstimationem, quæ longitudinibus definiendis sufficiat. Cum de deviatione navis geometrica acribia agitur; non velorum tantum, sed & navis expectanda esset figura. Denique quod innuit, se *Fratremque* in calculo meo plurimum profecisse; id agnosco, congratulorque non illis magis, quam mihi. Valde autem nosse velim, an ultra metas illas sunt provecti, ad quas ego perveni; id si ab ullis, certe ab eorum ingenio aliquando expecto, & gaudebo plurimum, si intellexero; præsertim cum mihi vix amplius in talibus, ea qua prius intentione animi, versari liceat. Cæterum quoque a me non difficulter solvitur illud Problema: Invenire lineam, cujus arcu æquabiliter crescente, elementa elementorum quæ habent abscissæ sint proportionalia cubis incrementorum, vel elementorum, quæ habent ordinatæ; quod in catenaria seu funiculari succedere verissimum est.

Sed quoniam id jam a BERNOLLIIS est notatum; adjiciam, si, pro cubis elementorum ordinatarum, adhibeantur quadrata; quæsitam lineam fore logarithmicam. Si vero ipsa simplicia ordinatarum elementa sint proportionalia elementis elementorum, seu differentiis secundis abscissarum; inveni lineam quæsitam esse circulum ipsum.

\* N°. XLVIII. pag. 481.

N°. LVI,

N°. L V I.

# C U R V Æ D I A - C A U S T I C Æ.

*Earum relatio ad Evolutas, aliaque bis affinia.*

*Item Natura osculorum uberius explicata.*

*Celeritates Navium definitæ.*

*Regulæ pro resistentiis, quas Figuræ in fluido  
motæ patiuntur, &c.*

I. **P**romissam Elateris curvaturam jam aliquoties daturus eram, ni supervenientes novæ speculationes alio me rapiissent; fecissentque, ut iis potius calamo committendis inhærerem, quorum idea recentior vividius mentem feriebat, quam quæ obliterata ex animo novum quasi inveniendi laborem deposcebant. Atque hoc ipsum in causa est, cur fidem etiamnum fallere cogar, postquam nuperæ de Causticis observatiunculæ aliis affinibus inventis ansam præbuere. Cum enim relationem illam simplicissimam inter Evolutas & Causticas per reflexionem nuper detexissem, mox attentandum duxi, num similis forte relatio inter Evolutas & *Dia-Causticas* deprehendi possit. Sic autem voco *Causticas per refractionem* natas, reliquis ad distinctionem *Cata-Causticis* dictis, vel etiam *Causticis* simpliciter, ut ætatis honor aliquis habeatur, præ novis in Geometria hospitibus. Nam *Cata-Causticorum Inventor Nobilis TSCHIRNHAUSIUS* alterarum mentionem quidem iniecit, tangere vero eas noluit.

*Acta Erud.  
Lipf. 1693.  
Jun. p. 244.*

A a a a 2

Solut

No. LVI. Solus HUGENIUS in tractatu *De lumine* \* schema nobis sistit integræ Dia-Causticæ; sed circularis tantum, & per radios incidentes parallelos genitæ. Generalem vero Dia-Causticarum considerationem, earumque ad Evolutas relationem, primus, ni fallor, ego aggressus sum, nec irrito spero successu, ut ex sequenti constructione liquebit.

Sit punctum radians A, Curva quævis Exposita DHM, seu convexa versus A [ut in 1<sup>a</sup> figura] seu concava [ut in 2<sup>a</sup>,] recta HB curvæ perpendicularis, B punctum in Evoluta ejus, AH radius incidens, HI refractus accedens ad perpendicularem in 1<sup>a</sup>, & recedens ab eadem in 2<sup>a</sup> figura. Quo posito, ducantur ex puncto Evolutæ B in radium incidentem & refractum perpendiculares rectæ refractionem metientes BC, BE & angulo quem comprehendunt EBC, æqualis statuatur HBF, ad partes quas schema monstrat, sumptaque HG tertia proportionali ad AH & HC; fiat, ut FG ad FC, sic HE ad HI. Dico punctum repertum I fore in Dia-Caustica ex A: unde haud difficulter patet regressus a data Dia-Caustica ad punctum radians, vel ab utroque dato ad Evolutæ puncta invenienda (¹).

Casuum

\* Cap. VI. pag. 119. seq.

(¹) Constructionis hujus analysin, qualem dedit Auctor, Vide N<sup>o</sup>. CIII. Art. 17. Vide etiam HOSPITALIUM *An. des inf. pet.* §. 133. En synthésin. Sit A punctum radians [Fig. 1. & 2.], AH, Ab radii incidentes, HI, bI refracti, vicinissimi, HB radius osculi. Demissæ normales BC in radium incidentem AHC, & BE in refractum HEI, sunt sinus ang. incidentiæ AHK vel BHC, & refractionis BHI: ideoque sunt in ratione data, ut & Bc, Be [quæ censeri possunt normales radiis, Ab incidenti, bI refracto.]

nec non earum differentiæ Cc, Ee. Hæcque ratio rectarum BC, BE, eadem est cum ratione rectarum FC, HE, propter similitudinem Triang. BFC, BHE, deductam ex æqualitate angul. EBC, HBF, aut potius EBH, CBF. Igitur Cc : Ee = FC : HE. Centris A & I describantur per h arcus ba, bi qui constituunt Triang. Hba, Hbi similia Triang. HBC, HBE, unde est bi : ba = HE : HC. Quæro rationem  $\frac{HI}{EI}$ ; hæc =  $\frac{bi}{Ee} = \frac{bi}{ba} \left[ \frac{HE}{HC} \right]$   
 $\times \frac{ba}{Cc} \left[ \frac{AH}{AC} \right] \times \frac{Cc}{Ee} \left[ \frac{FC}{HE} \right] = \frac{FC}{HC} \times AH$

Casuum vero particularium determinationes sequentes hinc eliciamus. No. LVL.

1. Si curva versus punctum radians sit convexa & refraçtio fiat a perpendiculari, aut si illa sit concava & hæc fiat ad perpendicularem; radii refracti contigui perpetuo divergunt (b).

2. Si curva versus punctum radians sit convexa, & refraçtio fiat ad perpendicularem; aut si illa sit concava & refracta fiat a perpendiculari, radii refracti modo convergunt, modo divergunt, modo paralleli sunt: Convergunt, cum  $HG < HF$ : divergunt ubi  $>$ : & paralleli sunt cum  $=$ . Sed constructio etiam in casu divergentium locum habet, nisi quod tunc recta HI in radio refracto retrorsum producto abscindenda (c).

3. Si punctum A radiet ex infinita distantia, evanescente HG, fiet  $FH:FC = HE:HI$  (d).

4. Si radius curvæ perpendicularis manet ex infinito intervallo,

A a a 3

lo,

$\times \frac{AH}{AC}$  sive  $\frac{HC}{GC}$  [nam, cum sit HG tertia proportionalis ad AH, HC, erit componendo  $AH:AC = HC:GC$ ]. Igitur  $\frac{HI}{EI} [\frac{bi}{Ee}] = \frac{FC}{GC}$ ; vel, convertendo  $HI:HE = FC:FG$ , quemadmodum habet Auctor.

(b) Nam in Fig. 1. si refraçtio fieret a perpendiculari, esset  $BE > BC$ , &  $Be > Bc$ , ideoque  $Ee > Cc > ba$ . Sed  $ba > bi$ , [nam  $ba:bi = HC:HE$ , & ubi refraçtio fit a perpendiculo,  $HC > HE$ ]. Ergo  $Ee > bi$ . Radii igitur divergent.

In Fig. 2. si refraçtio fieret ad perpend. esset  $BE < BC$ , &  $Be < Bc$ , ideoque  $Ee < Cc < ba < bi$  [ob  $HC < HE$ ]. Igitur radii divergent.

(c). In Fig. 1. Si  $HG < HF$ , est  $CG < CF$ . Ergo  $Ee < bi$  [propter  $bi:Ee = CF:CG$ . Vide Not. a]. Ergo radii convergunt. Si  $HG > HF$ , est quoque  $CG > CF$ , &  $Ee > bi$ . Divergunt igitur radii. Si  $HG = HF$  est etiam  $CG = CF$ , &  $Ee = bi$ , ac radii sunt paralleli.

In 2. Fig. Si  $HG < HF$ , est  $CG > CF$ ; atque ideo  $Ee > bi$ , unde sequitur radios esse convergentes. Si  $HG > HF$ , est  $CG < CF$  &  $Ee < bi$ , ac radii divergunt. Sed  $HG = HF$  dat  $CG = CF$ ,  $Ee = bi$ , & radios parallelos.

(d) Nam, posita AH infinites majore quam HC, erit HG eadem HC infinites minor, adeoque nulla. FG igitur abit in FH, & analogia  $FG:FC = HE:HI$ , mutatur in  $FH:FC = HE:HI$ .

No. LVI. 1o, erunt distantia puncti quæsiti a punctis H & B, ut recta refractionem metientes BC, BE. Sin procedat ex intervallo finito, erunt dictæ distantia ut recta BC, & quarta proportionalis ad distantiam puncti radiantis A a punctis H & B ac rectam BE. (•)

5. Si radius, seu ex finita, seu infinita distantia procedens, tangat curvam, & refringatur ad perpendicularem, evanescentibus HC & HG, coincidet CB cum HB, fietque  $HI = EH$ .

6. Si radius, seu ex finito, seu infinito intervallo profectus, ea obliquitate curvæ incidat, ut ejus refractus a perpendiculari recedens curvam tangat, coincidet punctum Dia-Causticæ I cum puncto incidentiæ H. (f)

*Consectaria & Scholia principaliora his  
adnectimus.*

α. Si Curva exposita DHM est geometrica, ejus Dia-Caustica ex quovis dato puncto, quoque talis erit.

β. Quia Evoluta tota circuli in unum punctum concentratur, hinc Dia-Caustica *Hugeniana*, & eadem opera omnes aliæ, quæ ex puncto distantia finitæ generantur, quam facillime determinantur. Schema *Hugenianæ* ex radiis parallelis ad perpendicularem retractis *figure 3<sup>a</sup>* pars sinistra, ex radiis a perpendiculari refractis, pars dextra refert.

γ. Patet vero etiam, quod omnia, quæ BAROWIUS tam operose

(•) Sint AH, Ab [ Fig. A ] radii manantes ex A, quorum ille perpendicularis ad Curvam, irrefractus transeat in HI, iste refrangatur in bI. Erit  $HI : BI = Hb : BE = Hb \times BC : BC \times BE = AH \times BC : AB \times BE = BC : \frac{AB \times BE}{AH}$ .

Quod si A infinite distet, AH & AB censentur æquales, & est HI :

$BI = BC : BE$ .

(f) Tunc enim coincidunt BE, & BH, evanescitque angulus EBH, nec non ipsi æqualis CBF; coincidunt ergo puncta E & H, nec non C & F. Evanescunt igitur CF, & HE. Quamobrem evanescit HI quæ est ad evanescentem HE, ut evanescens FC, ad finitam aut infinitam FG.

operose struxit ad determinandum locum Imaginis puncti radian- No. LVI. tis, e peracta ad superficiem circularem refractione vel reflexione, specialissima duntaxat Corollaria sint generalis nostræ relationis Causticarum & Dia-Causticarum ad Evolutas: Quandoquidem ipsi *Imaginis* nomine nihil aliud venit quam radiorum reflexorum aut refractorum concursus. Qua occasione monemus, illa quæ jam de officio trium Linearum *Anti-Caustica*, *Peri-Caustica* & *Ant-Evoluta* diximus, \* ne sinistra acceptioni ansam præbeant, sic explicanda esse, ut intelligantur de radiis ad rectam RH [Vide *Tab. XIX. Fig. 1*] expositam Curvam in puncto incidentiæ H tangentem, non vero ad ipsam expositam DHM relatis: Sic enim utique limitandum fuisse constat; cum alias si ad curvam referantur radii, ipsorum punctorum A & I alterum alterius, & punctum B sui ipsius sit imago, per hypothesein: minime vero puncta *a*, *i*, & *b*.

δ. Quoniam Ellipseos Dia-Caustica ex radiis axi AC parallelis [Fig. 4.] tota cogitur in unum punctum, focorum nempe alterum, sicubi refractiones fiunt secundum rationem axis AC, ad focorum distantiam DE (\*), hinc expedita constat ratio invenien- di puncta quotlibet Evolutæ ejus hoc pacto: Sumpto quovis in Ellipsi puncto B, & bisecto angulo DBE per rectam BI, quæ axem secet in L, demittatur in axem perpendicularis BF, fiatque ut DE ad AC, sic BL ad BG; ac tum denique, ut GF ad GL, sic BI [quam videlicet abscindit recta EI ipsi BE perpen- dicularis] ad quartam BH, erit punctum H in Evoluta Ellip- seos (h). At idem elegantius obtinetur per relationem Cata- Causticæ

\* Supra No. XLIX. pag. 492. sub finem.

(\*) Ex demonstr. CARTESII *Dioptr. Cap. 8. Art. 3.* Sit enim KB radius incidens axi AC paralle- lus, BE refractus, LB I ad Ellipsim perpendicularis, angulum DBE, ut notum est, bifecans: & erit KB I [BLD] ang. incidentiæ, & LBE

ang. refractionis. Ergo ratio refra- ctionis est ea quæ sinus ang. BLD ad sinum ang. LBE = BE : LE = BD : DL [EUCL. VI. 3.] = EBD seu AC : DE.

(h) Demitte ex H in radios KBM incidentem, & BNE refrac- tum, normales HM, HN, quæ ra- tionem refractionis metientur, eruntque



No. LVI. Causticæ ad Evolutam, quandoquidem utervis Ellipseos focus respectu radiorum ex altero egressorum etiam Cata-Causticæ munere fungitur: hunc enim in finem quærenda tantum quarta proportionalis ad  $\frac{1}{2}$  AC, BD & BI, ad obtinendam statim optatam BH (1): quas constructiones Illustris HUGENIUS cum sua quam dedit *Propositione X. parte 3. Horol. Oscillat.* conferre poterit.

1. *Spira mirabilis*, singulari privilegio non competenti Cycloidibus, sui ipsius quoque Dia-Caustica est ex umbilico, productis videlicet retrorsum radiis, seu a perpendiculari, seu ad perpendicularem refractis, utpote qui antrorsum divergunt. Inveniuntur autem ejus puncta, demissa perpendiculari ex puncto Evolutæ B [vide dictam *Fig. 1. Tab. XIX.*] in radium refractum incidentis AH: intersectionis enim locus erit Dia-Caustica expositæ spiralis DHM, eademque numero cum illa (1).

2. *Rectifi-*

que ideo inter se, ut AC, DE. Age HK, quæ cum HB capiat ang. BHK = NHM, aut cum MH, ang. MHK = NHB, sic ut similia fiant Tr. MHK, NHB, atque ideo HK: HB = HM: HN. Et quoniam est [ex constr.] BG: BC = AC: DE = HM: HN = HK: HB, similia erunt Tri. BLG, HBK, atque BG parallela est HK, quo ipso similia quoque sunt Tr. rectangula BFG, HMK. Ergo KM in B, & GF in L, similiter dividuntur, estque KB: KM = GL: GF = [ex constr.] BH: BI = BN: BE. Ergo KB: KM = BN: BE, prorsus ut requirit Art. 3. supra pag. 551.

(1) Sit EB radius incidens, BD reflexum & per Theor. de Cata-Causticis demonstr. N°. XLIX. pag. 493, est  $2BI = BH: BH = EB: BD$ , componendo,  $2BI: BH = EBD$ :

BD, vel  $\frac{1}{2}EBD$  [ $\frac{1}{2}AC$ ]: BD = BI: BH.

(1) Sit [Fig. B] KH spira mirabilis, AH radius ex umbilico incidens, Hi refractus retroproductus in HI; HB, radius evolutæ; BC, eadem cum BA, sinus incid. & BE, sinus refract. quippe normales ad AH, HI. Quia C & A coincidunt, coincidet quoque G cum illis, sumta nimirum HG tertia proportionali ad HA, HC. Age BF quæ cum BH capiat ang. HBF = EBC, & erit per Theor. pag. 550. FG: FC = HE: HI. Quoniam igitur, FG = FC, erit quoque HE = HI; hoc est, punctum E, in quod cadit BE normalis demissa ex umbilico, est ad Dia-Causticam. Ducatur AE, & quia datur ang. incid. AHB, datur quoque ang. refr. AHE; daturque eorum summa BHE. Datur etiam rectus BEH. Quare datur specie Triang.

§. Rectificationem Dia-Causticarum quod spectat, ea sic habet: No. LVI.  
 Ducto radio incidenti AH, & alio AD, qui tangat expositam, [Vide partem sinistram Fig. 3.] vel alio AL, cujus refractus eam tangat, [vide partem dextram,] Si super puncto radiante A radio AH describatur arcus circuli HM [qui in casu infinitæ distantie puncti A in rectam abit perpendicularem radiis,] erit [in parte sinistra] curva LI, una cum adsumpta recta DL, quæ, per casum articuli quinti determinatur, æqualis differentie radii refracti HI, & alicujus rectæ, ad quam DM est in ratione quæ refractiones metitur; [in parte vero dextra] curva LI sola, æquatur aggregato radii HI, & ejus rectæ, ad quam LM dictam rationem habet. (m).

n. Hinc vero novæ oriuntur constructiones curvarum per Dia-Causticas, quales Dominus de Tschirnaus mediantibus Causticis formandas exhibet: Exempli gratia, Si describenda sit [Fig. 3.] Ellipsis PRS ad datos semi-axes PQ, QS, producat SQ ad B, donec fiat BS = PQ, tum centro B radio BS describatur quadrans DHS, cujus Dia-Caustica ex radiis ipsi BS parallelis sit LIN, posita refractionis mensura ea quæ per rectas BS, BQ, expri-

Triang. BHE; daturque ratio BH : HE. Sed datur etiam ratio AH : BH. Data est igitur ratio AH : HE. Quamobrem radio AH, sub dato angulo AHE, adjungitur recta HE, cum ipso datam rationem habens. Ergo, per Cor. I. Prop. III. pag. 498, Dia-Caustica Ee est Spira eadem cum exposita bH.

(m) Est enim [Vid. Fig. 1. 2. & Not. (a)] propter similia Triang. Hba, HBC, & Hbi, HBE; Ha : Hi = BC : BE = i : r, id est in ea ratione quæ metitur refractionem. Ergo summa omnium Ha, ad summam omnium Hi, in eadem ratione

i : r. Est autem, Fig. 3 parte sinistra, summa omnium Ha = AD — AH = DM, summa autem omnium Hi = HI — DLI. Quare DM : HI — DLI = i : r. Ergo HI — DLI =  $\frac{r}{i}$  DM, & DLI = HI —  $\frac{r}{i}$  DM. At, in ejusdem fig. parte dextra, summa omn. Ha = AH — AL = LM; & summa omn. Hi = LI — HI : unde est LM : LI — HI = i : r, ac LI — HI =  $\frac{r}{i}$  LM, ac LI = HI +  $\frac{r}{i}$  LM.

No. LVI. exprimitur; dico, si curvæ NIL, ope styli ambulantis super quadrante SHD, ita circumvolvatur filum NIHR = NS, ut pars ejus extra quadrantem prominens HR parallela statuatur radio BS, descriptum iri extremitate R optatam Ellipsin PRS (\*).

θ. Patet ex hætenus dictis, quod data curva Exposita, & una harum, vel Evoluta, vel Caustica, vel Dia-Caustica, cæteræ quoque ex iis inveniri possint: sed & quod mirabilius nonnullis fortasse videbitur, data Exposita & una reliquarum trium, possunt exponi aliæ quarum hæc sit altera quævis ex illis tribus omnifariam acceptis, cæque semper infinitæ; ut enim Curva quælibet infinitarum curvarum Evoluta, & sic infinitarum Caustica, vel Dia-Caustica esse potest: Nempe

a. Data Curva AB, [Fig. 5.] ejusque Evoluta CD, reperienda est alia, cujus ista CD sit *Caustica* ex dato puncto E, quod sic peragitur: Sumpto quovis Curvæ puncto B, junctaque EB, excitentur duæ perpendiculares, una FG ad rectam EB ex puncto ejus medio, altera BD ad ipsam curvam AB, erit punctum intersectionis harum G in curva, cujus Caustica ex puncto E est curva CD (°). Liquet autem, si loco Expositæ AB sumatur quævis ejus *Condescripta*, totidem inde diversas Curvas proditura

(\*) Nam quia semper  $DLI = HI$   
 $\text{---} r DM : i$  aut [cum sit  $BQ : BS$   
 $= r : i$ ]  $DLI = HI \text{---} BQ \times DM :$   
 $BS$ , erit etiam  $DLIN = SN \text{---} BQ$   
 $\times BS : BS = SN \text{---} BQ$ , ideoque  $IN$   
 $= DLIN \text{---} DLI = SN \text{---} BQ \text{---}$   
 $HI + BQ \times DM : BS$ . Præterea [ex  
 constr.]  $NIHR = NS$ . Ergo  $HR$   
 $= NIHR \text{---} NI \text{---} IH = NS \text{---}$   
 $NS + BQ + HI \text{---} BQ \times DM : BS$   
 $\text{---} HI = BQ \text{---} BQ \times DM : BS$  &  
 $RK = RH + HE \text{---} EK = HR +$   
 $DM \text{---} BQ = BQ \text{---} BQ \times DM :$   
 $BS + DM \text{---} BQ = DM \text{---}$   
 $BQ \times DM : BS = QS \times DM : BS =$   
 $QS \times HE : BS$ . Igitur ordinatæ RK

curvæ SRP ad ordinatas HE circuli DHS datam habent rationem  $BS : QS$ . Est ideo SRP ellipsis.

(°) Causticarum proprietas est, [vid. No. XLIX. pag. 493. lin. 2. seq.] quod aggregatum radii incidentis & reflexi sit causticæ æqualis, vel eadem minus majusve constante longitudine. Atqui, ducta EG, quæ est  $= BG$ , patet esse  $EG + GD = BG + GD = BD$ , radio evolutæ curvæ AD = causticæ CD, vel eadem majus minusve data longitudine. Quare punctum G est ad curvam optatam.

turas esse, quarum omnium communis caustica ex puncto E est No. LVI: curva CD, sicut eadem omnium *Condescriptarum* communis Evoluta existit. Sin punctum E radiet ex infinita distantia per rectas EB parallelas [quo casu præcedens constructio non habet locum] ducatur GH illis utcumque perpendicularis [Fig. 6] & in protracta DB capiatur  $BF = BL$ , junctæque FL agatur parallela BH, ut & HI ipsi LB, erit punctum I in curva, cujus Caustica est CD (r).

b. Data deinde Curva AB [Fig. 7.] ejusque Evoluta CD, exponi debeat alia FG, cujus illa CD sit *Dia-Caustica* ex dato puncto E, cujusque vertex sit datum punctum F; hoc ita fit: Descriptis, centro E, radio EF seu EH, & alio utcumque majori EG circulis FH, GI; fiat, ut sinus anguli incidentis ad sinum anguli refracti, sic HG ad quartam FL, tum convoluto filo FD circa curvam DC, describat punctum ejus L lineam LG secantem circulum IG in G, erit hoc unum ex punctis curvæ, cujus Dia-Caustica ex E est illa CD (q). Si vero cuipiam constructio hæc non satis geometrica videatur; sciat in promptu mihi esse aliam, qua idem consequor, utendo tantum circulis & lineis rectis: sic ut nec convolutione fili, nec ipsa curva CD indigeam; dummodo concedatur, ex quovis puncto curvæ AB perpendiculararem ei duci posse; quod utique hic & ubique supponendum (r).

B b b b 2

Nota,

(r) Nam, ob  $BF = BL$ , & BH parallelam ipsi FL, est  $BI = HI$ . Quare  $HID = BID =$  causticæ CD, vel ea majus minusve data longitudine. Ergo punctum I est ad Curvam quæsitam.

(q) Debet enim esse, si sit G punctum curvæ optatæ [per Art. 7. pag. 555]  $FLD = GCD + \frac{r}{i} HG$ .

Sed est  $FL = \frac{r}{i} HG$ , &  $LD =$

GCD. Quare  $FLD = GCD + \frac{r}{i} HG$ .

(r) Constructio, quam celat Autor, non multum forte differt ab ista. Producat C Z, ad curvam AB normalis, donec sit  $ZK = AF + \frac{r}{i} EF$ , & agatur recta EK, quam [si necesse est productam] secabit in M circulus, centro Z, radio ZM, qui sit ad ZK ut i ad r, descriptus: Den

No. LVI. Nota, si AB sit Circulus, & CD punctum, prodibunt Ovals illæ *Cartesiana* tantopere celebratæ Geometris; quarum proinde inventio generalioris hujus constructionis tantum casus simplicior existit.

c. *Exposita* porro BC [Fig. 8.] ejusque *Caustica* DE ex puncto A, invenire lubeat aliam, cujus *Evoluta* sit DE. Ad hoc efficiendum quæratur tantum ejus Anti-Caustica, abscindendo ex protracta EC ipsam CF = CA, vel saltem eadem majorem minoremve constante longitudine (f). Quod si vero quærenda sit alia, cujus DE sit *Dia-Caustica*, quæratur primum aliqua, cujus illa DE sit *Evoluta* & tum per §. b. &c.

d. Data denique *Exposita* FG [Fig. 7.] ejusque *Dia-Caustica* CD ex puncto E, præstitutum sit invenire aliam AB, cujus ipsa

Denique rectæ ZM parallela EG designabit in EZ punctum G, quod est ad curvam optatam.

Nam  $i:r = ZM:ZK = GE:GK$  [ob GE, ZM parallelas]. Ergo  $GK = \frac{r}{i} GE$ . Et  $GZ [= ZK$

$- GK] = AF + \frac{r}{i} EF - \frac{r}{i} EG$

$= AF - \frac{r}{i} HG$ . Ergo GCD

$[= GZ + ZCD = GZ + AD; \text{ est enim } ZCD = AD, \text{ cum sit } AZ \text{ evoluta ipsius } CD] = AF - \frac{r}{i} HG$

$+ AD = FD - \frac{r}{i} HG$ : ac denique

$FD = GCD + \frac{r}{i} HG$ . Est igitur punctum G ad curvam, cujus CD *Dia-caustica* est ex puncto E, cujusque vertex in F.

Quod si punctum radians infinite

distet, paululum varianda constructio. Ducta utcumque HL [Fig. 6] ad radios incidentes perpendiculari, producat DB ad AB normalis donec BF sit  $= \frac{r}{i} BL$ ; agatur LF & ipsi parallela BH, atque HI parallela ipsi BL, designabit in recta BD punctum I ad curvam optatam.

Nam, ob similia triangula BLF, IBH, & quoniam est  $BF = \frac{r}{i} BL$

erit etiam  $BI = \frac{r}{i} HI$ . Sed BID = curvæ CD. Ergo curva CD æqualis aggregato radii ID, & rectæ BI, vel  $\frac{r}{i} HI$ . Ergo, per Art. ζ, pun-

ctum I est ad curvam, cujus CD *Dia-caustica* est radiorum incidentium qui sunt ipsi HI paralleli.

(f) Vide N<sup>o</sup>. XLIX. pag. 492.

ipsa CD sit *Evoluta*: Ducta ex E ad Expositam quavis recta EG<sup>Nº. LVI.</sup> & abscissa EH = EF distantia puncti E a vertice Expositæ, fiat, ut sinus anguli incidentis ad sinum anguli refracti, sic GH ad FL, ipsique AL [sumpto A vertice optatæ ubivis in recta EF] in radio refracto æqualis abscindatur GZ, erit Z punctum in optata (†). Sin alia desideretur, cujus *Caustica* sit ipsa CD quærat<sup>ur</sup> primum illa cujus est *Evoluta*, & tunc per §. a. &c.

Habet itaque Lector, in hac & illa Anni 1692 \* lucubration-  
cula, in compendio fere quicquid de *Evolutis*, *Causticis*, & *Dia-  
Causticis*, per mutuam ipsarum comparisonem & relationem ad  
se invicem cognosci potest. Cui si artificium [nobis Fratribus,  
ut credo, peculiare hætenus] adjungere voluissem, quo *Centre  
circularum osculantium*, seu *Evolutæ puncta*, ex natura *Expositæ*  
unica & simplici proportionem inveniri possunt (u), agnosceret  
puto, colophonem quodammodo huic materiæ impositum esse,  
nihilque in ea jure amplius desiderari posse. Spero autem, & in  
his quæ publicavi, nonnulla tam nova tamque singularia conti-  
neri, ut si fontem, unde manant, studiosius tegere voluissem,  
merito omnibus Geometris admirationi esse potuissent.

II. Cum hæc scriberem, incidebant in manus *Acta* mensis Sep-  
tembris anni 1692 eaque quæ Celeberrimus Dominus LEIB-  
NITIVS his præsertim, quæ de *Curvarum osculis*, mense Mar-  
tio publicaveram, erudite opposuit †. Quibus sane perlectis non  
poteram non & gaudere, quod mea qualiacunque examine suo  
digna æstimarit, & meam simul dolere incuriam, quæ verba ita

B b b b 3 obscuro

(†) Nam AD = FD — FL — LA.  
Sed FD [ex natura Dia-Causticæ  
FG] =  $\frac{r}{i}$  HG + GCD & FL [per  
constr.] =  $\frac{r}{i}$  HG, ac LA = GZ.  
Ergo AD =  $\frac{r}{i}$  HG + GCD —  $\frac{r}{i}$  HG

— GZ = ZCD. Igitur filo AD  
convoluto circa curvam DC, descri-  
bet punctum ejus A curvam AZ.

\* Nº. XLIX. pag. 491.

(u) Vid. Num. LVIII.

† Nº. præced.



No. LVI. obscure concepta reliquit, ut Viro perspicacissimo non omnem serupulum eximere valuerint: quapropter ut quod ibi neglectum resarciam, ac rem in majore luce constituam, necessum duco paucas hic lineas annectere, quas Benevolus Lector *Schediasma*-*si* mensis Martii per modum *Addendorum* haud gravate subjungat.

Exemplum communis Parabolæ & ejus Curvæ, cujus Evolutione describitur, totum negotium explanabit: Conceditur mihi, quod si super quovis puncto intermedio posterioris tanquam centro, longitudine fili evolventis ceu radio, circulus describatur, is ipse futurus sit, qui curvam parabolicam osculari dicitur; sed & pro concessio assumo [quis enim post levissimam attentionem hoc inficiabitur?] circulum huncce Parabolam præter punctum osculi necessario in alio aliquo puncto secaturum, imo vero in duobus, sicubi illam in puncto osculi tangere, non secare censendus esset; [utut id veritati adversum jam supra pagina 115 lin. 11 \* exerte demonstravi:] unde si osculum illud per duos contactus, seu quatuor intersectiones coincidentes interpretandum sit, quid obsecro manifestius, quam secuturum hinc fore, ut unus idemque circulus Parabolam in 5, imo 6 punctis secare possit? Quæ in Conicis omni ævo inaudita res fuit. At inquis, annon centrum circuli osculatoris considerari solet ceu concursus duarum rectarum Parabolæ perpendicularium, super quo descripti his radiis circuli curvam tangant, adeo ut in casu indistantiæ perpendicularium efficiatur *concurfus duorum contactuum*? Utique; sed & hoc præoccupavi pagina 116. † Osculum simplex spectari revera potest, ut concursus duorum contactuum; at contactuum factorum non ab *uno eodemque circulo*, sed *duobus circulis diversis & inequalibus* concentricis: quo quidem sensu illud eodem jure considerare possemus ceu concursum decem, centum, pluriumve contactuum factorum a totidem circulis excentricis, prout videli-

\* Supra pag. 478. lin. quinque ultimis.

† Supra pag. 480.



delicet plures, pluresve conciperentur perpendiculares, quarum quælibet foret radius alicujus circuli tangentis, quæque omnes ad indistantiam usque sibi approximari intelligerentur. Verum enim vero ejusmodi consideratio ad propositum nostrum, ubi agitur de numero concurrentium intersectionum unius ejusdemque circuli, prorsus inutilis. Instas porro, si circulus præter contactum curvam adhuc in duobus hinc inde punctis secet, necesse erit, ut hæ intersectiones promotæ circuli centro tandem ambæ simul contactui coalescant, aut si separatim id fiat, ut duo dentur circuli curvam in eodem puncto osculantes, quod impossibile. Resp. si ambæ intersectiones simul contactui coalescant, oritur osculum, non primi, sed secundi gradus; & si una seorsim, cogitandum [ ut monui pagina 112 \* ] illam subinde ex contactu emerfuram, & oppositas curvæ partes perambulaturam, donec alteri in alio aliquo curvæ puncto obviam facta, cum illa novum ibi contactum celebret, post quem alteri huic intersectioni ad priorem contactum non propius accedere, nedum ipsi uni licet. Tandem vero nec hoc prætereundum: si suppositio trium tantum radicum æqualium, seu trium intersectionum coincidentium, pro osculo simplici inveniendæ sit erronea dicenda; quæro cur calculus pagina 114 \*\* in illa fundatus nihilominus ad legitimam solutionem perducatur? Ostendendum itaque esset, hoc vel casu tantum accidisse, vel idem saltem quoque succedere, supponendo quatuor radices æquales; quod nescio an quisquam præstabit.

Cæterum Celeberrimus LEIBNITIUS peregre observavit Circulum, nempe osculatorem, curvedinis mensuram esse, & mihi quoque innotuerat, postquam animadvertissem curvedines radiis horum circulorum reciproce proportionales existere.

III. Pergit post hæc Acutissimus Geometra ad ea, quæ mense Maio

\* Supra pag. 475.

\*\* pag. 477. 478.

Nº. LVI. Maio \* de *Curvatura Veli* differueram ; & nonnulla haud vulgaria in iis quidem latere suspicatur ; de tota tamen re [ in qua tibi non deesse scrupulos affirmat ] nil definit. Optassem vero ego quam maxime , ut dubitandi rationes nobis exposuisset. Quippe nec *Frater* meus , qui dum adhuc Parisiis versaretur Problema plene absolvit , detecto quod me ad æquationem  $adsddx = dy^3$  , [ suppositis elementis curvæ  $ds$  æqualibus ] perduxerat artificio ; nec ipse Illustris HOSPITALIUS , quicum ille inventum communicaverat , quicquam in eo fallaciæ deprehenderunt. Ego sane , præter anomaliam illam quam causatur fluidi supra veli sinum exundantis portio , quamque articulo 25 tetigi \*\*, nihil in toto negotio reperio difficultatis ; adeo quidem , ut nihil præter hoc deesse nobis videatur , quin naturam pressio- nis fluidorum plene perspectam habeamus , indeque mechanicam horum non minus , ac solidorum , absolutam & perfectam aliquando expectare possimus. Fateor in meis positionibus nonnulla reperiiri , [ sed fundamentum calculi non concernentia , ] quæ paulo enucleatius , vel etiam emendatius dici potuissent. Sic , cum §. 5. † celeritates navium , eodem secundo vento velitantium , statuuntur ut *Velorum subtensæ* ; intelligendæ sunt celeritates navium initiales , seu primi celeritatum gradus impressi , non subsequentes celeritates actuales [ quarum ultima , seu maxima est illa , quæ *ad quam non* vocatur ; ] ut pote ad quas supputandas habenda quoque præcipue est ratio resistentiæ seu gravitatis fluidi , cui naves innatant. Reperio autem , quod si illa respectu resistentiæ , seu gravitatis aeris , quo naves impelluntur , valde magna statuatur , qualis reapse est , celeritates navium *ad quas non* , cæteris paribus , propemodum futuræ sunt , ut *radices subtensarum veli* , non ut ipsæ subtensæ ( u ). Notanter adjeci in dicto §. ca-

teris

\* Supra Nº. XLVIII. pag. 481. seq.

\*\* Pag. 489.

† Pag. 484.

( u ) Vid. Nº. CIII. Art. XVIII.

Interim hæc habe. Sit proriæ superficies aquis immersa , ad subtensam veli , ut *Pad p* ; aquæ & aeris densitas ut *D & d* ; *C* Venti , *c* Navis celeritas , atque ideo  $Q = c$  , celeritas qua

*teris paribus*; ut intelligatur, hæc non *absolute* dici, quasi celeri- No. LVI.  
tas navis cujuscumque, seposita consideratione figuræ ejus, ullatenus definiri possit, sed *relative*; ita quidem, ut si de navis unius celeritate semel experientia constiterit, de aliarum omnium ejusdem figuræ, structuræ, & ponderis, sed velorum tantum amplitudine differentium celeritatibus pariter judicium ferri queat. Nunc vero dico amplius, & postquam totum hoc negotium a physica incertitudine ad geometricam ἀκρίβειαν traduxi, ipsam quoque *celeritatem absolutam navium* determinare posse me profiteor.

Primo enim, si pars superficiei proræ immersa aquis plana statuatur & æqualis subtensæ veli, seu basi segmenti circularis quod velum refert, & insuper ratio gravitatis aeris ad gravitatem aquæ, ut 1 ad 841, illi, qui in natura obtinet, quam proxime conformis, deprehendo, velocitatem navis maximam, cujuscunque molis sit, præcise fore subtrigecuplam velocitatis ipsius venti (\*); nisi quod ponderosior navis tardius hanc velocitatem assequatur.

Deinde quamvis proræ superficies, qua aquis immersa est, non plana statuatur, sed, ut communiter ad aquas facilius sulcandas fieri solet, acuminata, vel rostrata, satis tamen constat difficultatem aliam hinc non nasci, præter eam, quæ in hoc consistit, ut definiatur, quanto plus minusve huic illive figuræ in fluido motæ resistatur; id quod sequentes positiones determinabunt.

1. Si

qua ventus in velum impingit; & erit actio venti in velum, ad resistantiam aquæ in proram, ut  $pd \times (C - c)^2$  ad  $PDcc$ . Navis autem celeritate existente maxima, æqualis est actio venti resistantiæ aquæ. Quare, in eo casu  $pd (C - c)^2 = PDcc$ , vel  $(C - c) \sqrt{pd} = c \sqrt{PD}$ , atque ideo  $c$  [celeritas Navis maxima] =

$C \sqrt{pd} : (\sqrt{PD} + \sqrt{pd}) =$  [ si ponas  $D$  multo majorem quam  $d$ ,] quam proxime  $C \sqrt{pd} : \sqrt{PD}$ . Ergo, cæteris paribus,  $c$  est propemodum ut  $(\sqrt{p})$  radix subtensæ veli.

(\*) Sit enim  $P = p$ , &  $D : d = 841 : 1$  erit  $c =$  [  $C \sqrt{pd} : (\sqrt{PD} + \sqrt{pd}) =$  ]  $C : (\sqrt{841} + \sqrt{1}) = C : 30$ , quam proxime.

Jac. Bernoulli Opera,

Cccc

No. LIV. 1. Si *Triangulum Isosceles* DCE [ *Figura 9.* ] & *Rectangulum* AB, æque gravia & basium æqualium, DE, AF, ferantur eadem celeritate in fluido quopiam juxta directiones HQ perpendiculares basibus: Vel etiam [ quod eodem redit ] si idem *Triangulum* juxta dictam directionem moveatur, sed præcedente nunc vertice C, nunc basi DE; erunt resistentiæ, quas a fluido patiuntur figuræ, vel quas idem patitur *Triangulum* diverso sensu latum, in ratione duplicata basis DE, vel AF, & aggregati crurum DC + CE (y).

2. Resistentia quam patitur *Quadratum* in fluido motum juxta directionem lateris, ad resistentiam ejusdem pari celeritate lati juxta directionem diagonalis, vicissim est, ut diagonalis ad latus: facilius ergo hoc quam illo sensu in fluido movetur *Quadratum* (z).

3. Resistentia, quam patitur *segmentum minus Circuli*, juxta directionem basi perpendicularem & præcedente basi latum, ad resistentiam quam idem patitur, eadem celeritate & directione, sed præcedente vertice motum, est ut quadratum diametri ad idem

(y) Sit QH impressio fluidi in particulam H, sive Rectanguli AB, sive Trianguli DCE. Hæc, quia ad latus Trianguli obliqua est, decompone debet in duas QK lateri parallelam, ideoque effectui destitutam, & QI perpendicularem; quæ iterum in duas QM, QL decomponenda est. Prior QM, ad axem CG perpendicularis, eliditur per æqualem & oppositam qm. Posterior illa est quæ Triangulum retardat. Igitur resistentia quam patitur Triangulum, est ad resistentiam quam patitur Rectangulum, ut QL ad QH, hoc est, in duplicata ratione QI ad QH [ ob QL, QI, QH continue proportionales ], vel EG ad EC

[ propter similia Triangula QIH; CGE ] vel denique basis ED ad summam crurum ECD.

(z) Sit enim DCE semi-quadratum, & est, per Not. præc. resistentia in bina latera DCE, ad resistentiam in diagonalem DE, ut  $EG^2$  ad  $EC^2$ , vel ut  $EC^2$  ad  $ED^2$ . Est autem resist. in DE, ad resist. in latus CE [ si utrumque recta in fluidum incurrat ] ut ED ad EC. Ergo, ex æquo, resistentia in DCE, hoc est, in quadratum motum juxta directionem diagonalis, ad resistentiam in CE, hoc est, in quadratum motum juxta directionem lateris, ut  $EC^2 \times ED$  ad  $ED^2 \times EC$ , vel ut EC ad ED, ut latus ad diagonalem.

idem quadratum, multatum triente quadrati basis segmenti cir- No. LVI, culi (a).

COROLL. Hinc resistentiæ *femi-circuli*, cujus modo basis præcedit, modo vertex, sunt ad invicem in ratione sesqui-altera (b).

4. Parabolæ juxta directionem axis incedenti, præcunte modo basi, modo vertice, resistitur in ratione tangentis ad arcum circuli alicujus, qui habeat diametrum parametro, & tangentem semibasi Parabolæ æqualem (c).

Cccc 2

Co-

(a) Sit DAHE [Fig. C] curva quælibet, cujus basis DE, quæque moveatur in fluido, juxta directionem AC basi perpendicularem, nunc base, nunc vertice præeunte. Et si repræsentet PN impressionem fluidi in particulam Nn basis, ista præcedente, sumatur QH = PN, eaque decomponatur in duas, QK parallelam & QI normalem ad curvam: istaque rursus resolvatur in duas, QM, quæ per æqualem oppositam eliditur, & QL quæ sola retardat motum curvæ; ostendeturque, ut in Nota (y) factum est, resistentiam quam patitur particula Nn, base præeunte, esse ad resistentiam quam patitur particula Hb, curva præeunte, ut QL ad QH, vel ut  $QI^2$  ad  $QH^2$ , propter QL, QI, QH continue proportionales. Sed, ob sim. Triang. QIH, HOH, est  $QI : QH = Ob : Hb = dy : ds$ , [positis, nempe  $AB = x$ ,  $BH = y$ ,  $AH$  curva =  $s$ ]. Ergo resistentia partic. Nn basis est ad resistentiam part. Hb curvæ, ut  $dy^2$  ad  $ds^2$ , vel ut  $dy^3 : ds^2$  ad  $dy$ . Quamobrem, si totius basis resistentia exponatur per ipsam basim  $2y = 2 \int dy$ , exponetur totius curvæ

DAE resistentia per  $2 \int (dy^3 : ds^2)$ . Vid. infra Art. 6. pag. 568.

Sit nunc DAE segmentum circuli, cujus æquatio  $yy = 2ax - xx$ , vel  $x = a - \sqrt{aa - yy}$ , aut differentiendo  $dx = ydy : \sqrt{aa - yy}$ , adeoque  $ds^2 [= dx^2 + dy^2] = aady^2 : (aa - yy)$ . Unde est  $\int (dy^3 : ds^2) = \int (aa - yy) dy : aa = (aay - \frac{1}{3}y^3) : aa$ . Ergo resistentia chordæ ad resistentiam arcus ut  $2y$  ad  $2y - \frac{2}{3}y^3 : aa$ , vel ut  $4aa$  ad  $4aa - \frac{4}{3}yy$ , ut quadratum diametri ad idem quadratum minutum triente quadrati basis [ $4yy$ ].

(b) Si DAE fit semicirculus, erit  $y = a$ , & resistentia diametri ad resistentiam semiperipheriæ est ut  $4aa$  ad  $4aa - \frac{4}{3}aa = \frac{8}{3}aa$ , ut 12 ad 8, aut 3 ad 2.

(c) Sit DAE parabola, cujus æquatio  $yy = ax$ . Ergo  $x = yy : a$  &  $dx = 2ydy : a$  atque  $ds^2 = (aa + 4yy) dy^2 : aa$ . Igitur resistentia basis ad resistentiam curvæ, ut  $y$  ad  $\int (dy^3 : ds^2) = \int (aady : (aa + 4yy)) = \int (\frac{1}{3}aady : (\frac{1}{3}aa + yy))$ , quæ est expressio arcus circuli, cujus diameter  $a =$  parametro, tangens  $y =$  semibasi.

No. LVI. COROLL. Si basis Parabolæ æquetur parametro, Resistentiæ erunt, ut Quadratum ad Circulum inscriptum ( $d$ ).

5. *Hyperbola* [*Ellipsis*] Resistentias, quas subeunt, cum nunc basis, nunc vertex præcedit, ita comparabis. Fiat, ut Aggregatum [*Differentia*] transversæ & recti lateris ad latus transversum: sic quadratum recti lateris ad quadratum diametri circuli alicujus in quo applicetur tangens æqualis semibasi Hyperbolæ [*Ellipsis*], tumque fiat iterum, ut Aggregatum [*Differentia*] laterum ad latus rectum, sic dicta tangens ad aliam rectam: nec non ut idem Aggregatum [*Differentia*] laterum ad transversum, ita arcus tangenti circuli respondens ad arcum alium: quo facto erunt Resistentiæ ut dicta tangens ad Aggregatum [*Differentiam*] inventæ rectæ, arcusque ( $e$ ).

COROLL. Si Hyperbola sit æquilatera, fiat diagonius quadrati, super lateribus ejus descripti, optati circuli diameter, cui adaptetur tangens æqualis toti basi Hyperbolæ, eruntque Resistentiæ, ut duplum tangenti ad ipsam tangentem suomet arcu auctam. Et si insuper Hyperbolæ basis semissi dicti diagonii æquetur, invenientur Resistentiæ, ut duplum quadrati circulo circum-

( $d$ ) Quod si basis  $= a$  parametro, erit  $y = \frac{1}{2}a$ , tangens æqualis radio, & arcus octans peripheriæ. Igitur resistentiæ sunt, ut radius ad octantem peripheriæ, vel ut quadratum ad circulum inscriptum.

( $\frac{1}{2}app \pm pyy$ )  $=$  [posito  $a \pm p = b$ ] ( $bpy + \frac{1}{2}app$ )  $dy^2 : (\pm ppy + \frac{1}{2}app)$  Ergo resistentia basis ad resistentiam curvæ, ut  $y$  ad  $f(dy^2 : ds^2) = f(\pm ppy + \frac{1}{2}app) dy : (bpy + \frac{1}{2}app) = \pm sp dy : b + f(\frac{1}{2}app dy : b (bpy + \frac{1}{2}app))$

( $e$ ) Dicatur  $p$  parameter, vel latus rectum,  $a$  latus transversum Hyperbolæ vel Ellipsis, cujus æquatio  $ayy = apx \pm pxx$  [signum superius ad hyperbolam, inferius ad ellipsim pertinet], vel  $xx \pm ax + \frac{1}{4}aa = \frac{1}{4}aa \pm ayy : p$ , aut  $x = \mp \frac{1}{2}a \pm \sqrt{(\frac{1}{4}aa \pm ayy : p)}$ , &  $dx^2 = ayy dy^2 : (\frac{1}{2}app \pm ayy)$ , adeoque  $ds^2 [= dx^2 + dy^2] = (\frac{1}{2}app + (a \pm p)yy) dy^2 :$

$= \pm py : b + \frac{a}{b} f(\frac{app}{4b} dy) : (yy + app : 4b)$ , quæ quantitas integralis exprimit arcum circuli, cujus diametri quadratum  $= app : b$ , tangens  $y$ . Dicatur is arcus  $A$ ; & erit resistentia basis ad resistentiam curvæ, ut tangens aut semibasis  $y$  ad  $aA : b \pm py : b$ ; quæ illa ipsa est ratio quam verbis enunciat Auctor.



cumscripti ad quadratum simul & circulum. (f).

Quæ dicta sunt de Resistencia Ellipsis, procedunt tantum, cum illa juxta axem majorem movetur. Nam Resistencia quam patitur, cum juxta minorem movetur, dependet a quadratura Hyperbolæ; quare ope Logarithmicæ, seu Funiculariæ, sic invenitur. Sit Funicularia, cujus Parameter sit ad semilatus rectum Ellipsis in ratione subduplicata triplicatæ lateris transversi & differentiæ utriusque. Deinde fiat, ut latus rectum Ellipsis ad differentiam laterum, sic tertia proportionalis ad latus rectum & basin Ellipsis ad quartam. Denique ducta per centrum Funiculariæ recta ad axem perpendiculari, applicetur ei ad curvam recta alia parallela axi, quæ sit ad parametrum Funiculariæ in ratione subduplicata lateris transversi Ellipsis & differentiæ ejus ac inventæ quartæ. Quo facto, alia quædam proportionalis ad differentiam laterum, latus rectum & semi-basin Ellipsis, multata intervallo, quod axem Funiculariæ & parallelam ejus discriminat, mensuram resistentiæ optatæ determinabit (g).

Cccc 3.

6. Ge-

(f) Si ponatur  $p = a$ , ellipsis abit in circulum, cujus resistencia Art. 3. data est, independenter ab arcus rectificatione; quippe, in eo casu,  $b = a - p$  sit = 0.

Hyperbola vero, ubi  $p = a$  æquilatera fit, & est  $b = a + p = 2a = 2p$ . Resistentiæ sunt, ut  $y$  ad  $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}y$ , vel ut  $4y$  ad  $2A + 2y$ . Est autem  $A$  arcus circuli, cujus diametri quadratum =  $app$ :  $b = \frac{1}{2}pp =$  semidiagonio quadrati, super latere  $p$  vel  $a$  descripti, cui aptata tangens  $y =$  semibasi. Quod si vero ipsa diagonalis pro diametro sumatur, & aptetur tangens  $2y =$  basi; omnes lineæ duplicantur, & habetur arcus  $2A$ . Sunt igitur resistentiæ basis & curvæ, ut  $4y$ , duplum tangentiæ  $2y$ , ad

$2y + 2A$  ad tangentem simul & arcum.

Quod si tangens  $2y$ , seu basis =  $\frac{1}{2}pp$  semidiagonio, vel radio circuli, arcus  $A$  erit octans peripheriæ, cujus ad tangentem suam eadem ratio est quæ circuli ad quadratum circumscriptum. Igitur, eo in casu, basis & hyperbolæ resistentiæ sunt, ut duplum quadrati ad quadratum circulo inscripto auctum.

(g) Nam si ellipsis juxta minorem axem movetur, parameter  $p$  minor axe transverso  $a$ , adeoque  $b = a - p$  quantitas negativa. Igitur terminus  $f(\frac{1}{2}aappdy)$ :  $b(\frac{1}{2}app + byy)$  dividendo per  $-b$ , induet hanc formam  $-f(\frac{1}{2}aappdy)$ :  $bb(\frac{1}{2}app + byy)$  quæ pendet a logarithmis vel quadratura.



No. LVI. 6. Generaliter vero in *quacunque Figura*, quæ eadem celeritate, nunc præcedente base, nunc vertice, per fluidum quodpiam movetur, Resistentiæ se habent, ut Figuræ basis ad summam omnium cuborum factorum ex elementis basis, & applicatorum ad quadratum elementorum ipsius curvæ (*b*). At quantum unica hæc

dratura hyperbolæ, cujusque integralis est  $(pa\sqrt{a} : 4b\sqrt{b}) \times \text{Log.} ((p\sqrt{\frac{a}{b}} - 2y) : (p\sqrt{\frac{a}{b}} + 2y))$ . No-

tum autem est quantitates logarithmicales, per Funiculariam haberi posse. Ut demonstretur Auctoris constructio, ponamus rectam æqualem  $A : \sqrt{(BB - yy)}$ , quæ axi parallela intercipitur inter rectam normalem ad axem, & Funiculariam, cujus parameter est  $A : B$ ; hanc rectam, aio, distare ab axe, intervallo quod sit  $= f(Ady : (BB - yy))$ . Id autem facillime ex iis sequitur, quæ de natura Funiculariæ demonstrata sunt. Ostensum enim est, No. XXXIX. pag. 426. si sit  $P$  parameter, &  $x$  abscissa a vertice, esse applicatam  $y = f(Pdx : \sqrt{(xx + 2Px)})$ ; quamobrem, si sit  $z$  abscissa a centro, hoc est si  $z = x + P$ , erit  $u = f(Pdz : \sqrt{(zz - PP)})$ . Fiat igitur  $P = A : B$ ; &  $z = A : \sqrt{(BB - yy)}$ , adeoque  $dz = Aydy : (BB - yy)^{\frac{3}{2}}$ , & erit  $u = f(Ady : (BB - yy))$ . Comparetur hæc formula cum expressione integranda  $f(\frac{1}{4}aappdy : bb(\frac{1}{4}app : b - yy))$ ; & erit  $A = \frac{1}{4}aapp : bb$ , ac  $BB = \frac{1}{4}app : b$ . Describatur itaque Funicularia cujus parameter  $P = A : B$

$$= \frac{\frac{1}{4}aapp : bb}{\frac{1}{4}p\sqrt{a} : \sqrt{b}} = \frac{1}{2}pa\sqrt{a} : b\sqrt{b}, \text{ \& }$$

ejus axi parallela applicetur recta  $= A : \sqrt{(BB - yy)} = \frac{1}{4}aapp : bb$   
 $\sqrt{(\frac{1}{4}app : b - yy)} = (\frac{1}{2}aap : b\sqrt{b}) \times \sqrt{(a - 4byy : p)} = P\sqrt{a} : \sqrt{(a - 4byy : pp)}$ ; eritque  $u$  distantia ejus rectæ ab axe  $= f(\frac{1}{4}aappdy : bb(\frac{1}{4}aapp : b - yy))$ . Ergo recta  $py : b$ , tertia proportionalis ad differentiam laterum, latus rectum, & semi-basim ellipsis, mutata intervallo  $u$  quod axem Funiculariæ & parallelam ejus discriminat, est ad  $y$  ut resistentia ellipsis juxta minorem axem mota, ad resistentiam basis, prorsus ut habet Auctor.

(*h*) Vide Notam (*a*) pag. 565. Quod si autem figura plana DAE, circa axem AC rotata generet solidum, quod in fluido moveatur juxta directionem axi parallelam, nunc base, nunc vertice præeunte, erit pariter resistentia, quam patitur corona circularis ex rotatione particulæ Nn genita, ad resistentiam, quam patitur zona ex rotatione particulæ Hh genita, ut  $ds^2$  ad  $dy^2$ , vel ut  $cydy$  ad  $cydy^3 : ds^2$  [ $c$  denotante peripheriam cujus radius = 1]. Quare, si resistentia basis per ipsam basim solidi,  $\frac{1}{2}cyy = fcydy$  designetur, resistentia superficiæ curvæ erit  $= f(cydy^3 : ds^2)$ , adeoque erunt illæ resistentiæ, ut  $yy$  &  $2f(ydy^3 : ds^2)$ .

Itaque

hæc observata regula, tum ad constructionem navium, tum ad No. LVI. perficiendam nauticam universam, tum etiam ad definiendam figuram Penduli alicujus horologii, ut aerem quam liberrime sulcare, & minima quantumvis vi in motu conservari possit (i), plurimaque præstanda alia, momenti conferat, haud dictu opus est; quin potius mirari subeat, quod visa tam manifesta rei utilitate,

Itaque, si proponitur conus isosceles, cujus latus ad radium basis sit ut  $l$  ad  $r$ ; in quo igitur est  $ds:dy = l:r$  adeoque  $ds^2 = l^2 dy^2:rr$ , adeoque  $2f(ydy:ds^2) = 2f(r^2 ydy:l^2) = r^2 yy:l^2$ ; dicemus resistantiam basis esse ad resistantiam superficiei conicæ, ut  $yy$  ad  $r^2 yy:l^2$  vel ut  $l^2$  ad  $r^2$ , in duplicata ratione lateris ad radium basis.

Segmenti sphaeræ, [ubi  $ds^2 = aady^2:(aa-yy)$  Vide Not. (a) pag. 565.] basis, quando præcedit, patitur resistantiam, quæ est ad resistantiam superficiei sphaericæ, si præcedit vertex, ut  $yy$  ad  $2f(ydy:ds^2) = 2f(ydy \times (aa-yy):aa-yy) = yy - \frac{1}{2}y^2:aa$ , vel ut  $aa$  ad  $aa - \frac{1}{2}yy$ , ut quadratum radii sphaeræ, ad idem quadratum minus semiquadrato radii basis.

Igitur hemisphaerii resistantia est semissis resistantiæ basis ejus. Nam, in eo casu,  $y = a$ . Ergo  $aa - \frac{1}{2}yy = \frac{1}{2}aa$ . Ut etiam invenit NEWTONUS *Phil. Princip. Lib. II. Sect. VII. Prop. 34.*

Solidi parabolici [quod habet  $ds^2 = (aa+4yy) dy^2:aa$ . Vid. Not. (c). pag. 565.] resistantiæ, modo base, modo vertice præeunte, sunt ut  $yy$ , &  $f(ydy:ds^2) = 2f(aaydy:(aa+4yy)) = \frac{1}{4}aa \times f(8ydy:(aa+4yy)) = \frac{1}{4}aa \times (\text{Log. } (aa+4yy) - \text{Log. } aa)$  [subtrahitur Log.  $aa$ , quia Log.  $(aa+4yy)$ , posito  $y=0$  fit  $= \text{Log. } aa$ ], vel ut  $yy$  ad  $\frac{1}{4}aa$  Log.  $((aa+yy):aa)$ , quæ ratio vel per logarithmos, vel per Funiculariam facile dabitur.

Solida vero hyperbolicum & ellipticum, base præcedente resistantiam patiuntur, quæ est ad resistantiam eorundem, vertice præcedente, ut  $yy$  ad  $2f(ydy:ds^2) = [$  quoniam  $ds^2 = (byy + \frac{1}{4}app) dy^2:(\pm pyy + \frac{1}{4}app) ] = 2f(\pm pyy + \frac{1}{4}app)ydy:(byy + \frac{1}{4}app) = \pm 2fpydy:b + f(\frac{1}{4}aappdy:b(byy + \frac{1}{4}app)) = \pm pyy:b + \frac{aapp}{4b} \text{Log. } ((byy + \frac{1}{4}app):\frac{1}{4}app)$ , quæ ratio pariter per logarithmos facile haberi potest.

(1) Solidum minimæ resistantiæ definierunt NEWTONUS, *Princ. Phil. Math. Lib. II. Sect. VII. Prop. 35. Schol.* FATIO DUILLERIUS, in peculiari Tractatu, *Joh. BERNOULLI in Actis Lips. 1699 & 1700, HOSPITALIUS ibid. & in Comment. Acad. Reg. Scient. Paris. 1699*; Generalissime autem BOUGUERUS in iisdem *Comment.* ad ann. 1733.

No. LVI. litate; nemo quod sciam hoc æquor adhucdum arare tenta-  
verit.

IV. Quod superest in Schediasmate *Leibnitiano*, solutionem concernit æquationis supra memoratæ  $adsddx = dy^3$ , quam Summus Vir, instituto examine, Catenariæ competere nobiscum agnoscit (k); & insuper peregre observat, quæsitam curvam fore Circulum, si habeatur  $addx = ds dy$  (l). His addere liceat, quod si sit  $addx = dy^2$ , emersura est Curva quæpiam, quæ etsi non sit ipsa Logarithmica, ejus tamen ope sic constructur: Esto logarithmica AF [Figura 10.] cujus asymptotos DG, & applicata AC æqualis subtangenti  $= a$ . Hac, ceu radio, super C describatur Circuli Quadrans AED, sumptoque ubivis in logarithmica puncto F, ducantur per illud rectæ FE, FH, parallelæ ipsis DG, AC, eisdemque reciproce secantes in B & G. Dico, si abscindatur GH  $=$  arcui AE, fore punctum H in curva quæsitâ CH; cujus a logarithmica diversitatem, vel solus vertex C, quo hæc altera caret, arguit. Quam constructionem sibi nuper communicatam Illust. HOSPITALIUS hac demonstratione synthetica munivit (m). Ponatur  $CA = a$ ,  $CG = x$ ,  $GH = y = AE$ ,  $GF = z = CB$ , habebiturque ob logarithmicam  $dx = -adz : z$ , & propter circulum  $dy = adz : \sqrt{(aa - zz)}$ . Sed ex hypothese [ob supposita  $ds$  æqualia] debeat differentiale ipsius

(k) Vid. Num. XLVIII. Nota (e) pag. 485.

(l) Integrando enim est  $adx = yds$  [ds ponitur constans] &  $a^2 dx^2 = y^2 ds^2 = yy dy^2 + yy dx^2$ , vel  $(a^2 - y^2) dx^2 = y^2 dy^2$ , aut denique  $dx = y dy : \sqrt{(a^2 - y^2)}$ ; & integrando rursus  $x = a - \sqrt{(aa - yy)}$ , quæ æquatio est ad circulum.

(m) En Analysin. Ponatur  $ds : a = dy : u = dx : t$ , & quoniam est  $ds^2 = dy^2 + dt^2$ , pariter erit  $a^2 = t^2 + u^2$ , adeoque  $tdt + udu = 0$ , &  $tdt =$

$-udu$ . Rursus erit  $dx = tds : a$ , &  $ddx = dtds : a = ds dy : u$ , [cum sit  $ds : a = dy : u$ ] quo substituto in æquatione proposita  $addx = dy^2$ , ea evadet  $adt dy : u = dy^2$ , unde fit  $dy = adt : u = adt : \sqrt{(aa - tt)}$ . Igitur  $y =$  arcui circuli AE cujus sinus BE  $= t$ . Sed est quoque  $dx = t dy : u = \frac{t}{u} \times \frac{adt}{u} = atdt : uu = -adu : uu = -adu : u$ . Igitur  $x =$  logarismo ipsius  $u = \sqrt{(aa - tt)} = CB = FG$ .

ipsius  $ds^2 = [dx^2 + dy^2 = a^2 dz^2 : (aazx - z^4)]$  æquari nihilo: No. LVI. quare  $aazddz - z^3ddz - a^2dz^2 + z^2xdz^2 = 0$ , sive  $zxdz^2 = aadz^2 - zxdz^2 - aazddz + z^3ddz$ , hoc est, facta multiplicatione per  $aa$ , & divisione tum per  $zz$ , tum per  $aa - zz$ ,  $aadz^2 : (aa - zz) = (aadz^2 - aazddz) : zz$ , hoc est  $dy^2 = addx$ . Q. E. D. Subjungi potest & hoc leviusculum, Curvam, in qua ipsa  $ddx$  proportionalia reperiuntur ipsis  $dy$ , vel  $dy^2$ , vel  $dy^3$ , &c. perpetuo fore Parabolam; sicubi loco  $ds$  ipsa  $dy$  æqualia supponantur. Et generaliter, positis  $dy$  æqualibus, si æquentur quoque ipsa  $dx$ , quæsitæ linea erit Recta: si ipsa  $ddx$ , Parabola communis: si  $d^3x$ , Parabola Cubica: si  $d^4x$ , Biquadratica, &c. (n)

Atque hæc possunt esse specimina qualiumcunque profectuum, quos a paucis retro annis in Geometria interiore fecimus; si addantur iis nuperæ meæ Florentini Ænigmatis, & Problematis de minimo Crepusculo solutiones \*, quarum prior [quanquam supprimenda, si de *Leibnitiana* † constitisset] quædam me iudice haud contemnenda continet, dum §. 4 modum generalem suppeditat, cuicunque Figuræ planæ, seu rectilinéæ, seu curvilineæ, quadrabili, vel non quadrabili, geometricæ, vel mechanicæ, seu libera denique manu formatæ, æqualem ex superficie sphærica portionem abscindendi; quo ipso utique multo plus me præstitisse autumo, quam Auctor Florentinus postulaverat. Sciendum

(n) Si positis  $dy$  æqualibus, æquentur quoque  $dx$ , ista illis erunt proportionalia; pone igitur  $adx = dy$ , & integrando, habebis  $ax = y$ , æquationem ad rectam.

Si ipsa  $ddx$  sint constantia, pone  $addx = dy^2$ , & integrando bis, fiet  $ax = \iint addx = \iint dy^2 = \int dy \int dy = \int dy \int \frac{1}{2} yy = \frac{1}{2} yy^2$ , æquatio ad Parabolam.

Si sit  $a^2 d^3x = dy^3$ , integrando ter, habebis  $a^2 x = \iiint a^2 d^3x = \iiint dy^3 = \int dy \int \int dy^3 = \int dy \int \frac{1}{2} yydy = \frac{1}{2} y^3$ , æquatio-

nem ad Parabolam cubicam.

Pariter  $a^3 d^4x = dy^4$ , integrando quater, dat  $a^3 x = a^3 \int^4 d^4x = \int^4 dy^4 = \int dy \int dy \int dy \int dy = \int dy \int dy \int \frac{1}{2} yydy = \int \frac{1}{2} y^3 dy = \frac{1}{8} y^4$ , æquationem ad Parabolam biquadraticam; &c.

\* N<sup>o</sup>. LII. pag. 512, & LIII. pag. 515.

† Quæ extat in *Actis Erud. Lips.* 1692. Jun. pag. 275.

Jac. Bernoulli Opera.

D d d d

No. LVI. dum autem, ambo quoque Problemata a *Fratre* meo Parisiis soluta esse, posteriorisque de Crepusculo solutionem, inscio me, *Diario Gallico* insertam, cui cum mea apprime convenit, hoc non obstante, quod ille soliditatem sphaerae introspiciendo, ego superficie tenus duntaxat eam contemplando, diversissima uterque via in hac investigatione usi fuerimus. Habemus vero & alia his plura & majora, quae etiamnum premimus: at illa quatacunque sint, num metas has transilient, quas Summus Geometra [tam eximia & invidenda in hoc studiorum genere, tum in *Actis* passim, tum in privatis ad me litteris porro pollicitus] attingit, nostrum judicare non est. Id certe de se cogitare, ut hominis vanissimi; sic palam profiteri insanientis prorsus foret. Suspicimus Virum nunquam satis laudatum, ut decet; & ab ejus lumine lumen nobis accensum grati agnoscimus: ac quanquam fieri forte possit, ut in nonnulla inciderimus, ad quae ipsi, aliorum negotiorum mole obruto, attendere vel penetrare non licuit, haec tamen & ipsa ei accepta ferenda putamus; quandoquidem huic, qui glaciem fregit aliis, gratia debetur, non ob ea tantum, quae invenit ipsemet, sed & quae alii jactis ab ipso fundamentis inaedificaverunt. Ceterum existimavi semper & existimo etiamnum, promotionem scientiarum non unius aetatis, nedum hominis, opus existere, sed aliquot plurium in diversis seculis viventium, studiaque sua in communem scopum dirigentium; quorumque posteriores priorum vestigia legendo, & pergendo ubi illi desiere, pristinis inventis nova & majora superaddant: & quemadmodum, nobis maturiorem scientiarum aetatem adeptis, nunc ludus jocusque videntur, quaecunque Veteres, utut ingenio nobis neutiquam inferiores, [at nostris subsidiis, in illa Geometriae infantia, destituti] tam operose invenerunt ac demonstrarunt; ita persuasum omnino habeo, venturos post nos, qui, licet ingenio nostris Heroibus non praevaleant, ex eorum tamen inventis ansam captare poterunt pomaria vastissimae scientiae proferendi, ultra quam fortasse, ne cogitando quidem, nunc assequi valeamus. Interim tanta quisque laude dignus censebitur, quantum ad illa latius extendenda de suo contulerit; neque postremi

stremi pluris æstimabuntur, quod longius progressi sint, & plura No.LVI.  
detexerint, quam omnium primi, qui illis ad hoc perveniendum  
viam straverunt.



N°. LVII.

*P R O B L E M A*

Ab Eruditis solvendum,

*Propositum*

A *Johanne* B E R N O U L L I.

**Q**Uæritur qualis sit Curva  $AC$ , quæ hanc habet proprietatem, ut, *AA. Erud.*  
ducta ubicunque tangente  $CD$  terminata ab axe  $AE$ , portio ejus *Lips. 1693.*  
abscissa  $AD$  sit ad tangentem  $CD$  in ratione  $M$  ad  $N$ . *Mal. p. 235.*

Problema hoc solutu dignum est, & facile Mathematicorum applica-  
tionem meretur. In quacunque enim ratione sit  $M$  ad  $N$ , curva  $ABC$   
semper eadem facilitate motu quodam continuo describi potest; non ob-  
stante, quod curva, pro ratione  $M$  ad  $N$ , magis vel minus composita  
evadat: in casu quippe rationis æqualitatis illico patet, curvam  $ABC$   
esse circulum; in reliquis, si  $M$  ad  $N$  est ut numerus ad numerum,  
erit quidem curva geometrica, secus autem transcendentalis est. Quæri-  
tur generalis determinatio puncti in curva.

D d d d 2

JACO:



No. LVII.

# JACOBI BERNOULLI

## SOLUTIO

### PROBLEMATIS FRATERNI

*Ante octiduum Lipsiam transmissi.*

*Acta Erud.  
Lips. 1693.  
Jun. p. 255.*

**E**Legans est hoc Problema, in quod incidimus occasione *Hugenianorum* quorundam, quæ nuperrime in *Actis Roterodamensibus* comparuere \*. Ei se primo applicuit *Frater*, cumque paulo post significaret se voti sui factum compotem, operæque pretium esse ut solvatur, cumque in finem etiam Problema publice proponendum, testâ solutione, *Lipsiam* mitteret, Auctor mihi extitit, ut & ipse tentarem, & quam reperi solutionem sequentem [ omissa tamen demonstratione, ne aliis idem invenienti voluptatem adimerem ] cum Publico communicarem; nescius etiamnum, an & quousque cum Fraterna conspiret.

In data positione recta *AB* [ *Fig. 1. & 2* ] assignatum est punctum *A*, & quæritur Curva *AC*, in qua, sumpto ubivis puncto *C*, ductaque per illud recta tangente *CD*, abscissa *AD* sit ad tangentem *DC* in constante ratione  $n$  ad 1.

**SOLUTIO**, Abscissa quavis *AD*, centro *D*, radio *DC* [ qui sit ad abscissam *AD*, ut 1 ad  $n$  ] describatur arcus circuli; fiatque ut aggregatum unitatis & dicti radii ad potestatem  $\pm 2n$  elevati, ad eorundem differentiam; sic ipse radius, ad rectam *DB* auferendam ex positione data *AB*. Dico, si super *B* erigatur recta

\* *Histoire des Ouvrages des Sçavans. Fevr. 1693.*



ſta BC perpendicularis ipſi AB, ſecanſque arcum circuli in C, No. LVII fore punctum C in curva optata AC (\*).

Eximium autem uſum habet hoc Problema. Primo enim hinc conſtat, infinitas eſſe diverſiſſimorum generum Curvas, communi hac proprietate gaudentes, ut recta AD, DC, conſtanti rationem habeant; omnes vero illas eſſe geometricas, [quanquam aliæ aliis magis minusve ſint compositæ,] in quibus hæ lineæ ſe habent, ut numerus ad numerum. Deinde omnes hæ Curvæ deſcribuntur motu continuo fili GDC in alterutra extremitate C pondus annexum habentis hoc pacto: In Triangulo AFE [Fig. 2] rectangulo ad A, cujus crus AE æquale ſit longitudini fili GDC, applicetur norma BDH, ea ratione ut dum crus DB ſuper AB verſus A volvitur, alterum HD fili portionem GD ante ſe pellendo, lateri Trianguli AE perpetuo parallelam manere, ejuſque extremitatem G, ſuper hypothenuſa FE incedere cogat: ſic fiet, ut pondus extremitati C annexum & attractum curvam deſcribat AC ita comparatam, ut AD ſit ad portionem fili DC, Tangentem ſcilicet Curvæ, in ratione data crurum Trianguli AF & AE (b). Unde patet, ſi conſtructiones ejuſmodi cenſendæ ſunt geometricæ & accuratæ, æquationes infinitas altiſſimorum graduum, pari cum ſimpliciſſimis omnemque pene fidem excedente facilitate, conſtrui poſſe. Denique nec hoc tacendum,

D d d d 3

quod

(\*) Conſtructionis huius analyſim, qualem ipſe inſtituit Auctor, vide No. CIII. Art. 19.

(b) Filum DC, quod ponduſculum C trahit, tangit perpetuo curvam AC huius ponderis motu deſcriptam. Sed eſt filum CDG æquale rectæ AE, vel DGH. Igitur DC = GH. Eſt autem GH [ſive tangens DC] ad EH [vel abſciſſam AD], ut AE ad AF, ob ſimilia Triang. EHG, EAF. Verum ad-

noto non facile eſſe huiusmodi motu deſcribere alteram partem ICK curvæ, ubi reſecta Ad abſciſſam Ab longitudine ſuperat. Ibi enim, non ſumma rectarum *cdg*, ſed earumdem differentia, datæ rectæ AE æqualis eſſe deberet. Neque tamen hæc ita accipi velim, quaſi impoſſibile eſſet comminſci rationem aliquam motus continui, quo & pars curvæ ICK deſcribi queat.

No. LVII. quod solutio hujus Problematis abstrusæ Methodi Tangentium inversæ plurimum perficiendæ & promovendæ magnum lumen præbere possit.



Nº. LVIII.

# CURVATURA LAMINÆ ELASTICÆ.

*Ejus Identitas cum Curvatura Lintei a pondere  
inclusi fluidi expansi.*

*Radii Circulorum Osculantium in terminis  
simplicissimis exhibiti ;*

*Una cum novis quibusdam Theorematis  
huc pertinentibus, &c.*

*Acta Erud.  
Lipf. 1694.  
Jun. p. 161.*

**P**ost triennale silentium promissi tandem fidem libero ; sed ita, ut moram, quam Lector alias inique ferre posset, nonnullo scenore compensem, dum Elaterum curvaturam non in una sola, [ ut initio fueram pollicitus ] sed generaliter in quacunque extensionum hypothese constructam exhibeo ; quod primus, ni fallor, exequor, postquam a multis inutiliter tentatum Problema fuisset. Extitit enim jam inde a GALILÆI quoque temporibus celebre, qui curvam hanc, perinde ut Funiculariam, Parabolam esse suspicatus erat. Eandem denique sententiam tuitus est Pater *Gasto* PARDIES Gallus, in exiguo tractatu de *staticis*.

*staticis* †, ubi tamen in rem præsentem nil nisi paralogiſmos me. N. LVIII. ros cenſuit. Et nuper adeo ejuſdem Societatis Vir *Franciſcus Terſius de Lanis*, in prolixo ſuo opere *Magiſterii natura & artis*, Tom. 2 lib. 7. [ubi multa huc facientia & lectu digna habet] idem evincere conatur, ſed ratiocinio plane præpoſtero: ut vel hinc non ſine voluptate percipere liceat, quantopere Prædeceſſores noſtri, interioris Geometriæ cognitione deſtituti, ſe torſerint, pro inveſtiganda re, quam in illa caligine abſque ejus adminiculo ſcire non poterant. Dixeram in *Actis Eruditorum* 1691, pagina 289. \* Problema hocce plus difficultatis habere *Funiculario*, nec ſine ratione. Ut enim alia taceam, notandum, duas præſto eſſe claves in *Catenarii* inveſtigatione, quæ ad duas differentes æquationes viam ſternunt, quarum una naturam curvæ per relationem ipſiuſmet ad coordinatas ejus, altera per relationem fili evolventis ad eaſdem exprimit; cum ad curvæ Elastiæ naturam indagandam poſteriore tantum clave aditus pateat. Hinc enim manifeſto ſequitur, fieri bene poſſe, ut quiſpiam prioris Problematis difficultates ſuperet, nec tamen protinus alterius quoque victor evadat; deſtitutus nimirum clavium altera, quæ dictam relationem fili evolventis ſeu radii circuli oſculatoris [non quomodocunque, ut factum in *Actis Lipſienſibus Menſis Januarii* 1691 \*\* pag. 22,] ſed in terminis ſimpliciſſimis & pure differentialibus exhibeat. Hæc nobis jam eo tempore, quo ſpeculationi funis vacabamus, innotuerat, eamque mox nonnullis inter peregrinandum communicavit *Frater*; præterea dum immenſa inventi utilitas in reſolvenda *Velaria*, & hac, quam præ manibus habemus, *Elaterum Curvatura*, aliſque ſublimioribus, quotidie magis magisque ſeſe mihi explicuit, effecitque tandem, ut non poſſim publico aureum Theorema diutius invidere; præſertim cum hoc unum adhuc Geometris deſuiſſe videatur, quominus æque feliciter in recensitis Problematis, atque in altero illo, verſati fuerint.

Prinſ-

† *Des forces mouvantes*. Art. CIII.

\* Supra N°. XLII. pag. 451 & 452.

\*\* N°. XLI. pag. 440. 441.

N.LVIII. Priusquam itaque ad institutum pergam, sunto in *Fig. 1.* portiunculae Curvæ infinite parvæ  $ab$ ,  $bc$ , quibus perpendiculariter insistant radii circuli osculatoris  $af$ ,  $bf$ , concurrentes in puncto  $f$ , facientesque angulum  $afb$  æqualem angulo  $gbc$ , quem producta portio  $ab$  cum altera  $bc$  efficit; tum abscindatur  $bh = bc$ , ducæque intelligantur parallelæ  $al$ ,  $bn$ ,  $co$ , nec non  $bl$ ,  $hm$ ,  $gn$ ; quarum illæ abscissarum, hæ applicatarum elementa [ sive  $dx$ ,  $dy$ ,  $ddx$ , &c. ] indigent. Dico,

$\alpha$ . Quod positis Curvæ elementis  $ab$ ,  $bc$ , hoc est, ipsis  $ds$  æqualibus, radius circuli osculatoris seu longitudo fili evolventis  $af$ , nempe  $z = dx ds : ddy$ ; item  $x = dy ds : ddx$ . Nam hoc:  $bc = ho : hc + hc : bc = [ \text{ob similitudinem Triangul. } bhm, \text{ hoc, item } hcb, abf ]$   $bm : bh + ab : bf = al : ab + ab : bf = al : bf = dx : z$ . Sed  $ho = hm - nc = bl - nc = ddy$ , &  $bc = ds$ . Quare  $ddy : ds = dx : z$ . Eodem modo ostendetur  $ddx : ds = dy : z$ . Q. E. D.

COROLLARIUM. In omni Curva, positis ejus elementis æqualibus, differentię secundæ coordinatarum primis reciproce proportionantur. Cum enim  $dx ds : ddy = z = dy ds : ddx$  erit  $dx ddx = dy ddy$ , adeoque  $ddx : ddy = dy : dx$ ; quod ipsum quoque ex sola similitudine Triangulorum  $bhm$ , hoc, liquet; ubi  $co$ , seu  $ddx$ , est ad  $oh$ , seu  $ddy$ , ut  $hm$  ad  $bm$ , vel  $bl$  ad  $al$ , seu  $dy$  ad  $dx$ .

$\beta$ . Positis vero abscissæ elementis  $al$ ,  $bn$ , hoc est, ipsis  $dx$  æqualibus, erit radius osculantis circuli  $af$  seu  $z = ds^3 : dx ddy$ . Quoniam  $gc : bc = gc : hc + hc : bc = [ \text{ob similitudinem Triangul. } bng, chg, \text{ nec non } hcb, abf ]$   $bg : bn + ab : bf = ab : al + ab : bf = ds : dx + ds : z = ds^3 : z dx$ : atque  $gc = gn - nc = bl - nc = ddy$ , &  $bc = ds$ , erit  $ddy : ds = ds^2 : z dx$ . Q. E. D.

Haud absimiliter ostendetur, quod positis  $dy$  æqualibus, futurum est  $z = ds^3 : dy ddx$ .

His addo nova, de quibus nec *Fratri* adhuc constat, Theoremata pro curvis, quarum applicatæ non sunt parallelæ, sed in com-

eommuni puncto coeunt: posito namque radio circuli super po. N.L.VIII.  
 lo seu umbiculo hoc descripti  $a$ ; abscissa peripheriæ ejus,  $x$ ; &  
 intercepta inter polum & datam curvam,  $y$ : erit radius oscu-  
 lantis circuli  $z = a dy ds : (2 dx dy + y ddx)$  vel  $ay dx ds : (y dx^2 -$   
 $a addy)$  si elementa Curvæ  $ds$ ; &  $z = ads^3 : (dx ds^2 + dx dy^2 -$   
 $y dx ddy)$  si ipsa  $dx$ : & denique  $z = ads^3 : (dx ds^2 + dx dy^2 + y dy ddx)$   
 si ipsa  $dy$  æqualia intelliguntur. Est vero in ejusmodi Curvis  
 $ds = \sqrt{(yy dx^2 + aady^2)} : a$  (\*). Hac via duce cognovi, ra-  
 dium

(\*) Sit [Fig. A]  $Ad = a$ ,  $de =$   
 $dx$ ,  $em = dx + ddx$ ,  $Aa = y$ ,  $lb =$   
 $dy$ ,  $nc = dy + ddy$ ,  $al = ydx : a$   
 $bn = (ydx + dydx + yddx) : a$ ,  
 $ab = ds = \sqrt{(aady^2 + yydx^2)} : a$ ,  
 $bc = ds + dds$ ,  $af = z$ . Producatur  
 a b in h, & centro b, describatur  
 per c, arcus c h; fiatque angulus  
 $nb g = lab$ , &, addito utrinque re-  
 cto, erit  $gb A = ba A$ , adeoque  
 $hb g = [hb A - gb A = aAb +$   
 $ba A - gb A =] aAb$ , unde fit  $Ad$   
 $[a] : de [dx] = bh [ds + dds] : ho$   
 $[(dx ds + dx dds) : a]$ . Præterea si-  
 militudo Triangul. a l b, b n g, dat  
 $al [ydx : a] : bn [(ydx + dydx +$   
 $yddx) : a] = bl [dy] : ng$   
 $[(ydydx + dy^2 dx + ydyddx) : ydx]$ ,  
 unde demto n c [dy + ddy] relin-  
 quitur  $gc = (dy^2 dx + ydyddx -$   
 $ydx ddy) : ydx$ . Rursus ex simi-  
 litudine Triang. g o c, & g b n vel b a l,  
 sequitur,  $ba [ds] : al [ydx : a] = gc$   
 $[(dy^2 dx + ydyddx - ydx ddy) : ydx] :$   
 $co [(dy^2 dx + ydyddx - ydx ddy) :$   
 $ads]$ . Ergo  $ch = co + ho = (dx ds^2$   
 $+ dx dy^2 + ydyddx - ydx ddy$   
 $+ dx ds dds) : ads$ ; ac denique sec-  
 tores similes c b h, a f b, dant  $ch :$   
 $cb [ds + dds] = ab [ds] : af$ , unde  
*Jac. Bernonlli Opera.*

fit [af]  $z = (ads^3 + ads^2 dds) : (dx ds^2$   
 $+ dx dy^2 + ydyddx - ydx ddy$   
 $+ dx ds dds)$ , vel  $ads^3 : (dx ds^2 + dx dy^2$   
 $+ ydyddx - ydx ddy)$ , cum in nu-  
 meratore  $ads^2 dds$ , in denominatore  
 $dx ds dds$  præ reliquis terminis evanes-  
 cant. In hac expressione radii oscu-  
 li, nulla quantitas constans supponi-  
 tur. Quare si ponantur ipsa  $dy$  æ-  
 qualia, hoc est  $ddy = 0$ , fiet  $z = ads^3 :$   
 $(dx ds^2 + dx dy^2 + ydyddx)$  quod ul-  
 timum est Auctoris nostri Theorema:  
 penultimum vero, seu  $z = ads^3 :$   
 $(dx ds^2 + dx dy^2 - ydx ddy)$  habetur,  
 ponendo  $ddx = 0$ , seu ipsa  $dx$  æ-  
 qualia. Quod si  $ds [\sqrt{(aady^2 +$   
 $yydx^2)} : a]$  statuatur constans,  
 erit  $aadyddy + ydydx^2 + yydx ddx$   
 $= 0$ , adeoque  $ddy = -ydx : aa$   
 $-yydx ddx : aady$ , &  $ddx = -dydx :$   
 $y - aadyddy : yydx$ . Substitue hunc  
 valorem in formula  $z = ads^3 : (dx ds^2$   
 $+ dx dy^2 - ydx ddy + ydyddx)$ , &  
 fiet  $z = ads^3 : (dx ds^2 + dx dy^2 - ydx ddy$   
 $- dx dy^2 - aady^2 ddy : ydx) = ads^3 :$   
 $(dx ds^2 - (yydx^2 + aady^2) ddy : ydx) =$   
 $aydx ds^3 : (ydx^2 ds^2 - aads ddy) =$   
 $aydx ds : (ydx^2 - aaddy)$ ; quod est  
 Theorema secundum. Hic pro  $ddy$   
 substitue valorem ejus  $-ydx^2 :$   
 Eccc

N. LVIII. dium circuli spiralem *Archimedeam* osculantis ubique quartam esse proportionalem, ad peripheriam circuli primæ revolutionis, radium ejus, & quantitatem  $(xx+aa)\sqrt{(xx+aa)}:(xx+1aa)$ . (1)

Sed missis & præmissis istis, redeo in orbitam propositi nostri Problematis, construendo Curvam Elasticam, ut sequitur:

## I. Generaliter.

Esto spatium rectilineum, sive curvilineum quodvis  $ABC$  [Fig. 2.] cujus abscissæ  $AE$  vires tendentes, ordinatæ  $EF$  tensiones repræsentent, eique ponatur æquale quadratum  $AD$ , intra quod descriptus sit super  $A$  circuli quadrans  $GKL$ . Statuatur etiam indefinitæ portioni spatii  $AEF$  æquale rectangulum  $AH$ , ducta recta  $HI$  secante quadrantem circuli in  $K$ , & junctæ  $AK$  fiat parallela  $GM$ , ipsique  $AM$  in ordinata  $EF$  [si opus sit] producta capiatur æqualis  $EN$ . Erit punctum  $N$  ad curvam quandam  $AN$  talem, ut si spatio  $AEN$  pergas statuere æquale rectangulum  $AO$ , rectasque  $OP$ ,  $FE$  producas ad communem occursum in  $Q$ , existat punctum  $Q$  in curva optata  $AQR$ . Nimirum, si asserculus quidam oblongior, tigillum, virga, pertica, aut lamina quæcunque flexilis, elastica, & gravitatis expers  $AQRSyVA$ , uniformis ubique latitudinis & crassitici  $RS$ ,  $AV$ , longitudinis vero  $RQA$ , firmetur una extremitate in  $RS$  ad perpendiculum, alterique  $AV$  potentia applicetur, seu pondus appendatur  $Z$ , quantum sufficit ad laminam incurvandam, donec ipsa ejusve tangens in  $A$ , puta  $AB$ , directioni ponderis

$aa - yydxddx : aady$ , & erit  $z = \frac{aydxds}{(ydx^2 + ydx^2 + yydxddx : dy)} = \frac{adyds}{(2dx dy + yddx)}$ ; quod est Theorema primum.

(1) Est in Spirali *Archimedeæ*  $y = ax : c$  [ $c$  peripheriam denotat, cujus radius  $a$ ], atque  $dy = adx : c$ ,

&  $ddy = ad dx : c$ . Evanescente igitur  $ddx$ , nullefcit  $ddy$ . Quare radius osculi  $z = \frac{ads^2}{(dxds^2 + dxdy^2)}$ . Est autem  $ds = \sqrt{(aady^2 + yydx^2)}$ :  $a = dx \sqrt{(aa + xx)} : c$ . Ergo  $z = \frac{a}{c} \times \frac{(aa + xx) \sqrt{(aa + xx)}}{2aa + xx}$ .



deris AZ normalis fiat, acquireret concava laminæ superficies N. LVIII. RQA curvaturam quam construximus; cui convexa SyV parallela est, & evolutione curvæ ejusdem mn condescribitur. (\*) Quantum autem ad hoc præstandum requiratur ponderis, sic cognosces: Ponatur vectis SRZ, cujus fulcrum R, brachium longius RZ = BA, brevius æquale crassitiei laminæ RS, cui affixa sit portio quæpiam datæ laminæ SY, firmata in XY; quo facto, si longiori vectis extremitati adjiciatur pondus Z, quod extendere possit dictam portionem per Triangulum RST, fibram scilicet XS per ST, xs per st, reliquasque proportionaliter, ita quidem ut ST sit ad BC, sicut SY rectangulum sub longitudine & crassitie portionis laminæ ad spatium ABC; erit idipsum quoque pondus quæsitum. (d)

E c c c 2

Scholia

(\*) Sit Qy laminæ crassities = c; Qq, elementum curvæ = ds, AP = y, PQ = x, EF = t, tensio quam vis tendens AE, hoc est pondus Z agens per vectem AE, vel QP inducere valet fibræ elasticæ, cujus longitudo data = b, resistenti per vectem SR vel Qy. Igitur tensio yΩ, quam inducit fibræ ωy, cujus longitudo ds, erit tds : b. Et similia Triangula ΩyQ, Qqn, dant Ωy [ tds : b ] : yQ [ c ] = Qq [ ds ] : Qn [ z seu, ut ostensum est, dxds : ddy ]. Æquando igitur media extremis tdxds² : bddy = cds, vel cbddy, aut aaddy [ponendo aa = cb] = tdxds ac integrando aady = dsfdx = Sds [faciendo S = sfdx = AEF]. Ergo a⁴dy² = SSdy² + SSdx², unde est dy = Sdx : √(a⁴ - SS), ubi aa = spatio ABC. Nam ubi EQ tangit curvam AQR, abique in BR, ibi dx respectu dy evanescit. Ergo √(a⁴ - SS) evanescit, & est a⁴ = SS, vel a² = S = ABC.

Atque hinc sequitur Auctoris constructio. Est enim AG = a, AD = a² = ABC, AH = AEF = S, & AI = AH : AG = S : a, atque IK = √(AK² - AI²) = √(aa - SS : aa) = √(a⁴ - SS) : a. Similia autem Tr. AIK, MAG, dant IK [ √(a⁴ - SS) : a ] : AI [ S : a ] = AG [ a ] : AM [ Sa : √(a⁴ - SS) ] = EN. Igitur AEN = Sadx : √(a⁴ - SS) = AO = ay. Itaque y = Sdx : √(a⁴ - SS); & dy = Sdx : √(a⁴ - SS).

Hanc fuisse Auctoris Analysin ex N°. LXVI liquet. In qua tamen nonnulla corrigenda videntur, præsertim, quod ad unius duntaxat fibræ ωy tensionem attenderit, cum tamen omnes fibræ quæ crassitiem Qy constituunt, extendantur, imo potius comprimantur interiores, dum exteriores extenduntur. De quibus videbis Nosup. LXVI & CII.

(\*) Pondus Z agens per vectem AE, laminæ, cujus longitudo = b inducit



**MLVIII.** *Scholia & Corollaria.* 1. Si lamina inflexa  $RQA$  loco puncti  $R$  firmetur alicubi in  $Q$ , resecta portione  $RQ$ , servabit reliqua ab eadem potentia inflexa eandem curvaturam  $AQ$ .

2. Quin & si curva  $RQA$ , rotata circa  $RZ$ , genuerit a parte opposita aliam  $Rq$  similem & eandem secum, sed inverse positam, & lamina cogitatione producta ac loco puncti  $R$  in  $q$  firmata fuerit, retinebit aucta & eadem potentia compressa eandem curvaturam  $AQRq$ .

3. Porro si segmentum quodvis curvæ  $AQ$  rotatum circa rectam  $Qn$  ipsi normalem in  $Q$ , producat in parte opposita simile & æquale segmentum  $Qa$ , formabunt ambo segmenta  $AQa$  *Arcum* proprie dictum, qui posito 'retinaculo' in  $Q$  tenditur a duabus potentiis, extremitati utrique ad rectos applicatis, & singulis ipsi  $Z$  æqualibus. Idem intellige de Arcubus formatis rotatione Curvæ integræ  $AQR$ , vel auctæ portione  $Rq$ , circa rectam eidem in  $R$ , vel  $q$  normalem; unde triplex habetur Arcus: *Diminutus*, *Plenus*, *Auctus*. *Diminutus*, quem formant duo segmenta minora Curva  $AQR$ : *Plenus*, quem æqualia: *Auctus* quem majora; & hoc discrimine cognoscuntur, quod rectæ tangentes utramque extremitatem Arcus diminuti ad partes ejus convexas, aucti ad concavas, pleni ad neutras inclinant, sed sibi mutuo parallelæ sunt.

4. Eadem quoque curvatura  $AQa$  gaudere consentaneum est *Affulas* illas, ex quibus Dolia conficiuntur: uude sequitur, neminem doliorum capacitatem, quæ vulgo pro Sphæroidibus ellipticis habentur, rite mensurasse; cum nulla ratione asseratur, asseres hosce curvari in ellipses.

5. Si directio ponderis, vel cujusvis potentia inflectentis, ad lami-

ducit tensionem  $EF$ , agendo vero per vestem  $AB = RZ$ , eidem inducit tensionem  $BC$ . Ergo laminæ  $SY$ , cujus longitudo  $SX$ , agens per eundem vestem, inducit tensionem  $ST = BC \times SX : b$ , [ sunt enim,

cæteris paribus, tensiones ut laminarum longitudines ]. Atqui  $b = aa : c = ABC : QY = ABC : SR$ . Ergo  $ST = BC \times SX \times SR : ABC$ , hoc est,  $ST : BC = SX \times SR [SY] : ABC$ .

laminam, ejusve tangentem in puncto appensionis sit obliqua; N. LVIII, nascetur Curva paululum diversa ab AQR, quam tamen eadem facilitate determinare possum. Sed nolo nimium evagari. (e)

6. Rectangulum sub radio circuli osculantis laminam  $Qn$ , & respondente applicata  $EF$ , æquatur constanti spatio  $ABC = AD$  (f). Hinc dicti radii respectivis applicatis reciproce proportionantur; & cum iidem quoque linearum curvedines reciproce mensurent, erunt curvedines inflexæ laminæ AQR respectivis  $EF$  directe proportionales: quapropter in A puncto applicatæ potentiæ curvædo nulla est [quod alias in puncto flexus contrarii fieri consuevit;] hinc eo major, quo remotior unaquæque portio laminæ a linea directionis potentiæ: maxima est in R, unde iterum versus q decrescit, &c. saltem si, cum viribus tendentibus AE, simul quoque crescant tensiones EF; quo quidem nihil universalius verum existit.

7. Idcirco, data lege tensionum invenire curvam Elasticam, in abstracta geometria aliud nihil est, quam data curva AFC reperire aliam AQR, in qua radii circulorum osculantium reciproce proportionentur respectivis applicatis alterius. Facillima autem est conversâ hujus: Data curva Elastica, una cum radiis circulorum eam osculantium, invenire legem tensionum, quam Natura in ejus productione observat: utpote ad quem effectum tantum requiritur, ut tertia proportionalis ad radium  $Qn$  & constantem quandam AG, axi AB respective applicetur, ad habendam statim EF. (g)

Confectantur hinc Theoremata quædam universalia prorsus nova. Nam

8. In omni Curva AQR, summa tertiarum proportionalium ad radios circulorum osculantium & constantem quandam rectam  

$$E e e e \quad AG,$$

(e) Vide Num. LXVI. Art. II.

(f) Nam, quia  $EF \times Qn = AD$

(g)  $EF \times Qn = t \times dx ds : ddy = AG^2$ , est  $Qn : AG = AG : EF$   
 $= aa = ABC = AD$ . Vid. Not. c.

N.LVIII. AG, applicatarum ad axem Curvæ AB, efficit spatium quodpiam ABC = rectangulo sub una applicatarum EF & respectivo circuli osculantis radio Qn = quadrato AG (<sup>h</sup>). Quod ipsum quoque per initio demonstratum Theorema evincitur: Sic enim AE = x, EQ = y, AQ = s, AG = a; erit per memoratum Theorema, Qn = dx ds : ddy, tertia proportionalis ad hanc & AG, nempe EF = a addy : dx ds, quæ ducta in dx gignit differentiale spatii ABC, a addy : ds, cujus proin integrale aady : ds, efficit indefinite spatium AEF; est vero pro spatium toto ABC, aady : ds = [ ob dy = ds in extremitate R ] aa = EF × Qn.

9. Sed & spatium quodvis intermedium F E e f, duabus applicatis EF, ef, interceptum, æquale rectangulo sub AG, ceu sinu toto, & differentia sinuum duorum angulorum, quos tangentes rectæ Qp, rd, in punctis Curvæ Q & r, ad axem AB constituunt (<sup>i</sup>).

10. Iisdem positis quæ prius, Tangens Qp est ad subtangentem pP, ut spatium ABC ad spatium AEF: cum enim spatium AEF repertum sit aady : ds, erit ds ad dy, hoc est, Qp ad pP, sicut aa, hoc est, ABC ad AEF.

11. Quin etiam Qp, pP, PQ, proportionales sunt ipsis AK, AI, IK, vel MG, MA, AG; similiaque sunt Triangula QpP, KAI & GMA (<sup>k</sup>).

12. Quod si dictæ tertiæ proportionales ad radios circulorum osculantium & constantem AG, applicentur ad axem alterum curvæ AZ, nascetur spatium A γ c ZA = ABCFA = AD. Sed AEF ad APγ ut pP, ad differentiam reliquorum laterum Trianguli QpP (<sup>l</sup>).

13. Si

(<sup>h</sup>)  $\int AG^2. dx : Qn = \int EF. dx = rde$ , est EFte = AEF — Aef = AEF, quod tandem est ABC = aa × differentiam Sinuum, &c. EF × Qn.

(<sup>k</sup>) Qp:Pp:QP = ds:dy:dx = aa:S:  $\sqrt{(a^2 - SS)} = a:(S:a): \sqrt{(aa - SS)}$ : aa = AK: AI: IK = MG: MA: AG.

(<sup>i</sup>) Quoniam AEF = aady : ds = aa × Sinum anguli P Q p; & Aef = aa × Sinum anguli wrd, seu (1)  $\int EF. dy = \int f dy = \int (tdx f dx : \sqrt{}$

13. Si punctum  $h$  sit in caustica Elasticæ ex radiis ipsi  $PQ$ , <sup>N.LVIII.</sup> vel  $AB$ , parallelis, producatque radius circuli osculatoris  $Qn$  in  $b$ , ad occursum ipsi  $AZ$ ; erit  $Qn$  ad  $Qb$  ut spatium  $A EF$  ad circumscriptum rectangulum, ut  $Qh$  ad  $\frac{1}{2} QP$  ( $m$ ).

14. Ut radius  $AG$ , ad arcum circuli  $GK$ : sic laminæ crassities  $RS$  vel  $AV$  ad excessum longitudinis convexæ  $yV$  supra concavam  $QA$ : unde excessus iste arcui  $GK$  proportionalis ( $n$ ).

15. Quoties curva Elasticæ  $AQR$  est ex numero geometricarum, hoc est, algebraicarum [ sic enim illas posthac appellabo in honorem *Viri Celeberrimi*, qui hoc nomine designatas cupit, ] curva quoque Tensionum  $AFC$  est algebraica, & simul spatium  $ABC$  quadrabile: sed non vicissim ( $o$ ).

16. Si curva tensionum  $AFC$  est algebraica & spatium  $ABC$  quadrabile, Elasticæ  $AQR$  nunc est algebraica, nunc mechanica: alge-

$$\begin{aligned} \sqrt{(a^4 - SS)} &= f(SdS) : \sqrt{(a^4 - SS)} \\ &= aa - \sqrt{(a^4 - SS)}. \text{ Ergo, quan-} \\ &\text{do } S = ABC = aa, \text{ tunc } fEF \cdot dy, \\ &\text{quod est } A\gamma cZA, \text{ fit } = aa = AD. \\ &\text{Ubique autem } AEF [S] : AP\gamma \\ &[aa - \sqrt{(a^4 - SS)}] = \frac{S}{a} : a - \\ &\sqrt{(aa - SS : aa)} = AI : AK - IK \\ &= Pp : Qp - Pp. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (*) \quad Qh : \frac{1}{2} QP &= Qf : QP = Qn : \\ Qb &= \frac{dx ds}{ddy} : \frac{x ds}{dy} = \frac{dx}{x} : \frac{ddy}{dy} = \frac{dx}{x} : \\ \frac{t dx ds : aa}{S ds : aa} &= S : tx = AEF \text{ ad re-} \\ &\text{ctang. circumscriptum.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (o) \quad \text{Excessus convexitatis } Vy \text{ supra} \\ \text{concavitatem } AQ &= f\Omega y = fids : b \\ &= fctds : aa = fctdy : S = fctdx : \\ \sqrt{(a^4 - SS)} &= cfdS : a \sqrt{(aa - SS : \\ &aa)} = \frac{c}{a} \text{ per arcum circuli, cujus} \end{aligned}$$

radius  $a$  [  $AG$  ], finus  $S : a$  [  $AI$  ]  
 $= \frac{c}{a}$  per arcum  $GK$ . Ergo, ut ra-  
 dius  $a$  [  $AG$  ] ad arcum  $GK$ , sic  $c$   
 [  $RS$  ] ad excessum convexitatis su-  
 pra concavitatem. Generalis autem  
 est *conscriptarum* proprietas ut ea-  
 rum differentia vel summa æquetur  
 arcui circuli, quam primus demon-  
 stravit *Joh. BERNOULLI*, Frater  
 Auctoris.

(\*) Ubi curva  $AQR$  est algebrai-  
 ca, habetur  $dy : dx$ , algebraice.  
 Ergo algebraice data est ratio  $S :$   
 $\sqrt{(a^4 - SS)}$ , atque  $SS : (a^4 - SS)$ , &  
 $SS : a^4$ , ac  $S : aa$ . Igitur spatium  
 $ABC$  est quadrabile. Datur etiam  
 algebraice, ratio  $ddy : dx ds$ , seu  
 $t : aa$ . Ergo  $t$  datur algebraice, hoc  
 est, curva  $AFC$  algebraica est.

N. LVIII. algebraica, si insuper curvilineum AEN quadrabile; mechanica, si secus. Quod si curva AFC sit quidem algebraica, at non contineat spatium quadrabile, altera AQR non alia est, quam mechanica secundi generis, hoc est, quæ ad sui constructionem supponit quadraturam spatii mechanici primi generis; nisi forte quadraturæ spatiorum AEF & AEN a se mutuo dependeant, quo casu Elastica non nisi primi generis mechanica est.

## II. Specialius.

Si curva tensionum AFC sit paraboloides cujuscunque gradus, hoc est, si tensiones EF sint in quacunque ratione multiplicata, seu submultiplicata virium tendentium AE [pro cujus rationis indice pono  $m$ ] constructio curvæ Elasticæ sic contrahetur: Facto super A quadrante circuli ABi, capiatur in ejus radio Ag, quæ sit ad AB & AE eo ordine proportionalis, quem indicat numerus  $m+2$ , indeque excitata perpendiculari gl, junctaque lA, eique facta parallela iu, applicetur in E recta EN = Au: sic nascitur curvilineum AEN, cui si fiat æquale rectangulum AO [postquam AG æqualis sumpta fuerit ipsi AB] productis OP, FE, habebitur in optata curva punctum Q. Quod pondus Z spectat, cujus ope laminæ elasticæ hæc curvatura inducitur, tantum in A appendendum est, quantum possit in distantia RZ vel AB extendere frustum laminæ SY per Triangulum RST, quousque scilicet Rectangulum sub RZ & ST ad Rectangulum SY fiat, sicut  $m+1$  ad unitatem. (\*)

*Scholia*

(\*) Sit  $AB = X$ ,  $BC = T$ , & curva tensionum AFC ejus naturæ, ut sit ubique  $= X^m : x^m = T:t$ , aut  $t = Tx^m : X^m$ . Igitur  $S = \int t dx = Tx^{m+1} : (m+1) X^m = tx : (m+1)$ . Æquatio igitur curvæ AQR, quæ generaliter erat  $dy = Sdx : \sqrt{(a^4 - SS)}$ , in hoc casu speciali erit  $dy = t x dx : (m+1) \sqrt{(a^4 - txx : (m+1)^2)} = t x dx : \sqrt{((m+1)^2 a^4 - txx)} = [ \text{quia } aa = ABC = TX : (m+1) ] = t x dx : \sqrt{(TXX - txx)}$ .

Hinc

*Scholia & Corollaria.* 1. Tangens Qp est ad subtangentem pP, N.LVIII. sicut recta AB ad nuper acceptam Ag. (q)

2. Recta Qb Curvæ perpendicularis, quarta est proportionalis ad tres Ag, AE & AB. (r)

3. Radius osculantis circuli Qn ad totam perpendicularem Qb [ & proinde quoque Rm ad RZ ] est sicut 1 ad  $m+1$ .

4. Et radius reflexus Qh ad incidentem PQ, ut 1 ad  $2m+2$ . (f)

5. Si sit curva interminata Rβ, talis, ut applicata ei recta βQP ubique sit tertia proportionalis ad AE & AB, erit curvilineum AZRβaA ad quadrantem ABi, ut & pars APβaA ad sectorem Ali; sicut 2 ad  $m+1$ . (t)

6. Ra-

Hinc constructio: Nam cum sit  $AB^{m+1} : AE^{m+1} = AB : Ag$ , erit  $Ag = AE^{m+1} : AB^m = x^{m+1}$ :

$X^m = tx : T$ , &  $gl = \sqrt{(AB^2 - Ag^2)} = \sqrt{(XX - ttxx : TT)} = \sqrt{(TTXX - ttxx) : T}$ . Similia autem Triangula Agl, Aiu dant  $gl : Ag = AB : Au$ . Ergo Au [EN] =  $Xtx : \sqrt{(TTXX - ttxx)}$ . Ergo  $AEN = \int Xtxdx : \sqrt{(TTXX - ttxx)} = AO = AB \times AP = Xy$ . Igitur  $y = \int (txdx : \sqrt{(TTXX - ttxx)})$  &  $dy = txdx : \sqrt{(TTXX - ttxx)}$ .

Pondus autem Z generaliter tale esse debet, ut agens per vectem RZ, laminæ SY tensionem inducat ST, quæ sit ad BC, ut SY ad ABC = AB. BC : (m+1), vel, æquando media extremis, & dividendo per BC, ut sit  $ST \times AB [ST \times RZ] = (m+1) SY$ .

(q) Qp : Pp = ds : dy = [ quia Sds = andy ] aa : S =  $\frac{TX}{m+1} : \frac{tx}{m+1} =$

$$TX : tx = T : \frac{tx}{T} = AB : Ag.$$

$$(r) Pp : Qp = [Ag : AB =] AE : Qb.$$

(f) Generaliter, Qn : Qb = AEF : AE.EF [ Vide Not. m ]. Specialiter, Qn : Qb = AEF [ AE × EF : (m+1) ] : AE × EF = 1 : m+1.

Et quia Qh :  $\frac{1}{2} QP = Qn : Qb$  [ Vid. Not. n ] erit Qh : QP = 1 :  $2m+2$ .

(t) Est  $P\beta = X^2 : x$ . Ergo elementum spatii APβaA =  $X^2 dy : x = X^2 tdx : \sqrt{(TTXX - ttxx)}$ . Elementum vero sectoris Ali =  $\frac{1}{2} AB$  per elementum arcus il =  $\frac{1}{2} AB^2 \times dAg : gl = \frac{1}{2} XX.(m+1)x^m dx : \sqrt{(TTXX - ttxx)} = \frac{1}{2}(m+1)XXtdx : \sqrt{(TTXX - ttxx)}$ . Ergo elem. spatii APβaA ad elem. sectoris Ali, ut 1 ad  $\frac{1}{2}(m+1)$  vel ut 2 ad  $m+1$ . Et in eadem ratione sunt ipsa spatia, quæ simul incipiunt & desinunt.

Fac. Bernoulli Opera.

F fff



N.LVIII. 6. Radius quadrantis Ai ad arcum il est, sicut Laminæ crassities RS vel AV ad excessum, quo convexa ejus longitudo y V superat concavam QA (u).

7. Ex infinitis Paraboloidibus [qualium AFC hic una fingitur, quæque pro curva tensionum possunt accipi,] una sola est, quæ curvam laminæ AQR reddit algebraicam: una sola, quæ rectificabilem; una sola, quæ spatium ejus efficit quadrabile: quamvis nec hæ ipsæ proprie paraboloidum nomen mereantur. (y)

Nam 1°. si  $m=0$ , sive, si tensiones sint in ratione, ut sic dicam, nulliplicata virium tendentium, hoc est, si EF, BC sint æquales & paraboloides ABC degeneret in parallelogrammum, Curva laminæ abibit in circulum; prout evidens admodum est, cum ob tensionum æqualitatem nulla ratio sit, cur majorem minoremve curvedinem in una, quam in altera parte induat.

2°. Si

(u) Est generaliter laminæ crassities ad excessum convexitatis supra concavitatem, ut radius  $a$  ad arcum cujus sinus  $S:a$ , [Not. n], vel ut radius  $aa:1$ , ad arcum cujus sinus  $S:1$ . Specialiter autem est  $aa=TX:(m+1)$  &  $S=ix:(m+1)$ . Ergo radius ad sinum ut TX ad  $ix$ , vel ut  $X[AB]$  ad  $ix:T[Ag]$ . Quare laminæ crassities ad excessum convexitatis supra concavitatem, ut AB ad arcum il, cujus sinus Ag.

(y) 1. Si curva AQR, cujus æquatio ostensa est  $dy = ix dx : \sqrt{TTXX - iixx} = Tx^{m+1} dx : X^m \sqrt{TTXX - TTx^{2m+2} : X^{2m}} = x^{m+1} dx : \sqrt{X^{2m+2} - x^{2m+2}}$  fit algebraica, necesse est differentialem  $x^{m+1} dx :$

$\sqrt{X^{2m+2} - x^{2m+2}}$  esse integrabilem. Ea vero nequit integrari nisi quando est  $m+1$  æqualis fractioni affirmativæ, cujus denominator impar, aut fractioni negativæ, cujus denominator par. Illa autem fractio, si sit AFC paraboloides, hoc est, si  $m$  sit numerus integer, alia esse nequit quam  $\frac{1}{2}$ . Ergo curva AQR non est algebraica, nisi  $m=0$ . Eo autem in casu æquatio abit in hanc  $dy = xdx : \sqrt{XX - xx}$  aut integrando,  $a-y = \sqrt{XX - xx}$ , quæ est ad circulum, centro Z, radio ZR, vel ZA descriptum.

Quod si, non solum paraboloides, sed etiam hyperboloides pro curvis tensionum AFC sumi posse concedatur, tunc innumeræ curvæ AFC dabunt curvam AQR algebraicam.

2. Quo-



2°. Si  $m = -\frac{1}{2}$ , id est, ob indicem negativum, si tensiones N.LVIII.  
ponantur in ratione subduplicata reciproca virium tendentium.  
[quo casu Curva AFC verius est hyperboloides] nascetur Cur-  
va laminæ rectificabilis; tota quippe AQR dupla rectæ AB, si-  
cut portio ejus RQ dupla mediæ proportionalis inter AB & BE.  
At talis hypothesis, qua crescente vi tendente minuatur tensio,  
& decrescente augeatur, naturæ legibus & consuetudini ubique  
adversatur.

3°. Si denique  $m = 1$ , quæ vulgo recepta est hypothesis,  
hoc est, si tensiones sint in simplici ratione virium [quo casu  
curvilineum ABC abit in Triangulum] complectetur sic curvata  
lamina spatium quadrabile. De hoc vero nunc fusius.

### III. Specialissime.

Vulgaris [ut modo dixi] est hypothesis, *extensiones viribus  
tendentibus proportionales esse*: qua est usus olim Celeberrimus  
Ffff 2 Dnus

2. Quoniam  $ds = a dy$ :  $S =$   
 $(TX: (m+1) \times (x^{m+1} dx:$   
 $\sqrt{(X^{2m+2} - x^{2m+2}): (Tx^{m+1}:$   
 $(m+1) X^m) = X^{m+1} dx:$   
 $\sqrt{(X^{2m+2} - x^{2m+2})}$ ; toties  
erit curva AQR rectificabilis, quo-  
ties differentialis hæc poterit integrari.  
Ea vero potest semper integrari,  
quando  $2m+2$  fractio est, hoc est,  
quando  $m = \frac{1}{2r} - 1$ , sumendo  $r$   
pro numero quocunque integro af-  
firmativo; speciatim si  $r = 1$ , erit  
 $m = -\frac{1}{2}$ , seu  $t = 1: \sqrt{x}$ , & Ela-  
sticæ curvæ æquatio  $dy = dx \sqrt{x}$ :  
 $\sqrt{(X - x)}$ , quæ est ad Cycloi-  
dem, axe AB, semibasi AZ descrip-

tam. Hujus autem longitudo, ut  
notum, æqualis est duplæ diametro  
AB circuli genitoris & portio quæ-  
vis cujus applicata EQ æqualis est  
duplo mediæ proportionalis inter  
AB & BE.

3. Spatium AQP =  $\int x dy = \int (x^{m+2} dx:$   
 $\sqrt{(X^{2m+2} - x^{2m+2})}$  quadrabi-  
le est, si hæc quantitas integrabilis.  
Integrari autem potest, quando  
 $m = (1 - 2r): (1 + 2r)$  vel  
 $-(6 + 2r): (4 + 2r)$ , ubi  $r$  nu-  
merum quemcunque integrum, &  
ipsum 0 repræsentat. Fac  $r = 0$ , &  
 $m = (1 - 2r): (1 + 2r)$  dat  
 $m = 1$ , qui casus est specialissimus  
de quo infra fusius.

N. LVIII. *Dnns* LEIBNITIUS in acutissima sua lucubratione *De Resistencia solidorum*; & ipsemet ego in præsentē materia, priusquam generalem Problematis constructionem adinvenissem. Quapropter operæ pretium existimo, naturam & proprietates Curvæ nostræ in hac hypothēsi paulo specialius exponere: quanquam pro ipsa hypothēseos hujus, sicut & pro alterius cujuscvis veritate multum militare nolim; persuasum potius habens, nullam constantem tensionum legem in Natura observari, sed eam pro diversa corporum textura diversam existere; id quod experimenta, tum nostra, tum aliorum abunde confirmare videntur, quorum plurima prælaudatus Author industrius *Magisterii naturæ & artis*, loco citato, recenset.

*Constructio.* Per punctum E, [Fig. 3] sumptum ubivis in radio AB circuli BiGL, agantur recta Ei & radio perpendicularis EF; e qua producta [si opus sit] abscindatur EN, quæ sit ad AB, sicut quadratum AE ad rectangulum FEi [quod fieri potest per generalem constructionem, sumendo Ag tertiam proportionalem ad AB & AE, & ducendo gl, Al & huic parallelam iu: vel si videatur commodius, ducendo Ff parallelam AB & secantem Ei in f, junctæque fA agendo parallelam ac, abscindentem ex Ei partem Ea = EA; utrovis enim modo repertæ Au vel Ec sumenda æqualis EN:] sic erit punctum N ad curvam AN claudentem spatium AEN; cui si porro ad radium AG constitutur æquale rectangulum AO, & producantur NE, OP ad mutuum occursum in Q, erit punctum Q in curvatura optata AQR; ad quam inducendam Laminæ tantum ei in A pondus appendendum, quanto possit [in *Figura 2.*] extendi SY donec rectang. RZ × ST, fuerit duplum rectang. SY. Sic ut pateat, eam non secus atque catenariam transcendentem esse, & ad sui constructionem quadraturam spatii curvilinei requirere (a).

Cele-

(a) Si sint tensiones viribus tendentibus proportionales, fiat [Not. p]  $m = 1$ , vel  $t = x$  &  $T = X$ , eritque curvæ Elasticæ æquatio  $dy = x dx$ :  $\sqrt{(X^2 - x^2)}$  vel  $xx dx$ :  $\sqrt{(a^2 - x^2)}$  ponendo nunc  $a = AB = X$ . Quæ, secundum Auctoris præscripta constructur, capiendo EN [  $a x x$ :  $\sqrt{$

Celeberrimus D. LEIBNITIUS ingeniosissimum modum præscribit, construendi Catenariam ope solius Logarithmicæ, absque suppositione quadraturarum; eoque sane perfectissimum in Transcendentibus construendi genus exhibet: dolendum tantum quod non sit universale; nec enim succedit in iis curvis, quæ ad sui constructionem Circuli quadraturam requirunt; plurimæque dantur aliæ, quæ mechanicæ cum sint, nec tamen a Circuli, nec ab Hyperbolæ tetragonismo [hoc est, a Logarithmicæ descriptione] dependent. Potest vero certo caractere cognosci, utrum curva aliqua mechanica ope Logarithmicæ construi possit, necne. Posita enim Æquatione differentiali curvæ  $ady = tdx$ ; [ubi  $dx$  &  $dy$  elementa coordinatarum designant,  $a$  quantitatem constantem,  $t$  quantitatem aliam quamcunque, quam ex indeterminatis sola  $x$  ingrediatur;] Dico, si qua arte reperiri possit curva algebraica, cujus  $x$  abscissam denotet, cujusque subtangens tertia sit proportionalis ad  $t$  &  $a$ , certo secuturum, curvam optatam ope Logarithmicæ construibilem esse; cum ad hoc præstandum nihil aliud requiratur, quam ut singulis applicatis curvæ algebraicæ sumantur æquales applicatæ in Logarithmica [cujus subtangens sit  $= a$ ], & ex iis [productis, si opus] refecentur singulæ abscissæ, ad habenda totidem puncta, per quæ optata curva transire debet. Quod si vero nulla detur curva ex algebraicarum numero, cujus subtangens dictam tertiam proportio-

F f f f 3

nalem

$\sqrt{(a^4 - x^4)}$  quæ sit ad AB [ $a$ ] ut  $AE^2$  [ $xx$ ] ad rect. FEi [ $FE \times Ei = \sqrt{(aa - xx)} \times \sqrt{(aa + xx)} = \sqrt{(a^4 - x^4)}$ ]; vel sumendo Ag [ $xx : a$ ] tertiam proportionalem ad AB [ $a$ ] & AE [ $x$ ], ducendo gl, [ $\sqrt{(aa - x^4)} : aa = \sqrt{(a^4 - x^4)} : a$ ], Al, & huic parallelam i u, quæ dabit Au [ $= EN$ ]  $= a x x : \sqrt{(a^4 - x^4)}$  propter gl: Ag  $= Ai : Au$ ; aut etiam, ducendo Ff parallelam AB, quæ dabit Ef  $= \sqrt{(a^4 - x^4)} : a$ , propter Ai [ $a$ ]: Ei [ $\sqrt{(aa + xx)}$ ]

$= EF [\sqrt{(aa - xx)}] : Ef$ ; capiendo  $Ea = EA = x$  & agendo ipsi Af parallelam ac, quæ ex EA abscindet  $Ec = a x x : \sqrt{(a^4 - x^4)}$ , propter Ef [ $\sqrt{(a^4 - x^4)} : a$ ]: EA [ $x$ ]  $= Ea$  vel EA [ $x$ ]: Ec, vel EN. Ita enim erit  $ay = AG \times AP = AO = AEN = \int a x x dx : \sqrt{(a^4 - x^4)}$ , adeoque  $y = \int x x dx : \sqrt{(a^4 - x^4)}$ .

Pondus autem Z tale esse debet [Not. p] ut sit  $ST \times RZ = (m+1) SY = 2SY$ .

N. LVIII. nalem æquet, frustra quoque quis constructionem imperatam solius ope Logarithmicæ molietur (*b*). Quocirca si in nostra curva [cujus æquatio differentialis est  $xxdx : \sqrt{(a^4 - x^4)}$ ] præstandum esset quod Acutissimus Geometra præstitit in Funicularia, indagandum prius foret, num curva quædam detur algebraica, quæ subtangentem habeat  $a\sqrt{(a^4 - x^4)} : xx$ ; quod aliis indagandum relinquo, ut leve habeant specimen, quo universales suas, quas jactant, tangentium methodos inversas explorent. Ego ob graves causas suspicor curvæ nostræ constructionem, a nullius Sectionis conicæ seu quadratura, seu rectificatione dependere. Sed pergo ad ejus præcipuas affectiones:

1. Ducta tangente Qp, erit subtangens Pp quarta proportionalis ad AB, AE & EN. Ipsa vero EN quarta proportionalis ad AB, AE & tangentem Qp: ideoque

2. Inter tangentem Qp & subtangentem Pp media est proportionalis EN. Hinc  $Pp : Qp = AE^2 [QP^2] : AB^2 = Ag : AB$ . (*c*) Et hæc est proprietas characteristica Curvæ, quam texti involucro *Mense Junio 1691* \*, cujus sensus hic est: *Portio axis applicatam inter & tangentem est ad ipsam tangentem, sicut quadratum applicata ad constans quoddam spatium*. Logogryphi tunc adhibiti ratio consistit in tribus alphabetis vicariis, ex quibus litteræ alternatim desumptæ sunt: eadem vero ad alphabetum naturale ita referuntur, ut hujus litteræ *a*, respondeat vicarii

(*b*) Si sit curva algebraica, cujus *x* abscissa, *u* ordinata, subtangens [ $u dx : du$ ] =  $aa : t$ , erit  $aa du : u = t dx = a dy$ , adeoque  $y = \log. u$ , atque ideo curva, cujus æquatio est  $t dx = a dy$  poterit construi per logarithmicam. Sed de hujus methodi universalitate, vide Nos. LXIV. & LXVI.

(*c*)  $Pp = x dy : dx = x^3 : \sqrt{(a^4 - x^4)}$   
 $= x. (axx : \sqrt{(a^4 - x^4)}) : a = AE \times EN : AB$ .

$$Qp = x ds : dx = aax : \sqrt{(a^4 - x^4)} \\ = a. (axx : \sqrt{(a^4 - x^4)}) : x = AB \times EN : AE.$$

$$\text{Ergo } Pp \times Qp = EN^2. \text{ Ac } Pp : Qp = \frac{AE \times EN}{AB} : \frac{AB \times EN}{AE} = AE^2 : AB^2 = \frac{AE^2}{AB} [Ag] : AB.$$

\* N°. XLII. pag. 452.

vicarii primi  $b$ , secundi  $d$ , tertii  $g$ ; cæteris elementis ordine N. LVIII. continuo succedentibus. Id quod ipsum Logogryphum tentanti, ex recta quam involvit propositione obscurum esse non potest.

3. Spatium Elasticum  $RQPZ$  æquale semissi rectang.  $FEi$ , idemque proportionale rectæ  $gl$ : totum ergo spatium  $AQRZA$  æquatur semiquadrato ex  $AB$  ( $d$ ).

4. Curvedines inflexæ Laminæ in  $R$ ,  $Q$ , sunt proportionales applicatis  $RZ$ ,  $QP$  ( $e$ ).

5. Recta  $Qb$  curvæ perpendicularis tertia est proportionalis ad  $AE$  &  $AB$ . ( $f$ )

6. Ejusque semissis est radius osculantis circuli  $Qn$ . Ambæ ergo ad  $AB$  applicatæ Hyperbolas efficiunt. ( $g$ )

7. Recta  $Rm$  sumpta ad principium usque curvæ  $mn$ , e cujus evolutione principalis describitur, æquatur semissi ipsius  $RZ$  vel  $AB$ .

8. Ipsa vero curva  $mn$  quarta est proportionalis ad  $AE$ ,  $EB$  & semissem  $AB$ . ( $h$ )

9. Si ex radio reflexo incidentis  $QP$  abscindatur  $Qh$ , quarta pars ipsius  $QP$ , erit punctum  $h$  in Cautica ex radiis ipsi  $AB$  parallelis; sic ut Cautica  $Ah$  æquetur  $\frac{1}{4} AE$ . ( $i$ )

#### 10. Spatium

( $d$ )  $APQ = \int x dy = \int (x^1 dx : \sqrt{(a^4 - x^4)}) = A - \frac{1}{2} \sqrt{(a^4 - x^4)}$ .  
Fiat  $x = 0$ , & erit  $APQ = 0 = A - \frac{1}{2} \sqrt{a^4}$ , adeoque  $A = \frac{1}{2} \sqrt{a^4} = \frac{1}{2} aa$ . Fiat  $x = AB = a$ , &  $APQ = [\frac{1}{2} aa - \frac{1}{2} \sqrt{(a^4 - x^4)}]$  evadit  $AZR = \frac{1}{2} aa$ . Igitur  $PQRZ = AZR - APQ = \frac{1}{2} aa - \frac{1}{2} aa + \frac{1}{2} \sqrt{(a^4 - x^4)} = \frac{1}{2} \sqrt{(a^4 - x^4)} = \frac{1}{2} \sqrt{(aa - xx) \times \sqrt{(aa + xx)}} = \frac{1}{2} FEi = \frac{1}{2} a \times \sqrt{(a^4 - x^4)} : a = \frac{1}{2} AB \times gl$ .

( $e$ ) Curvedines sunt inverse ut radii osculi; Ergo directe ut  $ddy : dx ds = 1 : aa$  [Not. c]  $= x : aa$ ,

proportionales applicatis  $x$ .

( $f$ )  $Qb = AB \times AE : Ag$  [Not. r]  $= ax : (xx : a) = aa : x = AB^2 : AE$ .

( $g$ )  $Qb : Qn = m + 1 : 1$  [Not. f]  $= 2 : 1$ . Ergo  $Rm = \frac{1}{2} RZ = \frac{1}{2} AB$ .

( $h$ ) Curva  $mn = Qn - Rm = \frac{1}{2} AB^2 : AE - \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} AB (AB - AE) : AE = \frac{1}{2} AB \times BE : AE$ .

( $i$ )  $Qh : QP = 1 : 2m + 2$  [Not. f]  $= 1 : 4$ . Et Curva  $Ah = PQ + Qh = \frac{1}{4} PQ = \frac{1}{4} AE$ .

N.LVIII. 10. Spatium quoque causticum  $AhrZA$  admittit quadraturam, quippe æquale  $\frac{7}{8}$  spatii Elastici  $AQRZA$ , hoc est,  $\frac{7}{16}$  quadrati ex  $AB$  ( $k$ ).

11. Spatium vero ab Evoluta  $m n$  comprehensum a quadratura hyperbolæ dependet. Posito enim  $AB^2 = 8$ , applicataque  $nx$ , quæ sit ad  $mZ$ , sicut 2 ad  $\sqrt{5}$ , exprimetur spatium  $m n x Z$  per seriem [alias spatium hyperbolicum, ut vulgo notum, designantem]  $\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6}$  &c. diminutam  $\frac{1}{2}$  unitatis. Nota spatium  $n t b x$  infinitum esse. ( $l$ )

12. Omnes portiunculæ curvæ  $AQ$  ductæ in respectivas applicatas  $QP$ , vel  $AE$ , aut [quod unum idemque,] omnes hujus <sup>† Scil. ap. plicata.</sup> particulæ in tangentes respectivas  $Qp$ , spatium conficiunt quod Sectori circuli  $Ali$  æquatur: nimirum, si radius circuli  $AB$  sit 1, ejusque portio  $Aq$  intercepta centro  $A$  ductaque recta  $lL$  dicatur  $t$ , utrumlibet spatium exprimetur per seriem:  $t - \frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{7}t^7 + \frac{1}{9}t^9$ , &c. ( $m$ )

13. Hinc Sector  $Ali$  ad curvam  $AQ$  applicatus, producit distantiam Centri gravitatis curvæ ab axe  $AP$  ( $n$ ). Et superficies Conoidis geniti rotatione curvæ  $AQ$  circa axem  $AP$ , ad Sectorem  $Ali$  se habet, ut circumferentia circuli ad radium, hoc est, æquatur arcui  $li$  ducto in semiperipheriam  $iGL$ . ( $o$ )

14. Distan-

( $k$ ). Nam triangulum, quod inter radios duos reflexos vicinissimos & exiguum curvæ  $AQR$  arcum continetur, sub-octuplum est parallelogrammi quod inter duos radios incidentes intercipitur, cum utriusque æqualis sit altitudo  $dy$ , hujus basis illius basi quadruplo major. Ergo area  $AhrRQA$  areæ  $AZR$  est octava pars. Igitur  $AhrZA = \frac{7}{8} AZR = \frac{7}{8} AB^2$ .

( $l$ ) Vide Num. CI. Prop. 60, quæ ultima est.

( $m$ )  $\int x ds$ , vel [Not.  $c$ ]  $\int Qp. dx =$

$\int a x dx: \sqrt{(a^4 - x^4)} =$  sectori circuli cujus radius  $a = AB$ , sinus  $xx: a = Ag$ , hoc est sectori  $Ali$ . Est autem  $Aq =$  tangenti semissis arcus  $il$ . Quare per N<sup>o</sup>. LXXIV. Prop. 45. Series  $t - \frac{1}{2}t^3 +$  &c. hujus sectoris aream exprimit.

( $n$ ) Notissimum enim est distantiam centri gravitatis curvæ  $AQ$  ab axe  $AP$ , inveniri, si summa momentorum singularum particularum curvæ [ $\int x ds = Ali$ ] applicetur ad, vel dividatur per ipsam curvam  $AQ$ .

( $o$ ) Hujus conoidis superficies =



14. Distantia Centri gravitatis spatii Elastici AQP ab axe AB <sup>N. LVIII</sup> invenitur, si triens cubi rectæ AE, mulctatus solido sub tribus EF, Ei & AP comprehenso, adplicetur ad quadratum AB, truncatum rectangulo FEi. Eiusdem vero distantia ab AP habetur, si triens solidi sub curva AQ & quadrato AB, mulctati solido sub tribus EF, Ei & EA comprehenso, adplicetur ut ante. Idcirco totius spatii AQRZA centrum gravitatis ab axe AB distat triente rectæ AB; & ab AZ triente curvæ AQR. Hinc mensurantur solida nata ex conversione figuræ tam circa rectam AB quam AZ. (p)

15. Ipsa vero Curva AQ reperitur, si descripta hyperbola æquilatera id s, cujus centrum A, & semi-latus transversum Ai, triplum solidum quod fit ex ductu frusti hyperbolici AidE in segmentum circuli AiFE, multatum solido comprehenso sub tribus EF, Ed vel Ei, & EA, adplicari intelligitur ad duplum quadratum ex AB. (q)

16. Series

$\frac{c}{r} \int x ds = \frac{r}{r} \times Ai$  [ubi  $c:r$ , rationem exprimit peripheriæ ad radium]. Est autem  $Ai = \frac{1}{2} Ai \times il$ . Ergo superficies conoidis =  $\frac{c}{2r} \times Ai \times il$  = [posito  $r = Ai$ ]  $\frac{1}{2} c \times il$ .

† (p) Distantia centri gravitatis ab axe AB æqualis est  $\int xy dy : \int x dy$ . Est autem  $\int x dy = \frac{1}{2} aa - \frac{1}{2} \sqrt{(a^2 - x^2)}$  [Not. d], &  $\int xy dy = y \int x dy - \int dy \int x dy = \frac{1}{2} aay - \frac{1}{2} y \sqrt{(a^2 - x^2)} - \int \frac{1}{2} aady$  [  $\frac{1}{2} aay$  ] +  $\int \frac{1}{2} dy \sqrt{(a^2 - x^2)}$  [ =  $\int \frac{1}{2} x dx$ , aut  $\frac{1}{6} x^3$  ] =  $\frac{1}{6} x^3 - \frac{1}{2} y \sqrt{(a^2 - x^2)}$ . Igitur hæc distantia =  $(\frac{1}{6} x^3 - \frac{1}{2} y \sqrt{(a^2 - x^2)}) : (\frac{1}{2} aa - \frac{1}{2} \sqrt{(a^2 - x^2)}) = (\frac{1}{3} x^3 - y \sqrt{(aa - xx)}) \sqrt{(aa + xx)} : (aa - \sqrt{(aa - xx)}) \sqrt{(aa + xx)}$ .

Distantia ejusdem centri gravitatis ab axe AP est  $\frac{1}{2} \int x x dy : \int x dy = \int (x^2 dx : \sqrt{(a^2 - x^2)}) : (aa - \sqrt{(a^2 - x^2)}) = \frac{1}{2} (a a \int (a a dx : \sqrt{(a^2 - x^2)}) - x \sqrt{(a^2 - x^2)}) : (aa - \sqrt{(a^2 - x^2)}) = \frac{1}{2} (aas - x \sqrt{(a^2 - x^2)}) : (aa - \sqrt{(a^2 - x^2)})$ .

Hinc si  $x = a$ , distantia centri gravitatis ab AB =  $\frac{1}{2} a$ , & ab AP =  $\frac{1}{2} r$ .

Solidum genitum ex rotatione figuræ APQ super axem AB =

$$\frac{c}{r} \int xy dy = \frac{c}{r} (\frac{1}{6} x^3 - \frac{1}{2} y \sqrt{(a^2 - x^2)})$$

at super axem AP =  $\frac{c}{2r} \int x x dy =$

$$\frac{c}{6r} (aas - x \sqrt{(a^2 - x^2)}).$$

$$(q) AQ = s = \int (aadx : \sqrt{(a^2 - x^2)})$$



N. LVIII. 16. Series etiam nostræ inventionis utiliter adhiberi possunt, cum aliæ difficulter hic locum inveniant: Sic posita AB ejusve quadrato  $= 1$ , exprimi potest quantitas spatii sBAN, rectæve AZ, vel BR, per seriem

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2.7} + \frac{1.3}{2.4.11} + \frac{1.3.5}{2.4.6.15} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.19} + \frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10.23} + \&c.$$

quantitas vero Curvæ AQR per hanc

$$1 + \frac{1}{2.5} + \frac{1.3}{2.4.9} + \frac{1.3.5}{2.4.6.13} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.17} + \frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10.21} + \&c.$$

quarum illam invenio  $>$  quam 0.598 &  $<$  quam 0.601: hanc  $>$  quam 1.308 &  $<$  quam 1.316; sic ut tres istæ lineæ RZ, AZ, AQR, proxime se habeant ut 10. 6. 13. (r) Hujusmodi autem series, quæ diversæ paulo sunt naturæ ab iis, quas Celeberrimus Geometra LEIBNITIUS hinc inde in *Actis* prodidit, & constructu sunt facillimæ, & ad exprimendas quasvis promiscue quantitates, rationales, irrationales & transcendentes pariter accommodæ. Pro reliquis *Vir eximius*, superiori anno, methodum ingeniosissimam profecto & Auctore suo dignissimam præscripsit, ut nihil in hoc genere excellentius excogitari posse existimem.

17. Figura Elastica ARZ mota in fluido secundum directionem AZ, præcedente nunc vertice A, nunc base RZ resistentias patitur quæ ad se invicem sunt ut 4 & 5, sed mota juxta directionem RZ, præeunte jam vertice R, jam base AZ, resistentias subit se habentes ut 3 & 5; ideoque resistentiæ, quas figura patitur mota successive juxta

$$= \frac{3}{2aa} \int dx \sqrt{(a^2 - x^2)} - \frac{1}{2aa} x \sqrt{(a^2 - x^2)}. \text{ Est autem } \int (dx \sqrt{(a^2 - x^2)}) = \int dx \sqrt{(aa + xx)} \sqrt{(aa - xx)} \text{ solidum quod fit ex ductu frusti hyperbolici in segmentum circuli. Ductus ille intelligendus est, juxta mentem Gregorii a}$$

STO. VINCENTIO de solido quod nascitur ducendo singulas hyperbolæ applicatas in singulas adjacentes applicatas circuli.

(r) Vide harum Serierum demonstrationem No. C I. Prop. 56. 57. 58. Vide etiam Num. LXIV.

juxta utramque directionem, præeunte utrobique vertice se habent N. LVIII. ut quadrupla RZ & tripla AZ. (f).

18. Superest una ex palmariis proprietatibus curvæ nostræ tertiæ constructionis, quam antehac supremis tantum labris tetigi, quæ est quod eadem una repræsentet curvaturam lintei a pondere infusi liquoris expansi. Nimirum erecto verticaliter super BR plano AR $\phi$ , rectaque A $\phi$  horizontaliter constituta, si lamina elastica AQR [continuata, si vis, ab altera parte usque in  $\phi$ ] sensim derigescere, & in omnibus suis partibus flexilis fieri intelligatur ad instar corii, linteive, quod affixum hinc inde in punctis A &  $\phi$  intra se velut culcum contineat liquorem aliquem, qui totam ejus cavitatem AR $\phi$  repleat: Dico futurum, ut linteam pondere fluidi expansum eandem curvaturam AQR retineat, aut si non habeat, acquirat; cujus asserti veritatem, etiam non considerata in specie natura curvæ AQR, facile possem demonstrare (t). Sed suffecerit attigisse sequentia.

Gggg 2

a. Si

(f) Resistencia basis RZ ad resistenciam curvæ secundum axem motæ, est [Vide Num. LVI. pag. 568.] ut  $x$  ad  $\int(dx^3 : ds^3) = \int(a^4 - x^4)dx$ :  $a^4 = x - x^5 : 5a^4$ , ac posito  $x = a$ , ut  $a$  ad  $a - \frac{1}{5}a$ , vel ut 5 ad 4.

At si figura moveatur secundum RZ, resistencia basis AZ est ad resistenciam figuræ, ut  $y$  ad  $\int(dy^3 : ds^3) = \int(x^6 dx : \sqrt{(a^4 - x^4)}) = \frac{1}{2} \int(x dx : \sqrt{(a^4 - x^4)}) - \frac{1}{2} x^3 \sqrt{(a^4 - x^4)} : a^4 = \frac{1}{2}y - x^3 \sqrt{(a^4 - x^4)} : 5a^4$ , quæ ratio, posito  $x = a$ , fit ratio  $y$  ad  $\frac{3}{2}y$ , aut 5 ad 3.

Igitur cum resistencia curvæ motæ secundum AZ, sit ad resistenciam RZ, ut 4 ad 5, & resist. RZ ad resist. AZ, ut RZ ad AZ, & resist. AZ ad resist. curvæ motæ secundum RZ, ut 5 ad 3, erit, compositis ra-

tionibus, resistencia prima ad ultimam ut 4RZ ad 3AZ.

(t) Data est N°. XLVIII. Not. a, pag. 483 & 484, æquatio generalis curvarum in quas flectitur filum cujus singula puncta innumeræ potentia perpendiculariter urgent. Hæc erat  $pdyds = aaddx$ , quæ, quia  $ds$  constans dat  $dxddx = -dyddy$ , reducitur ad hanc  $-pdxds = aaddy$ , vel  $pdxds = aaddy$ , posita origine in A, non in R, ut ponebatur N°. XLVIII. Potentiæ  $p$  in nostro casu, cum sint columnæ fluidi quarum altitudines PQ, & fluidorum pressiones sint altitudinibus eorum proportionales, per applicatas PQ [ $x$ ] commodè designabuntur, unde æquatio fiet  $x dx ds = aaddy$ , quæ ipsissima est quam supra ad Elasticam invenimus  $1dxds$

N. LVIII.  $\alpha$ . Si loco rectæ RZ concipiatur firmus paries, qui affixam habeat unam lintei extremitatem in R, portioque lintei RQ a pariete & portione reliqua subito abrumpi intelligatur, excutitur hæc portio a pondere inclusi fluidi juxta eam directionem, quæ cum pariete RZ angulum faciat, cujus tangens sit ad sinum totum, sicut EF est ad Ei. Hinc totum linteum, disruptis subito in A & R vinculis, excutitur juxta angulum semirectum ( $u$ ).

$\beta$ . Si ex AB abscindatur A $\sigma$ , quæ ad AB sit ut 1 ad  $\sqrt{2}$ , & applicetur  $\sigma p$ , erit per  $p$  ducta recta semirectum cum pariete angulum constituens, & curvæ perpendicularis, & linea directionis totius lintei, & simul axis æquilibrii impulsione: at non transibit per concursum rectarum AB, RB, lintei extremitates A & R tangentium ( $x$ ); ut nec in Velaria id contingere existimandum est, [cum secus curvæ hæc ex algebraicarum deberent esse numero ut attendenti satis patet], quanquam hoc olim incogitanti mihi & certis de causis festinanti inter alias regulas, quas biennio abhinc

$xdxds = aaddy$ , si nempe tensiones & viribus tendentibus  $x$  proportionales statuantur.

( $u$ ) N°. XLVIII. Not. f, media directio omnium pressionum, quæ curvam urgent perpendiculariter, inventa est bisecare angulum quem tangentes extremæ comprehendunt, atque efficere cum axe RZ angulum, cujus tangens sit ad sinum totum ut  $ds = dy$  ad  $dx$ : hoc est, in casu præsentis, ut  $aadx : \sqrt{(a^4 - x^4)} = xx dx : \sqrt{(a^4 - x^4)}$  ad  $dx$ , aut ut  $aa = xx$  ad  $\sqrt{(a^4 - x^4)}$  vel, dividendo per  $\sqrt{(aa - xx)}$ , ut  $\sqrt{(aa - xx)}$  [EF] ad  $\sqrt{(aa + xx)}$  [Ei]. Sit  $x = 0$ , & habebis angulum semirectum, cujus nempe tangens æqualis Sinui toti.

( $x$ ) Recurrit error, quem N°.

XLVIII. Not. g, pag. 486 animadvertimus. Nondum potuit Auctor sibi persuadere mediam directionem inter innumeras perpendiculares ad Curvam, non esse pariter normalem ad ipsam. Quæsit ergo, quo in puncto perpendicularis ad curvam cum utroque axe angulum efficeret semirectum, hoc est, quo in puncto esset  $dx = dy$ , & habuit  $xx = \sqrt{(a^4 - x^4)}$  sive  $2x^4 = a^4$  aut  $x = a/\sqrt{2}$ . Ex eodem fonte manat prava Regulæ 15, N°. XLVIII, correctio, quam tandem feliciter dedit N°. LXVI, ubi intellexit, obliquam esse ad curvam AQR mediam directionem, quæ per concursum B tangentium extremarum transire demonstrata est N°. XLVII E. Not. a, pag. 484.

hinc de curvatura Veli dedi, exciderit. Quocirca rogandus Le-  
ctor ut Regulam 15 deleat; lacunamque si velit impleat alio mo-  
do facillimo, axem æquilibrii in Velaria inveniendi, nempe fa-  
ciendo BD [Vide Fig. 2. ibidem] æqualem & parallelam ipsi  
CH, ducendoque DF parallelam HB, quæ erit quæsitus æquili-  
brii axis, fietque sponte  $BG = BD$  vel CH.

γ. Vis ponderis impellens linteum AQR juxta dictam directio-  
nem ad pondus ejus absolutum se habet ut  $\sqrt{2}$  ad 1.

δ. Vis lintei sustinens seu firmitas ejus requisita, ne rumpatur,  
in omnibus ejus punctis eadem est, & tanta, quanta requiretur  
in A ad sustinendum linteum, ne labatur; atque æquatur ipsi ab-  
soluto ponderi liquoris inclusi (γ). Linteum igitur æquabilis tex-  
turæ æqualiter resistit prementi fluido, secus ac lamina inflexa,  
quæ in partibus ipsi R propinquioribus debilior est quam in cæ-  
teris.

ε. Tandem & hoc addamus, quod inter omnes figuras isope-  
rimetras eidem rectæ Aφ insistentes, Elastica AR φ illa est, quæ  
habet centrum suum gravitatis longissime remotum ab Aφ: sicuti  
Funicularia est illa, in qua centrum gravitatis ipsius curvæ ab  
eadem maxime distat (z). Notare hic igitur convenit affinitatem  
miram, quæ ab una parte Funiculariæ & Velariæ, ab altera E-  
lasticæ & Curvæ Lintei ab incluso liquore expansi intercedit.

Superesset nunc, ut retenta vulgari extensionum hypothesi  
speculationes nostras promoveremus ulterius, indagando quales  
Curvæ prodeant, si Lamina Elastica proprio pondere absque ap-  
penso onere flectatur: Si flectatur ab utroque simul: † Si non

G g g g 3. sit.

(γ) Tensio fili, sive lintei, osten-  
sa est N°. XLVIII. Not. a, constans  
& = aa = AR φ = ponderi totius  
fluidi. Vis vero quæ secundum me-  
diam directionem premit, est ad  
Tensionem aa [Vide Not. k. pag.  
486] ut  $\sqrt{(2ds - 2dy)}$  ad  $\sqrt{ds}$ ,  
hoc est, in hoc casu, ut  $\sqrt{(2aa - 2xx)}$   
ad  $\sqrt{(aa - xx)}$  ad  $\sqrt{aa dx}$ :

$\sqrt{(aa - xx)}$  vel ut  $\sqrt{(2aa - 2xx)}$   
ad  $\sqrt{aa}$ ; quæ ratio, ubi  $x=0$ , redu-  
citur ad hanc  $\sqrt{2aa} : \sqrt{aa}$ , vel  $\sqrt{2} : 1$ .

(z) Sequitur ex notissimo Me-  
chanices Axiomate, quo fertur cen-  
trum gravitatis tantum descenderæ  
quantum potest.

† Harum quæstionum solutiones  
vide.

N. LVIII. sit uniformis crassitiei aut latitudinis, sed exempli gratia, triangularis aut alterius cujuscvis figuræ; & vis flectens applicata, tum in cuspide tum in basi ejus: Nec non qualem Lamina curvaturam habere debeat, ut ab appenso onere, vel proprio pondere, vel ab utroque simul in rectam extendatur, \* [quod usui veniret in attemperandis brachiis bilancium & staterarum, ubi requiritur ut centra motus & appensionum jaceant in directum:] item, qualis figura danda laminæ, ut per inflexionem acquirat datam curvaturam; & mille ejusmodi alia. Quarum Curvarum omnium proprietates characteristicas, & aliquarum etiam constructiones exhibere possum, quas secundi tertiive generis mechanicas esse deprehendo. Sed pleraque nondum digessi, nec uni vacat agere omnia. Præterea & Lectorum nostrorum industriæ quædam relinquenda videntur, quibus hinc ampla occasio inventum nostrum perficiendi suppeditatur.

vide in elegantissimis Dissertationibus Celebb. *Danielis* BERNOULLI & *Leon.* EULERI in *Comment. Acad.* Petropol. Tom. III. pag. 62. & 70.

\* Vide N°. CVII. Art. XX.



N°. LIX.

Nº. LIX.

# JACOBI BERNOULLI

## S O L U T I O

### PROBLEMATIS LEIBNITIANI

*De Curva Accessus & Recessus æquabilis a  
puncto dato, mediante rectificatione  
Curvæ Elasticæ.*

**F** Elicitatem inventi præcedentis commendare potest solutio  
elegantissimi Problematis *Leibnitiani*, de inveniendâ *linea*, ABaErud.  
Lips. 1694.  
Jun. p. 276.  
per quam descendens grave æqualiter æqualibus temporibus a  
dato puncto recedat, vel ad illud accedat (\*): quod laudatissimo  
suo Auctori ita placuit, ut non tantum ad ejus tentamen Ami-  
cos pariter & Adversarios aliquoties in *Actis* provocaverit [ Vide  
*An.* 1689, *Apr.* pag. 198, & 1690, *Mai.* p. 229, & *Jul.* pag.  
360, ] sed & ipse strenue in illo desudavit, testibus nonnullis  
Curvæ proprietatibus, quas *Gallorum Diario* inseri curavit, ut ex  
relatione *Fratris* habeo, qui tamen illas nominare mihi non po-  
tuit. Multus etiam fuit in eodem ipse *Frater*, dum *Parisis* age-  
ret, sed omni sua Methodo Tangentium inversa aliud nil efficit,  
quam ut Problema ad hanc æquationem differentialem reduce-  
ret,  $(x dx + y dy) \sqrt{y} = (x dy - y dx) \sqrt{a}$ , ad quam tamen  
etiam

(\*) Hanc Isochronam Paracentricam vocavit *LEIBNITIUS*.



LIX. etiam nullo labore pervenitur (\*). Plenariam vero illius solutionem, sive constructionem, nec ipse, nec quisquam alius dare potuit. Nuper, cum præcedens schediasma pararem *Lipsiam*, partemque inventi cum figuris ipsis jamjam chartæ consignassem, scrutinium hujus Lineæ suscepi, occasione novorum Theorematum quæ ibi dedi pro radiis circulorum osculantium in Spiralibus [quorum tamen investigatio & ipsa incidenter tantum fiebat; præcipua enim inventi capita sub calamo demum mihi nascebantur,] mox etiam, post pauca conamina optatum finem consecutus sum (\*), ubi hoc perquam singulare mihi accidit, ut absoluta

(\*) Sit  $A\alpha$  curva quæsitæ, sintque  $A\gamma = x$ ,  $\gamma\alpha = y$ , ideoque  $A\alpha = \sqrt{(x^2 + y^2)}$ , ejusque differentiale  $\alpha\beta = (x dx + y dy) \cdot \sqrt{(x^2 + y^2)}$ , quod recessus est momentaneus corporis a puncto  $A$ , dum scil. spatiolum  $\delta\alpha = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$  describit, quemadmodum percurrente  $A\pi$  initiolum curvæ, ipsa longitudine  $A\pi$  ab  $A$  recedit. Sint illi recessus  $\alpha\beta$ ,  $A\pi$  æquales, & ideo, per conditionem curvæ, æqualia sunt tempora, quibus  $A\pi$ ,  $\delta\alpha$  percurruntur; consequenter hæc spatiola  $A\pi$ , vel  $\alpha\beta [(x dx + y dy) : \sqrt{(x^2 + y^2)}]$ , &  $\alpha\delta [\sqrt{(dx^2 + dy^2)}]$  sunt proportionalia celeritatibus corporis in  $A$  &  $\alpha$ . Hæc vero celeritates, ex lege descensus gravium, sunt ut radices altitudinum ex quibus grave descendit, hoc est ut radices altitudinum  $iA [a]$ , ex qua grave in  $A$  descendit, &  $iA + \alpha\gamma, [a + y]$  ex qua grave in  $\alpha$  descendit; habemus itaque hanc æquationem  $(a + y) (x dx + y dy)^2 : (xx + yy) = a (dx^2 + dy^2)$ , vel  $ax^2 dx^2 + 2axy dx dy + ayy dy^2 + yxx dx^2 + 2yyx dy dx$

$+ y^2 dy^2 = axx dx^2 + axx dy^2 + ayy dx^2 + ayy dy^2$ , quæ, demtis utrinque æqualibus, transposito termino  $2axy dx dy$ , & extracta radice quadrata, reducit ad istam  $(x dx + y dy) \sqrt{y} = (y dx - x dy) \sqrt{a}$ ; quæ tamen, ob indeterminatarum permixtionem, vix potest construi.

(\*) Eligantur itaque commodiores indeterminatæ, quibus tamen inventis, puncta curvæ determinentur. Sit, v. g.  $A\alpha = t$ ,  $\alpha\zeta = z$ , & erit  $\alpha\gamma = t z : a$ , propter  $A\alpha : A\alpha = t\zeta : \alpha\gamma$ , nec non  $\alpha\beta = dt$ , &  $\beta\delta = dz : \sqrt{(aa - zz)}$ , cum sit  $A\zeta [\sqrt{(aa - zz)}] : A\alpha [a] = t\delta [dz] : t\lambda [adz : \sqrt{(aa - zz)}]$ , &  $A\alpha [a] : t\lambda [adz : \sqrt{(aa - zz)}] = A\delta$  vel  $A\alpha [t] : \beta\delta [dz : \sqrt{(aa - zz)}]$ . Igitur cum Nota superiori ostensum sit  $\alpha\beta : \alpha\delta = iA : \sqrt{(iA + \alpha\gamma)}$ , vel  $\alpha\beta^2 : \alpha\delta^2 = iA : iA + \alpha\gamma$ , vel convertendo  $\alpha\beta^2 : \beta\delta^2 = iA : \alpha\gamma$ , erit  $dt^2 : \frac{adz^2}{aa - zz} = a : \frac{t^2}{a}$ , quæ reducitur ad  $dt : \sqrt{t} = adz : \sqrt{(aa - z^2)}$ , ubi jam separatæ sunt indeterminatæ,



soluta analysi animadverterem, curvam Elasticam, quæ qua-  
lemcunque tantum occasione huic tentamini dederat, illam ip-  
sam esse, cujus rectificatione altera construi posset (d). Nam  
quanquam idem exequi liceat, mediante quadratura spatii alicu-  
jus algebraici, alterum tamen construendi modum præferendum  
censeo, tum quod generaliter facilius in praxi rectificentur cur-  
væ, quam quadrentur spatia, tum præsertim quod ipsa natura  
[ siquidem convenientem tensionis legem observet ] illum præ-  
scripsisse videatur.

CONSTRUCTIO. Descripta itaque curva Elastica tertiæ  
constructionis [ Fig. 3. ] cæterisque positis, ut prius, applicetur  
in utroque quadrante circuli BL, LG, recta  $\epsilon \zeta$  æqualis ipsi Ag,  
seu tertiæ proportionali ad AB & AE [ hic in dextro tantum  
quadrante ducta apparet, ut linearum confusio vitetur ] & ex  
ducta A $\epsilon$  [ productaque si sit opus ] abscindatur A $\alpha$  æqualis ter-  
tiæ proportionali ad rectam AB & portionem curvæ AQ in si-  
nistro, vel  $\phi RQ$  in dextro quadrante; eritque punctum  $\alpha$  in  
curva quadam  $A\chi\omega n$ , ita comparata ut grave per illam latum  
[ si prius ex altitudine  $iA$  deciderit ] æqualibus temporibus æ-  
qualiter ad punctum A accedat, aut ab illo recedat. Cujus con-  
structionis demonstrationem [ ut Celeberrimum Problematis Au-  
ctorem, aliis occupatissimum, examinandi labore sublevem ]  
hic appono.

*Jac. Bernoulli Opera.*

H h h h

D e-

tæ, atque integrando ulterius  $2\sqrt{t} = f(adz : \sqrt{aaz - z^3})$ , unde liquet,  
rem reductam esse ad quadraturam  
curvæ, cujus abscissa  $z$ , ordinata  
 $a^2\sqrt{a} : \sqrt{aaz - z^3}$ .

(d) Quod si vero, ulterioris re-  
ductionis gratia, fiat  $z = uu : a$ , erit  
 $adz : \sqrt{aaz - z^3} = 2audu : a\sqrt{au^2 - u^6 : a^3} = 2aadu : \sqrt{a^4 - u^4} \sqrt{a}$   
Igitur  $2\sqrt{t} = \frac{2}{\sqrt{a}} f(aadu : \sqrt{a^4 - u^4})$ ,

vel  $\sqrt{at} = f(aadu : \sqrt{a^4 - u^4})$ .  
Est autem [ N<sup>o</sup>. præc. Not. q. ]  $f(aadu : \sqrt{a^4 - u^4}) =$  arcui AQ vel  $\phi RQ$   
curvæ elasticæ, facta nimirum AE  
 $= u$ . Igitur est  $\sqrt{at} [ \sqrt{a. Aa} ] =$   
AQ vel  $\phi RQ$ , & A $\alpha = A Q^2 : a$   
vel  $\phi R Q^2 : a$ , tertia proportionalis  
ad AB, AQ vel  $\phi RQ$ , quando as-  
sumpta est  $\epsilon \zeta [ z = uu : a ]$  tertia  
proportionalis ad AB, AE. Unde  
sequitur Auctoris constructio. Vide  
Num. sequentem Nota (a).

No. LIX. DEMONSTRATIO. Descriptus intelligatur centro A circulus  $\beta\delta$ , abscindens ex applicata Aa Elementum  $a\beta$ , & ex curva Elementum  $a\delta$ , cui concipiatur in vertice portiuncula isochronos A $\omega$ . Jam ratio  $\beta\delta$  ad  $a\beta$  composita est ex sequentibus quinque rationibus:

$$\begin{aligned} \beta\delta : \text{Elem. periph. } G\epsilon [\epsilon\lambda] &= Aa : A\epsilon \\ \text{Elem. per. } G\epsilon [\epsilon\lambda] : \text{Elem. } \epsilon\zeta [\epsilon\lambda] &= A\epsilon : A\zeta, \text{ ex nat. Circuli.} \\ \text{Elem. } \epsilon\zeta [\epsilon\lambda] : \text{Elem. AE} &= 2AE : AB, \text{ per constr. \& princ.} \\ &\text{Calc. inf. parvor.} \\ \text{Elem. AE} : \text{Elem. AQ } [\phi RQ] &= A\zeta : AB, \text{ ex nat. curvæ AQ} \\ &\text{ut collig. ex Cor. 2. Constr. III. præced.} \\ \text{Elem. AQ } [\phi RQ] : a\beta &= AB : 2AQ [1\phi RQ] \text{ per constr. \&} \\ &\text{princ. Calc. inf. parvor.} \end{aligned}$$

unde facta divisione per communes rationum antecedentes & consequentes,  $\beta\delta : a\beta = Aa : AB + AE : AQ [\phi RQ,]$  &  $a\delta^2 : a\beta^2 = Aa^2 : AB^2 + AE^2 : AQ^2$  vel  $\phi RQ^2 [\epsilon\zeta : Aa, \text{ per constr.}] = Aa^2 \times \epsilon\zeta : AB^2 \times Aa = Aa \times \epsilon\zeta : AB^2 = [\text{ob similitudinem Triangulorum } Aa\gamma, A\epsilon\zeta] A\epsilon \times a\gamma : AB^2 = a\gamma : AB [Ai],$  componendoque  $a\delta^2 : a\beta^2 = a\gamma + Ai : Ai$ ; & proinde  $a\delta : a\beta = \sqrt{(a\gamma + Ai)} : \sqrt{Ai} = \text{celeritas acquisita in } a : \text{celer. acquis. in } A = [\text{ex natura descensus gravium}] = a\delta : A\omega [\text{per hypoth. quia æqualibus tempusculis transiri supponuntur}].$  Ergo  $a\beta = A\omega$ . Ergo grave per hanc Curvam latum æqualiter æqualibus temporibus a puncto A recedit. Q. E. D.

Quæ hic præcipue observanda veniunt, sunt sequentia:

1. Si grave altius vel humilior, quam ex i, decidere supponatur, puta ex  $\tau$ , non opus est nova Elastica: Sufficit hæc una omnibus Curvis isochronis describendis. Omnes enim inter se similes sunt, determinanturque, faciendo tantum, ut Ai ad A $\tau$ , sic Aa ad aliam Aa abscindendam ex eadem A $\epsilon$ . Estque ipsa curva Schematis nostri constructa pro gravi tanquam ex  $\tau$ , non i, decedente.

2. Sed & infinitæ dantur aliæ, quas grave ex eadem altitudine

$\tau A$

†A delapsum ita permeare potest, ut æquabiliter ad punctum ali. No.LIX. quod accedat vel recedat; at illud continuo diversum ab A; nec nisi per unicam curvam ex eadem altitudine, respectu ejusdem puncti, accessus vel recessus æquabilis effici potest. (\*)

3. Curva nostra Isochronos initium capit in ipso puncto A, cujus respectu motus æquabilis est, & terminatur in puncto η ejusdem cum illo altitudinis; utraque extremitate tangit horizontalem rectam An (\*). Unde flexum contrarium habere constat. Quod si ex altera parte statuatur huic similis & æqualis Curva Aλθ↓, & grave dimittatur ex η cum celeritate, quam acquirere potest cadendo ex altitudine æquali ipsi †A, illud primo descendendo ad α, mox reascendendo, æquabiliter ad A accedet, indeque pergendo continue per alteram Aλθ↓ ab eodem puncto A eadem ratione elongabitur.

4. Tangens curvæ in locis intermediis, velut α, reperitur, si ducta Aμ perpendiculari ad Aα, fiat, ut √Aτ ad √αγ; ita Aα ad Aμ; ducta enim αμ curvam tanget: quod vel ex usu, quem præstare debet curva facile infertur (\*).

5. Recta An quadrupla est rectæ Aθ. (h)

6. Si in Elastica punctum Q assumatur tale, ut tertia proportionalis ad subtangentem Pp & rectam AB æquetur curvæ AQ, invenie-

H h h h 2

venie-

(\*) Imo vero infinitæ dantur, ut observarunt LEIBNITIUS N°. LXIV, & HUGENIUS N°. LXV, agnovitque Author N°. LXVI. Scilicet in integratione æquationis  $dt : \sqrt{t} = a dz : \sqrt{aaz - z^3}$ , [Nota (c)] omissa est constantis additio. Integralis autem completa  $2\sqrt{t} + \sqrt{b} = \int (adz : \sqrt{aaz - z^3})$  pertinet ad infinitas diversas curvas, prout alia atque alia assumitur quantitas b. Vide Num. LXVI.

(f) Vide Notam sequentem.]

(†) Est enim  $A\alpha : A\mu = \alpha\beta : \beta\delta = [\text{Vide Not. c}] \sqrt{1A} \text{ aut hic } \sqrt{\tau A} : \sqrt{\alpha\gamma}$ . Igitur si sit  $\alpha\gamma = 0$ , id quod locum habet ubi Aα cadit in AG, erit etiam Aμ infinites minor ipsa Aα, adeoque curva tangit rectam Aα, seu AG. Hujusmodi sunt puncta A & η, quæ Noster initium & finem curvæ vocavit, licet ipsa revera interminata sit, & infinitos flexus atque sinus habeat. Vide rursus Num. LXVI.

(h) Est enim  $A\eta = AR\phi^2 : AB$  [per constr.]  $A\theta$  vero  $= AQR^2 : AB$ . Ergo

No. LIX. venietur ejus ope punctum  $\chi$  portionis  $A\chi^\theta$ , quod omnium maxime distat a perpendiculari  $A^\theta$  (i).

7. Sin punctum Q ponatur tale, ut tangens Qp æquetur curvæ  $\phi RQ$ , illo mediante habebitur in altera punctum  $\omega$ , omnium infimum, & remotissimum ab horizontali  $A^\eta$  (\*).

8. Tandem & hoc advertendum est, quod ex propositi Problematis constructione proclive jam colligere sit, quales suppositiones faciendæ, ad reducendam æquationem  $(x dy + y dx) \sqrt{y} = (y dx - x dy) \sqrt{a}$ . Nam si loco  $x$  &  $y$  (¹) assumantur duæ aliæ indeterminatæ  $t$  &  $z$  (²), ponendo  $ay = tz$ , &  $ax = t\sqrt{(aa - zz)}$ ; prodibit æquatio, in qua separari possunt indeterminatæ  $t$  &  $z$  cum suis differentialibus a se invicem; quod sufficit ad constructionem deinde, saltem per quadraturas, expediendam. Duo enim in hoc calculo adhuc præcipue desiderari videntur, quæ si semper fieri possent, omnia reperta essent; unum ut differentialia secundi aliorumve generum ad differentialia primi redu-

Ergo cum sit  $AR \phi = 2 AQR$  erit tangentem Pp & rectam AB.  
 $A^\eta = 4 A^\theta$ .

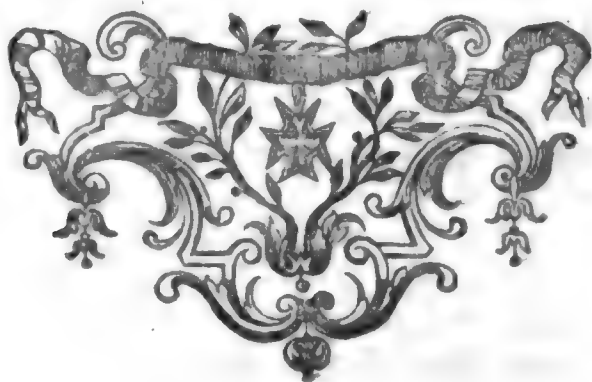
(i). Tangens in puncto  $\chi$ , quod est ab Axe AL remotissimum, rectæ  $ay$  parallela est, & dat Triangulum  $A\mu\mu$  Triangulo  $Aay$  simile. Igitur  $ay^2 : Ay^2 = Aa^2 : A\mu^2 = [ \text{Not. g} ] = Ai : ay$ , vel, componendo,  $ay^2 [ uz : aa ] : Aa^2 [ uz ] = Ai [ a ] : Ai + ay [ a + uz : a ]$ ; unde elicitur  $t [ AQ^2 : a ] = (a^4 - aaz : z^3 [ \text{quoniam } z = uu : a ] = (a^4 - u^4) a : u^6 = a^3 : Pp^2$ . Est enim [ N°. præc. Nota (c) ]  $Pp = u^3 : \sqrt{(a^4 - u^4)}$  atque ideo  $Pp^2 = u^6 : (a^4 - u^4)$ . Igitur cum sit ad punctum  $\chi$ ,  $AQ^2 : a = a^3 : Pp^2$ , vel  $AQ^2 = a^4 : Pp^2$ , est etiam  $AQ = aa : Pp$ , siue AQ tertia proportionalis ad

(\*) Tangens autem in puncto  $\omega$ , quod ab Axe AG maxime distat, ipsi parallela est & efficit Tr.  $A\mu\mu$  simile Triang.  $Aay$ . Est igitur  $Ay^2 : ay^2 = Aa^2 : A\mu^2 = Ai : ay$ , vel componendo  $Aa^2 [ uz ] : ay^2 [ uz : aa ] = Ai + ay [ a + uz : a ] : ay [ uz : a ]$ ; unde deducitur  $t = [ \phi RQ^2 : a ] = aaz : (aa - zz) = a^3 uu : (a^4 - u^4) [ \text{scribendo nimirum } uu : a \text{ pro } z ] = Qp^2 : a$ . Namque est [ N°. præc. Nota (c) ]  $Qp = aa : \sqrt{(a^4 - u^4)}$  Est igitur ad punctum  $\omega$ ,  $\phi RQ^2 : a = Qp^2 : a$ , vel arcus  $\phi RQ = \text{tangenti } Qp$ .

(1) Ay & ya.

(²) Aa, & z.

reducantur; alterum, ut in æquationibus differentialibus primi No. LIX. generis, indeterminatæ, si invicem permixtæ sint, a se mutuo separentur, ut unaquæque cum sua differentiali peculiarem æquationis partem constituat; hoc est, ut reperiatur methodus inversa tangentium. Pro utroque dedi regulas quasdam [pluresque sine fine dare possem] similes illis, quas *Frater* Parisiis apud *Marchionem* HOSPITALIUM deposuit, quibus methodum inesse initio existimarat. At statim sensi, illas non continere nisi artificia quædam particularia, quæ methodum appellare non ausim; utpote qualem non magis dari posse arbitror, quam dari potest universalis methodus pro construendis æquationibus algebraicis quorumvis promiscue graduum. Illa enim [cujus olim in *Actis* mentio facta est] qua pono indefinite  $0 = a + bx + cy + exy + \&c.$  & quæro deinde ejus ope lineæ tangentem, vix aliter quam in speculatione succedere videtur. Quod dictis fidem faciat, hoc esto, quod præsens Problema, quanquam ut apparet haud admodum difficile, nullius regulæ, methodive hætenus reperiæ ope, solvi a quoquam potuerit.





Nº. LX.

# JACOBI BERNOULLI CONSTRUCTIO CURVÆ

*Accessus & Recessus æquabilis,  
Ope Rectificationis Curvæ cujusdam algebraicæ:  
Addenda nuperæ solutioni Mensis Junii.*

*Acta Erud.  
Lipf. 1694.  
Sept. p. 336*

**T**Riplex præcipue modus habetur construendi curvas mechanicas, sive transcendentes. Primus, sed ad praxin parum idoneus, fit per curvaturas spatiorum curvilinearum. Melior est, qui instituitur per rectificationes curvarum algebraicarum; accuratius enim & expeditius rectificari possunt curvæ, ope fili vel catenulæ ipsis circumplicatæ, quam quadrari spatia. Eodem loco habeo illas constructiones, quæ peraguntur absque ulla rectificatione & quadratura, per solam descriptionem curvæ alicujus mechanicæ, cujus puncta, licet non omnia, infinita tamen, & quantumvis proxima, geometricè inveniri possunt, qualis esse solet Logarithmica, & si quæ sint ejus generis aliæ. Optimus vero modus, sicubi haberi possit, ille est, qui peragitur ope alicujus curvæ, quam Natura ipsa, absque arte, motu quodam celerrimo & quasi instantaneo ad nutum Geometræ producit; cum præcedentes modi requirant curvas, quarum delineatio, sive per motum continuum, sive per plurium punctorum inventionem, ab Artifice instituatur, communiter vel lenta vel impedita nimis existit. Itæ constructiones illas Problematum, quæ

quæ Hyperbolæ quadraturam vel Logarithmicæ descriptionem No. LX. supponunt, cæteris paribus, posthabendas censeo iis, quæ ope Catenariæ peraguntur, seu curvæ, quam suspensa catena sponte sua citius induerit, quam reliquis ipse describendis primam manum admoveris.

*Curva Accessus & Recessus aquabilis*, ob solam proponentis Viri commendationem, mereri videtur ut de constructionibus secundum omnes tres modos illi adornandis sumus solliciti. Constructio primi modi per quadraturas, quam in nupera solutione insuper habui, ob jam dictam rationem, institui potest, sumendo in Fig. 3. rectam EN, non, ut ibi, ipsi Au, sed ipsi iu æqualem; iterumque curvilineo AEN æquale rectangulum AO; hujus enim latus AP nuperæ curvæ AQ adæquabitur; sic ut sumpta ad AB & nunc inventam AP tertia proportionali Aa, habeatur punctum a in optata curva (\*). Tertiæ modi constructio, quæ fieret mediante linea Elastica AQ, quam solam ibi tetigi, sine dubio fieret optima, si natura alicubi tensiones viribus tendentibus simpliciter proportionales effecisset: at quia nullus forte invenitur Elater, qui hanc tensionis legem præcisè observet; nec si reperiatur, illud certo constet; idcirco nec isti fidere satis tutum: præstatque recurrere ad secundum construendi modum, & quærere curvam algebraicam, cujus rectificatione scopum assequamur. Talem ex voto sese sistit curva quatuor dimensionum quæ hac æquatione exprimitur  $xx + yy = a \sqrt{(xx - yy)}$ , quæque circum axem BG [2a] constituta formam refert jacentis notæ octonarii  $\infty$ , seu complicatæ in nodum fasciæ, sive lemnisci, *d'un nœud de ruban* Gallis. Hujus enim, tum altera medietas, curvæ Elasticæ ARφ, tum super nodo A intervallo indeterminatæ AE abscissa medietatis portio minor, minori AQ, major

(\*) Sit  $AE = u$ ,  $Ag = uu : a$ ,  $f(a^3 du : \sqrt{(a^4 - u^4)}) = AO$ : consequenter  $AP = f(aadu : \sqrt{(a^4 - u^4)})$   
 $gl = \sqrt{(aa - u^4 : aa)} = \frac{1}{a} \sqrt{(a^4 - u^4)}$ ;  $= [N^o. præc. Not. d] = \sqrt{at}$  seu  
 & cum sit  $gl : Al = Ai : iu$ , erit  $\sqrt{AB \cdot Aa}$ . Igitur  $Aa = AP^2 : AB$ ,  
 $iu = a^3 : \sqrt{(a^4 - u^4)} = EN$ . Atque ideo mixtilineum AEN =



No. LX. major majori Elasticæ portioni  $\phi RQ$  æquatur. Unde quoque ratio constat, illam ad propositi Problematis constructionem adhibendi (\*).

Cæterum, sicut infinitæ linearum mechanicarum a curvæ circularis aut parabolicæ rectificatione, seu logarithmicæ descriptione dependent; ita præter curvam accessus & recessus infinitarum aliarum, & partim etiam ipsius Elasticæ constructio [ut infra apparebit] a rectificatione memoratæ algebraicæ quatuor dimensionum derivatur. Et ausim asseverare in materia constructionis mecha-

(\*) Ostensum est N°. præc. Not. (d) constructionem curvæ quæsitæ pendere ab integratione quantitatis  $aadu: \sqrt{(a^4 - u^4)}$ . Hæc, ut reducatur ad rectificationem curvæ algebraicæ, considerata est quasi elementum curvæ, ejusque quadratum dividendum, si potest fieri, in duo alia quadrata, quorum radices sint integrabiles; ut integralia exprimant coordinatas curvæ algebraicæ. Commode autem accidit quadratum  $a^4 du^2: (a^4 - u^4)$  dividi posse in duo  $(a^4 - 4aauu + 4u^4) du^2: (2a^4 - 2aauu)$ , &  $(a^4 + 4aauu + 4u^4) du^2: (2a^4 + 2aauu)$  quæ simul juncta efficiunt  $a^4 du^2: (a^4 - u^4)$ , quorumque radices  $(aa - 2uu) du: \sqrt{(2a^4 - 2aauu)}$ , &  $(aa + 2uu) du: \sqrt{(2a^4 + 2aauu)}$  possunt integrari. Sunt enim harum integralia, seu coordinatæ Curvæ,  $u\sqrt{(aa - uu)}: a\sqrt{2} = y$  quæ dicatur  $y$ , &  $u\sqrt{(aa + uu)}: a\sqrt{2}$ , quæ vocetur  $x$ . Nunc, ut habeatur æquatio inter coordinatas; ope istarum  $u\sqrt{(aa - uu)}: a\sqrt{2} = y$  &  $u\sqrt{(aa + uu)}: a\sqrt{2} = x$ , eliminetur  $u$ , primum eas quadrando,  $aa uu - u^4 = 2aa yy$ , &  $aa uu + u^4 = 2aa xx$

atque addendo,  $2aa uu = 2aa yy + 2aa xx$  sive  $uu = yy + xx$ ; quo patet  $u$  designare subtensam Curvæ ab origine  $A$  exeuntem: Deinde pro  $uu$  substituendo valorem ejus, in æquatione  $aa uu + u^4 = 2aa xx$ , ea sic reducitur ad  $aa (xx + yy) + (xx + yy)^2 = 2aa xx$ , vel transponendo  $(xx + yy)^2 = aaxx - aayy$ , aut radicem extrahendo  $xx + yy = a\sqrt{(xx - yy)}$ , quæ ipsa est Lemniscatæ æquatio; cujus itaque constat arcum, quem subtendit recta  $AE = u$ , æqualem esse quantitati  $af(aadu: \sqrt{(a^4 - u^4)})$ , quæ etiam exprimit arcum  $AQ$ , vel  $\phi RQ$  Elasticæ. Igitur Lemniscata potuit pro Elasticæ adhiberi ad constructionem Isochronæ, hoc solum discrimine quod recta  $AE$ , quæ istius erat absissa, illius esse debeat subtendens. Vide omnino Num. CIII. Art. 2. Cæterum dedit Joh. BERNOLLI *Act. Erud.* 1724, Aug. pag. 356, elegantissimam regulam pro reducendis quadraturis quibuscunque ad rectificationes curvarum algebraicarum.

mechanicarum, hanc inter cæteras immediate sequi præcedentes; No. LX. adeo ut constructio, quæ per nullam priorum succedit, proxime vel per hujus curvæ, aut per lineæ hyperbolicæ aut ellipticæ, aut duarum simul rectificationem tentanda sit. Cujus rei ratio est, quod post differentialium formulas,  $aadz: \sqrt{(aa-zz)}$ ,  $zzdz: \sqrt{(aa-zz)}$ ,  $aadz: \sqrt{(aa+zz)}$ ,  $zzdz: \sqrt{(zz-aa)}$ , quæ ope quadraturæ circuli & hyperbolæ integrantur, simplicissimæ fere videantur hæ expressiones,  $zzdz: \sqrt{(z^4-a^4)}$ ,  $aadz: \sqrt{(z^4-a^4)}$ ,  $aadz: \sqrt{(a^4-z^4)}$ ,  $zzdz: \sqrt{(a^4-z^4)}$ , & similes; quarum prima, mediante lineæ hyperbolicæ, secunda & tertia curvæ nostræ lemniscatæ, quarta ejusdem & ellipticæ rectificatione integrantur. Etenim si indeterminata  $z$  applicetur ad hyperbolam æquilateram [cujus axis transversus est  $2a$ ] ex ipsius centro, satisfaciet arcus vertici & applicatæ interceptus pro prima formula (\*). Et si eadem  $z$  [aut tertia proportionalis ad  $z$  &  $a$ , ubi  $z$  major quam  $a$ ] ex nodo subtendatur curvæ lemniscatæ, inserviet subtensus arcus pro duabus mediis (d). Et si denique ex centro ellipsis [cujus axis minor est  $2a$ , major  $2a\sqrt{2}$ ] ipsa  $z$  abscindatur in minore & per sectionis terminum recta agatur majori parallela, designabit intercepta parallelis portio ellipticæ, truncata respondente portione curvæ lemniscatæ, inte-

(\*) Per eandem analysin, qua usi sumus Nota præc. decomponatur quadratum  $z^4dz^2: (z^4-a^4)$ , in alia duo  $zzdz^2: (2zz-2aa) + zzdz^2: (2zz+2aa)$ , quorum radices  $zdz: \sqrt{(2zz-2aa)}$  &  $zdz: \sqrt{(2zz+2aa)}$  erunt coordinatarum  $y$  &  $x$  elementa, ipsarumque integralia  $\sqrt{(\frac{1}{2}zz - \frac{1}{2}aa)}$  &  $\sqrt{(\frac{1}{2}zz + \frac{1}{2}aa)}$  coordinatæ  $y$ ,  $x$ . Igitur quadrando ac duplicando  $zz-aa=2yy$ , &  $zz+aa=2xx$ , atque addendo  $2zz=2xx+2yy$ , vel  $zz=xx+yy$ ; [unde patet  $z$  esse curvæ subten-

dentem;] vel subtrahendo  $2aa=2xx-2yy$ , vel  $yy=xx-aa$ ; quæ est æquatio ad hyperbolam æquilateram. Vide rursus Num. CIII. Art. 2.

(d) Ostensum est Nota (b), Arcum Lemniscatæ, cujus parameter  $a$ , subtensa  $u$ , æqualem esse  $f(aadu: \sqrt{(a^4-u^4)})$ . Quare si  $u=z$ , erit dictus arcus  $=f(aadz: \sqrt{(a^4-z^4)})$ . Si vero  $u=aa:z$ , erit dictus arcus  $=-f(aadz: \sqrt{(z^4-a^4)})$ .

No. LX. integrale quartæ formulæ  $z z dz : \sqrt{(a^4 - z^4)} (*)$ : Unde cum eadem, in citata Fig. 3, existente  $AE = z$ , elementum denotet applicatæ AP vel EQ in elastica (f), patet hanc applicatam æquari differentiæ duarum portionum curvæ ellipticæ & lemniscatæ; ideoque manifestum, quomodo Elastica per rectificationem utriusque confici possit. Et quoniam Lemniscatæ portio, ut supra monui, Elasticæ portioni AQ adæquatur, liquet etiam, ellipticam ipsam adæquari aggregato  $AQ + AP$ ; quæ non inelegans harum Curvarum proprietas existit.

(c) Est enim  $f(z z dz : \sqrt{(a^4 - z^4)}) = f((aa + zz) dz : \sqrt{(a^4 - z^4)}) - f(a a dz : \sqrt{(a^4 - z^4)})$ . Hic autem ultimus terminus  $a a dz : \sqrt{(a^4 - z^4)}$  est arcus lemniscatæ, cujus subtenfa  $= z$ . Et  $f((aa + zz) dz : \sqrt{(a^4 - z^4)}) = f(dz \sqrt{(aa + zz)} : \sqrt{(aa - zz)})$  æqualis arcui ellipsis. Notum enim est, si  $a$  &  $c$  sint ellipsis semi-axes, abscissa  $z$ , arcum esse  $= f(dz \sqrt{(aa - zz + cczz : aa)} : \sqrt{(aa - zz)})$ . Fiat igitur  $-zz + cczz : aa = zz$ , aut  $cc = 2aa$ , vel  $c = a\sqrt{2}$ , & patet arcum ellipsis, cujus axes sunt  $2a$  &  $2c = 2a\sqrt{2}$ , respondentem abscissæ  $z$  [posita origine earum in centro] esse  $= f(dz \sqrt{(aa + zz)} : \sqrt{(aa - zz)})$ . Igitur  $f(z z dz : \sqrt{(a^4 - z^4)}) =$

$— z^4) =$  arcui ellipsis  $[f(dz \sqrt{(aa + zz)} : \sqrt{(aa - zz)})]$  minus arcu lemniscatæ  $[f(a a dz : \sqrt{(a^4 - z^4)})]$ . Vide iterum Num. CIII. Art. 2.

Cæterum quantitas  $z^m dz : \sqrt{(a^4 \pm z^4)}$  integrari potest, absolute, quotiescunque  $m$  est numerus ex serie imparium [affirmativorum aut negativorum] alternatim excerptus  $\pm 3, \pm 7, \pm 11, \pm 15, \&c.$  Integrabitur autem, concessa circuli vel hyperbolæ quadratura, ubi  $m = \pm 1$ , vel  $\pm 5$ , vel  $\pm 9$ , &c.

(\*) N°. LVIII, pag. 592, vel Nota (a) pag. 591.

N°. LXI.

G. G. L. \*

NOVA

CALCULI DIFFERENTIALIS  
APPLICATIO,*Et usus ad multiplicem linearum constructionem  
ex data tangentium conditione.*

**M** Emini jam a me insinuatum in his *Actis*, ut rectarum ordinatim sumptarum concursu hætenus noto, ita & concursu curvarum lineas formari. Sed placet rem non parvi ad Geometriam augendam momenti exponere distinctius; nam ne in rectis quidem concurrentibus, tota ejus vis fuit perspecta. In genere igitur hoc Problema ad communis Geometriæ leges revocare hic docebo: *Lineis* [ rectis vel curvis ] *propositam tangentibus, positione ordinatim datis, invenire propositam*; vel quod eodem redit; *Invenire lineam, quæ infinitas lineas ordinatim positione datas tangit*. Cujus usus cum latissime pateat, calculum in eam rem peculiarem jamdudum excogitavi, vel potius huc peculiari ratione applicui nostrum differentialem, compendio non contemnendo. Scilicet quemadmodum CARTESIUS, loca Veterum calculo exprimens, æquationes adhibuit quæ cuivis curvæ puncto conveniunt; ita nos æquationes hic adhibemus infinities ampliores, quæ cuilibet puncto cujuslibet curvæ in serie ordinatim sumptarum curvarum comprehensæ, accommodantur. Itaque  $x$  &  $y$  abscissa quidem & ordinata, seu coordinatæ, esse intelliguntur cujusvis ex dictis curvis, sed speciatim tamen accipiuntur de curva ex ipsarum concursu formata, seu ipsas tangente; utili quodam æquivocationis characterislicæ genere. Coefficientes  $a, b, c$ , in æquatione cum ipsis  $x$  &  $y$  usurpatæ, significant quantitates in

*Acta Erud.*  
*Lips. 1694.*  
*Jul. p. 311.*

I i i i 2

eadem

\* *Gothofredi Guilielmi LEIBNITII.*

No. LXI. eadem curva constantes, alias quidem *insitas* [nempe parametros,] alias vero *extraneas*, quæ situm curvæ [adeoque verticis axisque] definiunt. Sed comparando curvas seriei inter se, seu transitum de curva in curvam considerando, aliæ coefficientes sunt *constantissima*, seu *permanentes*, [quæ manent non tantum in una, sed & in omnibus seriei curvis,] aliæ sunt *variabiles*. Et quidem ut *seriei curvarum* lex data sit, necesse est unicam tantum in coefficientibus superesse variabilitatem, adeoque si in *primaria* pro omnibus curvis *æquatione*, naturam earum communem explicante, plures extent variabiles, necesse est dari alias *æquationes accessorias*, coefficientium variabilium dependentiam inter se exprimentes, quarum ope omnes variabiles ex æquatione primaria tolli possint, præter unam. Cæterum pro concursu duarum linearum proximarum, sua intersectione punctum curvæ quæsitæ [quam & tangere intelliguntur,] determinantium, manifestum est, concurrentes quidem, adeoque lineam ex concursu formatam tangentes, esse geminas; intersectionis autem seu concursus punctum esse unicum, adeoque & ordinatam ei respondentem unicam esse: cum alioqui in investigatione solita linearum propositam tangentium, rectarum vel curvarum [velut circulorum, parabolarum &c.] ex datæ curvæ ordinatis quærendarum, ordinatæ geminæ, tangentes unicæ concipiantur. Itaque quoad præsentem calculum, quo ipsæ ex tangentibus rectis vel curvis positione datis investigantur ordinatæ, [contra] quam in communi] manent ordinatæ  $x$  &  $y$  in hoc transitu [a proximo ad proximum] invariatae, adeoque sunt indifferentiabiles; at coefficientes [quæ in communi calculo indifferentiabiles censentur, quia constantes,] quatenus hic variabiles sunt, differentiantur. Notabile est autem, si omnes insitæ coefficientes sint permanentes, curvæque adeo ordinatim concurrentes sint congruæ inter se; perinde fore, ac si intelligantur esse vestigia ejusdem lineæ motæ, curvaque eorum concursu formata lineam motam perpetuo durante motu tanget. Unde in hoc casu oritur connexio quædam cum generatione *Trochoeidum*; nam & basis, super qua volvitur generatrix *Trochoeidis*, generatricem durante motu tangit.

Calculus autem ita instituetur: Assumatur aliquis angulus rectus fixus, ejus crura utcumque producta constituere intelligantur duos axes relationis curvarum, seu axem cum axe conjugato; in quos demissæ normales ex puncto curvæ quocumque erunt ordinata,  $x$ , & ordinata conjugata, seu abscissa,  $y$ ; uno verbo, *coordinata*,  $x$  &  $y$ ; quarum relationem ex datis quærendo habebitur *æquatio* [1], quam paulo ante appellavimus *primariam*, cum sit cuilibet cujuslibet curvarum ordinatim sumptarum puncto communis. Quod si æquationi [1] insunt plures coefficientes variabiles, ut  $b$ ,  $c$ , dabitur earum dependentia per secundariam æquationem [2], unam vel plures; atque ita ex æquatione [1] tollendo coef-

ficient;

ficientes variables, præter unam  $b$ , prodibit æquatio [3]. Hanc æquationem differentiendo, ut prodeat æquatio [4], cum in ea sola affutura sit differentialis ipsius  $b$ , evanescet differentialitas, adeoque habemus æquationem [4] ordinariam, cujus ope ex æquatione [3] tollendo variabilem residuam  $b$ , habebitur æquatio [5], in qua præter  $x$  &  $y$  tantum supererunt coefficientes invariables [ut  $a$ ], quæ erit æquatio ad curvam quæsitam concursu seriei linearum formatam, adeoque *ad seriei linearum tangentem communem*.

Sed & aliter institui potest calculus, prout facilitas invitabit, non tollendo statim variables, sed servando. Nempe datis, æquatione [1] primaria, & æquatione [2] secundaria [una vel pluribus, pro explicanda dependentia coefficientium variabilium inservituris;] differentientur, æquatio [1], ut prodeat [3], & æquatio [2], ut prodeat [4] [una vel plures, si pro æquatione 2 affuerint plures.]. Ita habebimus plures quantitates differentiales, sed tamen habebimus & æquationes sufficientes ad eas tollendas; & quidem modo tolli possint differentiales quantitates usque ad unam, etiam residua ista evanescet per se, & sic prodibit æquatio [5] ordinaria, seu carens quantitate differentiali; quam conjungendo cum æquationibus [1] & [2] tolli poterunt variables omnes, & prodibit æquatio [6] naturam exprimens curvæ quæsitæ, linearum concursu formatæ, quæ erit eadem cum æquatione [5] calculi prioris.

Hac jam methodo solvi possunt innumera Problemata sublimioris Geometriæ, hætenus non habita in potestate, pertinentiaque ad tangentium conversam; ex quibus nonnulla in specimen indicabo, magnæ utique generalitatis. Veluti data relatione inter  $AT$  &  $A\theta$  [Fig. 1] resegmenta axium per curvæ tangentem  $CT$  facta, invenire curvam  $CC$ . Nam rectæ curvam tangentes ordinatim positione dantur, adeoque & curva quæsitæ, quippe quæ earum concursu formatur. Vel si dato puncto axis  $T$ , detur lineæ datæ  $EE$  punctum  $E$ , sic ut juncta  $TE$ , si opus producta, quæsitam curvam  $CC$  tangat, patet ex dictis curvam  $CC$  præscripta hic methodo haberi. Similiter data relatione inter  $AP$  &  $A\pi$ , resegmenta axium facta per curvæ perpendicularem  $PC$ , licet invenire curvam  $CC$ : nam ob rectas  $P\pi$  ordinatim positione datas, etiam datur linea  $FF$  formata per earum concursum; hujus vero evolutione describetur curva  $CC$  quæsitæ. Unde hic quidem infinitæ curvæ satisfaciens dari possunt, omnes scilicet *parallele* inter se, quæ ejusdem lineæ evolutione *condescribuntur*; & data relatione inter  $AP$  &  $A\pi$  dari potest *curva quæsitæ* non tantum satisfaciens, sed & *transiens per punctum datum*. Interim hoc casu curva  $CC$  non semper est ordinaria, quoniam scilicet non ipsamet, sed ipsius per evolutionem generatrix rectarum positione datarum concursu formatur. Certe cum ipsa curva formatur concursu, habetur

liii 3.

deter-



No. LXI. determinata, nec in arbitrio est punctum, per quod transeat; quæ distinctio utilis est in hac doctrina.

Sed exemplum calculi dabimus in Problemate itidem generali, ad aliquam tamen specialem lineam applicato: *Data relatione perpendicularis PC ad proprium ab axe resegmentum AP, invenire lineam CC* [Fig. 2]. Patet enim datis positione punctis P, nempe centris circulorum, & radiis PC datis magnitudine [ob datam relationem ad AP] dari ordinatim circulos lineam CC tangentes, adeoque lineam ipsam circulorum concursu formatam haberi posse, id quod jam verbulo indicaveramus olim in *Actis* 1686, *mensis Junio*, pag. 300, sub schediasmatis finem. Itaque centro P, radio PC magnitudine dato, describatur circulus CF. Ut ergo methodum paulo ante positam hic applicemus: ex puncto circuli quocunque F agantur normales ad crura anguli recti PAH, seu coordinatæ FG, y, & FH, x [quæ in casu concursus duorum circulorum incidunt in CB, CL]. Sit AP, b, & PC, c; fiet ex natura circuli [1]  $xx + yy + bb = 2bx + cc$ , æquatio primaria omnibus nostris circulis & cuique cujusque puncto communis. Quoniam autem datur relatio inter AP & PC, dabitur curva EE, cujus ordinata PE æquetur PC; hæc curva ponatur [exempli gratia] esse parabola, cujus parameter a, & fiat [2]  $ab = cc$ , quæ æquatio secundaria exhibet relationem seu dependentiam inter c & b. Hujus ope tollendo c, ex æquatione 1, fiet [3]  $xx + yy + bb = 2bx + ab$ ; patet autem in æquat. 1, præter coordinatas x & y, adesse coefficientes c, b, a; ex quibus c & b sunt in uno circulo constantes, & c quidem est circulo insita, cum ejus radium designet; b est extranea, quippe situm centri designans; ambæ variatis circulis sunt variabiles; sed a est constantissima, sive permanens, cum non unius tantum circuli omnibus punctis, sed & pro omnibus circulis nostris in æquatione maneat eadem. Reducta jam æquatio 3 ad unam coefficientem variabilem b, differentietur secundum b [solam in ea differentialem] & fiet  $2bdb = 2xdb + adb$ , seu [evanescente db] fit [4]  $b = x + \frac{1}{2}a$ , [qui calculus in casu unius differentialis in effectu coincidit cum methodo vetere de maximis & minimis a FERMATIO proposita, ab HUDDENIO promota, sed quæ tantum est corollarium nostræ.] Jam ope æquat. 4, tollendo residuam coefficientem variabilem b ex æquat. 3, fiet [5]  $ax + \frac{1}{4}aa = yy$  quæ est æquatio ad curvam CC quæsitam. Idque indicio est eam esse parabolam, ipsi datæ AE congruentem, sed paulo tantum aliter sitam; continuata enim CC vertice suo V incidet in axem AP, sed supra datæ AE verticem A, ita ut distantia verticum AV sit communis lateris recti pars quarta. Si alteram calculandi rationem malis, per plures differentiales; resumptæ æquationes 1 & 2 differentientur, & ex 1 fiet [3]  $bdb = xdb + cdc$ , sed ex 2 fiet [4]  $adb = 2cdc$  quarum [3 & 4] ope, tollendo dc, evanescet simul & db, & fiet [5]



[5]  $b = x + \frac{1}{2}a$ , ut paulo ante. Uade jam per 1, 2, 5, tollendo  $c$  No. LXI. &  $b$  coefficientes variables; prodibit [6]  $ax + \frac{1}{2}aa = yy$ , pro æquatione lineæ quæsitæ, ut ante.

Atque ita docuimus, data relatione perpendicularis PC ad proprium ex axe resegmentum AP, exhibere lineam CC, quia ordinatim dantur circuli lineam tangentes. Sed data relatione rectæ tangentis TC ad proprium ex axe resegmentum AT [ seu circulis normalibus ad lineam ordinatim datis ] invenire lineam CC, alterius est methodi; & *constructione tractoria* talis linea haberi potest, a nobis in his *Actis Sept. anni superioris* explicata \*. Hujus autem præsentis methodi nostræ maximus præterea est usus ad complura alia Problemata Geometriæ superioris, aut etiam ad mechanica vel physica applicatæ. Cum enim id agitur, ut figura formetur, in quovis puncto dato suæ lineæ terminantis præstans aliquid desideratum, persæpè consequimur quæsitam formando ipsam concursu linearum, quarum quævis in aliquo puncto satisfacit, ipsomet scilicet puncto concursus. Hac ratione jam olim in *Schediasmate de Lineis Opticis* inveni modum lineas exhibendi, quæ radios ordinatim positione datos, seu a datæ figuræ speculo venientes, reddant convergentes, aut divergentes, aut parallelos. Formatur enim talis linea ellipsium concursu, si radii debeant fieri convergentes; eademque methodus valet, si reddendi sint paralleli aut divergentes.

## P. S.

Solutionem suam Problematis *Bernoulliani*, mense nupero Maio, una cum objectione Anonymi *Actis Eruditorum* insertam, D. *Marchio Hospitalius* Auctor defendere non distulit, ostenditque, ut intellexi, Anonymum, si calculum suum ad finem perduxisset, ipsummet solutionis datæ successum fuisse deprehensurum. Cæterum Anonymus ille aliam solutionem non dedit, neque id secundum Analysin vulgarem facile præstari potest. Nostra autem nova, adeoque & Dni. *Marchionis* ac *Domino- rum BERNOLLIORUM* methodus, non hoc tantum, sed &, quemadmodum jam mense Julio 1693, in *Actis* pag. 313, est admonitum, innumera similia solvit, sive absolute pro re nata, sive per quadraturas. Et generale Problema sic concipi potest: *Data ratione inter duas Functiones invenire lineam.* Data ratio intelligitur, quæ est inter duas datas, velut  $m$  &  $n$ . *Functionem* voco portionem rectæ, quæ ductis ope sola puncti fixi & puncti curvæ cum curvedine sua dati rectis, abscinditur.

Tales

\* Vide constructionem *Bernoullianam* N°. LVII, & N°. CIII. Art. 19.

No. LXI. Tales sunt: [ Fig. 1 ] Abscissa AB vel  $A\beta$ , ordinata BC vel  $\beta C$ ; tangens CT vel  $C\theta$ ; perpendicularis CP vel  $C\omega$ ; subtangentialis BT vel  $\beta\theta$ ; subperpendicularis BP vel  $\beta\omega$ ; per tangentem resecta AT vel  $A\theta$ ; per perpendicularem resecta AP vel  $A\omega$ ; corresecta PT vel  $\omega\theta$ ; radius osculi seu curvedinis CF; & aliae innumeræ.



Nº. LXII.

# JACOBI BERNOULLI DE METHODO

## TANGENTIUM INVERSA,

*Quousque tum in communis, tum in reconditio-  
ris Geometriæ potestate sit & non sit.*

*Conferenda cum Schediasmate Leibnitiano*

*Mensis Julii, 1694.*

AB. Erud.  
Lipsf. 1694.  
Oß. p. 391.

**E**legantia sunt, quæ hic dedit Vir Eximius de Applicatione Calculi differentialis ad partem Methodi Tangentium inversæ, quæ consistit in constructionibus curvarum ex data relatione duarum *Functionum*, quas appellat, ad se invicem. Et cum ad profectum scientiæ conducat nosse, quousque hæc etiam per vulgarem Geometriam possint effici; observandum est, quod quotiescunque Functiones illæ, quas inter ratio data, hoc est, algebraica supponitur, tales sunt, ut curvam necessario possint algebraicam [quod fit, ubi rectæ curvæ qualitatam tangentes ordinatim positione dantur, ut cum ex data relatione inter  
reseg-

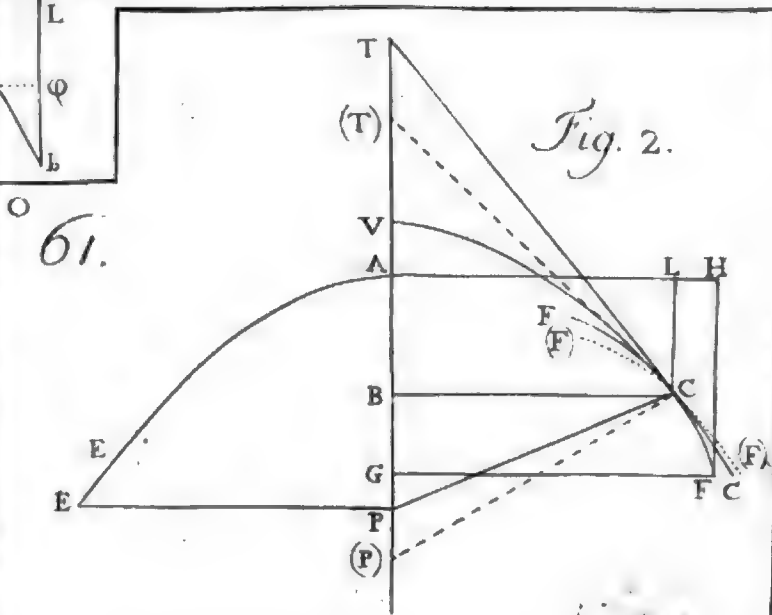
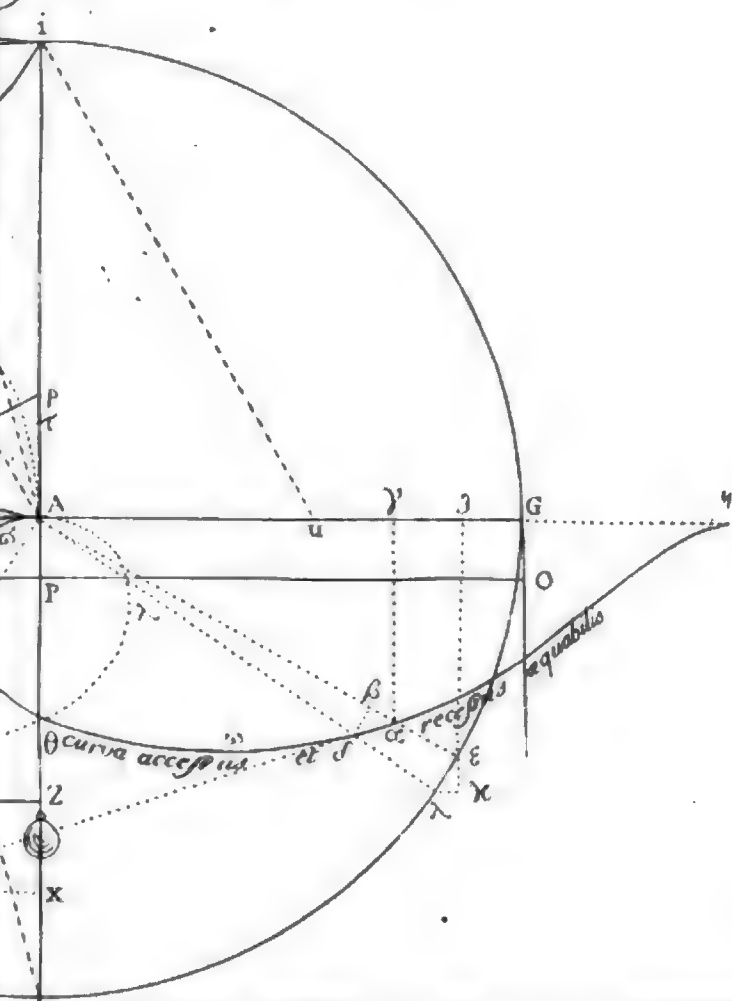
resegmenta axium AT & Aθ, [Fig. 3.]  
 res CP & resegmentum AP, quaritur  
 que semper in potestate communis  
 non opus sit differentialium calculo  
 quas data ratio non semper algebraica  
 in ipso exemplo Celeberrimi Auctoris  
 veniunda Curva CC, cujus perpendicular  
 ab axe AP habeat relationem datam  
 coordinatæ Parabolæ AE, hoc est,  
 terminum AP,] ut PC sit æqualis  
 & (P) radiis perpendicularium PC  
 intersecantes sese citra curvam in F,  
 (PC), hoc est, PF, (P) F, sit  
 (PE), æquales; unde & reciproce,  
 puncto F, [hoc est, datis A (B), (B)  
 satisfaciens rectæ FP, F (P) ad  
 propiores futuræ sibi & perpendiculari  
 curvæ propius assumptum fuerit; adeo  
 accepto [rectis AB, BF, coordinatis  
 PC, PF in unam perpendicularem PC  
 in unum P coalitura sint, ipsaque æqu  
 duos æquales valores acquisitura: un  
 consequendi constat. Nempe positis  
 $AP = b$ ,  $PF = c = \sqrt{ab} = PE$ ,  
 $2bx + xx + yy = ab$ , operatio sic se

$$\begin{array}{rcl}
 bb - 2bx + xx + yy & = & ab \\
 \frac{bb - 2bx}{2} & = & \frac{ab - yy}{2} \\
 \text{seu } b - x & = & \frac{ab - yy}{2} \\
 \text{siue } b & = & x + \frac{1}{2}a
 \end{array}$$

quare  $x + \frac{1}{2}a = \sqrt{(xx + yy)}$ , hoc  
 quatio pro curva quæsitæ, eadem cum  
 cum *Frater* olim e Galliis redux ipsi  
 cile quippiam ibi habitum, mihi prop  
*Jac. Bernoulli Opera.*

N<sup>o</sup> 58. 59. & 60.

Fig. 3.



61.

**No. LXII.** nem generalem e vestigio hanc dedisse. Super curvæ AE [cujus ordinatæ AP, PE, relationem datam exhibent] subtangentiali PD, ceu diametro, describatur semicirculus PCD, in qua adaptetur  $PC = PE$ , erit C punctum in optata curva CC, eique perpendicularis adaptata PC (\*). Similiter etiam data relatione inter resegmenta axium per tangentem AT, Aθ, [hoc est, data curva AQ, cujus in T applicata TQ sit æqualis Aθ] Curva CC generali constructione reperitur, ut ne calculo quidem opus sit: Ducta enim tangente datæ curvæ QR, reperiatur ad AR & AT tertia proportionalis AB, abscindenda in axe ad partes R, occurretque erecta super ipso perpendicularis BC positione datæ tangenti Tθ in puncto quæsitæ curvæ C (†): ubi commodum recorder *Fraterni Problematis in Januario 1692*, pag. 33. inserti (\*), quod nostri tantum specialis casus est, in quo curva, cujus coordinatæ datam relationem exhibent, circulus existit super axium conjugatorum concursu descriptus; unde facillima constructio emergit, quæ fit, abscindendo tantum [vide Figuram 4, ibidem] in subtensa anguli recti ED partem EB vel DB, quæ sit tertia proportionalis ad ED & crus illi oppositum FD vel FE. Non secus vero etiam, datis positione curvis Lineam

(\*) Sit F curvæ quæsitæ punctum, FT tangens ejus, F(P) perpendicularis, & ductis PO, EN parallelis ipsis FT, AP, erit (P)T: (P)F = (P)P:(PO = EN):(E)N [nam ob (P)F = (P)(E) & PF = PE est etiam (P)O = (P)F - FP = (P)(E) - PE = N(E)] = (P)D: (P)(E) vel (P)F. Igitur (P)T = (P)D. Quamobrem tangens FT terminus est in D. Descripto itaque super PD semicirculo, est punctum F in ejus peripheria; applicetur ideo perpendicularis PF = PE, & habebitur punctum F.

(†) Sit C(θ)(T) tangens vi-

cinissima tangenti CθT, & ducantur ordinata (T)(Q) = Aθ, atque QM, θt ipsi AT parallelæ, cumque sit TQ = Aθ & (T)(Q) = A(θ) erit M(Q) = θ(θ). Jam vero est AB:BT = Cθ:CT = θt: T(T) = θt: θ(θ) + θ(θ): T(T) = AT: Aθ vel QT + M(Q): MQ = AT: QT + QT: TR = AT: TR; Ergo dividendo est AB: AT = AT: AR. AB igitur est tertia proportionalis ad AR, AT.

(\*) Supra No. XLVI. pag. 470.

Applicatio autem præsentis constructionis ad casum illum nihil habet difficultatis.

neam quæsitam tangentibus, ipsa communis Geometriæ ope re- No.LXII.  
peritur. Sic aliquando solvi vulgari methodo *Problema Ballisti-*  
*cum* de definienda Curva quam tangant omnes parabolæ, a glo-  
bo in singulis mortarii elevationibus constante vi explosæ, des-  
criptæ. Sic etiam reperio lineam, quæ tangat seriem paraboloi-  
dum ejusdem gradus, circa eundem axem constitutorum, at  
vertices diversos, parametrumque intervallo verticis & extremi-  
tati axis æqualem habentium, perpetuo rectam esse (\*). Porro,  
quo pacto, communis Geometriæ beneficio, ex data duarum  
Functionum relatione, tertia sit elicienda, & speciatim ex data  
relatione coordinatarum, id est, ex ipsa data curva, radius os-  
culi, [supponendo in æquatione duas vel tres radices æquales,  
prout osculum spectatur ut concursus, vel duorum radiorum cir-  
culorum tangentium inæqualium, vel trium radiorum unius se-  
cantis circuli,] id jam in *Additamento citato Problemati Mensis*  
*Januarii 1692*, pagina 34 \*, & in *Lucubrationibus Mensis Mar-*  
*tii, 1692* †, & *Junii 1693*, de *Natura osculorum* ††, abunde  
ostendimus: idemque etiam per præcedentem constructionem  
potest effici. Cum enim detur curva, punctumque in ea, per  
hypothesein, adeoque subperpendicularis, adeoque positione ra-  
dius osculi, isque extremitate sua tangat curvam evolutam, da-  
buntur quoque resegmenta axium conjugatorum per hunc ra-  
dium. Ergo per præcedentem dabitur Evoluta. Ergo & radius  
osculi dabitur longitudine. Quomodo vero ex data coordinata-  
rum una & radio osculi, ipsa vicissim curva indaganda sit, hoc  
quidem communis Geometriæ vires transcendit; nec enim dan-  
tur positione osculantes circuli. Dependet autem Problema a  
*constructionibus Elasticarum*: Descripta namque curva, cujus ap-  
plicata reciproce proportionetur radio osculi, si ad ipsam, ceu ad  
Lineam Tensionum, construatur Elastica, erit hæc quæsitæ, ut

K k k k 2

ex

(\*) Vide Num. LXVII, Nota  
VII, & *Analysim inf. parvorum*, Sect.  
VIII, Art. 146, atque Sect. IX,  
Art. ult. [209].

\* Supra pag. 471.

† Supra N°. XLVII, pag. 473.  
seq.

†† Supra N°. LVI, pag. 559. seq.

**Nº. LXII.** ex nuperis *Mense Junio 1694* publicatis colligere est \*. Sed tandem illud in genere tenendum ( quod initio innui ) omnia Problemata, quibus promiscue algebraicæ & transcendentes Curvæ satisfaciunt, Geometriæ reconditori propria esse, frustra que tentari per communem: eorum vero alia construi per simplices *quadraturas* aut *rectificationes*; alia per *inflexiones Elaterum*, ut præcedens; alia saltem per *tractiones*, ut cum quærenda proponitur curva, ex data relatione rectæ tangentis ad proprium ex axe resegmentum; cujus constructionem in casu relationis constantis ( qualem *Frater* proposuerat ) An. 1693, *Mense Junio* \*\* dedimus, facile tamen accommodandam ad casum cujusvis relationis datæ variabilis, modo loco rectæ, super qua fili describentis extremitas protruditur, substituatur Curva cujus ordinata æquetur excessui fili supra tangentem datam. Nemo vero hic existimet, omnem Methodum inversam his exhaustam esse, ut potest quæ non debet acquiescere in qualicunque curvarum constructione, sed primario rimari, quot quibusque in casibus sint futuræ algebraicæ, aut secus, ac tum ad cujus gradus quadraturas referantur: quod in modo laudato Problemate *Unus. Marchio HOSPITALIUS* & ego præstitimus. Ad hoc vero præstandum requiritur, ut in æquatione litteræ indeterminatæ cum suis differentialibus a se mutuo separentur, quod nec semper fieri potest, nec si possit, universali methodo consequi licet: & quemadmodum datis, æquationibus algebraicis quibusvis, multiplicatione ex ipsis composita facile habetur; data vero composita, invenire componentes difficillimum & sæpe impossibile, ut nulla huic negotio universalis regula præscribi possit, particulares vero infinitæ, quarum bonam partem collegit *HUDDENIUS*: itaque quoque Methodus directa tangentium ubique facilis, inversa generalis nulla, ejusque loco tantum particulares dari possunt regulæ, quarum qui plures collegerit, is optime de hac Methodo meruisse censebitur. Ad directam Methodum pertinet hoc Problema, quod.

\* Nº. LVIII, Art. I. §. 7. pag. 583.

\*\* Supra Nº. LVII. pag. 574. Vi: de etiam Num. CIII. Art. 19.



quod tentari potest: *Datis* [Fig. 2] *tribus Curvis algebraicis* G, H, No. LXII. I. & quarta K, quam formant intersectiones rectarum HK, IK, tangentium curvas H & I in iisdem punctis, in quibus tangens curva G ipsas secat, querere tangentem quarta K (f).

(f) Sit [Fig. A] Gbi tangens curvæ G, tangenti GHI proxima, secans curvas H, I, in *b*, & *i*, ex quibus eductæ tangentes *hk*, *ik*, sese mutuo secant in *k*, quod erit punctum curvæ K ipsi K vicinissimum, adeoque K *k* tangens est quæsitæ, quam ponimus occurrere rectæ GH (productæ, si opus est) in L, unde ducatur LT parallela ipsi IK, nec non ad HK normalis LP, istique parallela KN, quam sumere licet pro arcu circuli centro H per K descripti. Demittatur etiam ad IK vel LT perpendicularis KQ, cujus pars perexigua KO haberi potest pro arcu circuli centro I per K descripti. Denique sint R, S, centra circulorum osculantium curvas datas in H, & I, ducanturque radii RH, R*b*, nec non SI, S*i*, atque recta IM ipsi H*b* parallela. Quibus positis, erit HL: II = HT: KT [ob sim. Tr. HLT, H.K] = HT: LT + LT: KT = HK: KI + LP: KQ [ob sim. Tr. rectang. LTP, KTQ] = HK: KI + KN: KO [ob sim. Tr. KLP, K*k*N, & KLQ, K*k*O] = HK: KI + KN: KH + RH: KI + KI: KO = HK<sup>2</sup>: KI<sup>2</sup> + KN: KH + KI: KO = HK<sup>2</sup>: KI<sup>2</sup> + H*b*: HR + IS: I*i* [ob sim. Tr. H*k*N, R*b*H, & IKO, SI*i*] = HK<sup>2</sup>: KI<sup>2</sup> + IS: HR + H*b*: I*i* = HK<sup>2</sup>: KI<sup>2</sup> + IS: HR + H*b*: IM + IM: I*i* = HK<sup>2</sup>: KI<sup>2</sup> + IS: HR + GH: GI + HK: KI [ob sim. Tr. GH*b*, GIM, & IM*i*, IKH, ] = HK<sup>3</sup>: KI<sup>3</sup> + IS: HR + GH: GI. Sunt autem dati hi omnes termini HK, KI, IS, HR, GH, GI: Dantur ideo rationes HK<sup>3</sup>: KI<sup>3</sup>, IS, HR, GH: GI. Datur itaque ratio HL: IL quæ ex illis componitur & dividendo, datur ratio HI: HL. Datur autem HI: quare datur HL, atque ideo punctum L. Sed & datur punctum K. Datur ergo tangens KL.

Id Problema, ratione haud multum dissimili, solutum dedere Viri Celeb. *Job. BERNOULLI Act. Erud. Lips. 1695. Febr. pag. 65, & Marchio HOSPITALIUS, ibid. Jul. pag. 307.*





Nº. LXIII.

# SOLUTIONES PROBLEMATIS HOSPITALIANI

*De Curva æquilibrationis,*

*Auctore J A Ç. BERNOULLIO.*

## P R O B L E M A.

*Acta Erud. Lipf. 1695. Febr. p. 65.* AB vel AC est pons arceſtarius verſatilis circa A : BDH vel CDP funis extremo pontis alligatus, ambiens trochleam D : P, pondus annexum funi & æquilibrium ubique cum ponte conſtituens, ut pons, minima ſuperaccedente vi attolli demittique poſſit :

Quæritur, qua curva hoc liceat conſequi ?

## P R I M A S O L U T I O.

Ductæ intelligantur BK, CR, CF, AE perpendiculares ipſis AB, AC, AD, & CD, & vocentur AB, vel AC,  $a$ ; AD,  $b$ ; BD,  $c$ ; DH,  $f$ ; nec non applicata quæſitæ curvæ QM,  $y$ ; & portio funis SQ,  $z$ ; item pondus P,  $p$ ; & pondus pontis,  $q$ . Quo factò, crit, per principia Statica vulgo nota, Potentia ſuſtinens pontem in K : Potent. ſuſt. in R = AB [AC] : CF; & Pot. in R : Pot. obliq. in D = AE : AC; quare *ex æqual.*

*aqual. perturb.* Pot. in K  $[\frac{1}{2}q]$ . Pot. in D  $\equiv AE:CF \equiv$  [ob N. LXIII. Triang. similia AED & CFD]  $AD:CD \equiv b:c - z$ ; unde Potentia sustinens pontem AC in D  $\equiv (cq - qz):2b$ . Ex altera parte, dum grave P conatur descendere per elementum curvæ PQ, velocitas ejus in perpendicularo est QN, seu  $dy$ , & velocitas potentiae sustinentis grave, QO, seu  $dz$ ; ideoque  $dz:dy \equiv p:\frac{pdy}{dz} \equiv$  Pot. sust. grave P  $\equiv$  [per hyp.] Pot. sust. pontem AC  $\equiv (cq - qz):2b$ , hoc est,  $2bpdz = cqdz - qzdz$ ; integrataque æquatione,  $4bpy = 2cqz - qzz$ .

## 2. Aliter, sine differentialium calculo.

$AC^2 + AD^2 - CD^2 \equiv 2DAF$ , id est,  $aa + bb - cc + 2cz - zz \equiv 2b$  in AF, id est, [ob  $cc = aa + bb$ ]  $AF \equiv (2cz - zz):2b$ . Ergo pondus pontis  $q$  in  $\frac{1}{2}$  AF, five quantitas ascensus perpendicularis centri gravit. ejus  $\equiv (2cqz - qzz):4b$ . Quantitas vero descensus isochroni appositae gravis P est  $py$ ; quare  $py \equiv (2cqz - qzz):4b$ , seu  $4bpy = 2cqz - qzz$ ; ut antea.

*Constr.* Facilis angulis rectis AHI & HIL, sic ut HI æquetur ipsi BD, IL vero sit longitudinis arbitrariæ, modo non excedat alterius semissem; describatur per puncta L & H Parabola LNH, cujus vertex L & axis IL. In hac sumptum sit quodvis punctum N, per quod transeant rectæ NM, NP, parallelæ ipsis HA, HI; factaque HG = HM, centro D, radio DG, arcus describatur GPO secans NP rectam in P. Erit punctum hoc in optata curva HQ. Grave P ei imponendum ad pontis pondus habet rationem compositam ex ratione DB ad duplam AD, & ejusdem DB ad duplam IL. Hinc grave P temper excedere debet semissem ponderis ipsius pontis. Dimidio vero potest minui, si in extremitate pontis C alia intelligatur trochlea, quam funis CD amplectatur. (2)

(2) Animadvertit Cel. Job. BERNOULLI Frater Auctoris curvam optatam

**N. LXIII.** *tatam HQ cycloidalem esse genitam ex rotatione circuli super æqualem circum. Videatur ejus animadversio in solutionem Dni. Marchionis HOSPITALII Ast. Erud. Lips. 1695, Febr. pag. 60. seq. Interim mihi temperare non possum, quin elegantissimam ejus & generalissimam solutionem adjungam. Problema sic generaliter sibi proposuit. Data in plano verticali curva quavis AB [Fig. A], queritur in eodem plano altera curva LM, ita ut duo pondera data B, M, communi funiculo BCM trochleam fixam C ambienti alligata, & curvis ubicunque imposita, semper sibi mutuo æquilibrentur. Illudque ita solvit. „ Pro principio, inquit, assumo notissimum illud axioma staticum; In omni motu gravium æquilibratorum, centrum gravitatis neque ascendit, neque descendit, sed perpetuo manet in eadem altitudine horizontali. Ut hoc ad præsens negotium applicetur, curva quæ sita debet habere propriam talem, ut duo pondera M, B habeant, in quovis situ, semper eundem horizontalem axem æquilibrii denotet, ] fiatque ut pondus datum M ad pondus datum B, ita distantia brevissima IH [quæ data est ob curvam datam AB] ad quartam IP, quæ ad partem contrariam sumenda est, & ducenda parallela PM, quæ secabit arcum centro C & radio CM [differentia funiculi totius & partis datæ CB] descriptum in puncto M, quod erit ad curvam optatam. Hoc enim modo fit, ut centrum gravitatis commune ponderum B & M semper existat in linea horizontali KIE, quæ cum ad arbitrium ducta, ita duci potest, ut curva optata transeat per quodlibet punctum datum, &c.*



**N. LXIV.**



N°. LXIV.

G. G. L. \*

CONSTRUCTIO  
 PROPRIA PROBLEMATIS  
 DE CURVA ISOCHRONA  
 PARACENTRICA.

*Ubi & generaliora quædam de natura & calculo differentiali osculorum,*

*Et de constructione linearum transcendentium, una maxime geometrica, altera mechanica quidem, sed generalissima.*

*Accessit modus reddendi inventiones transcendentium linearum universales, ut quemvis casum comprehendant & transeant per punctum datum.*

**A** Celeberrimo Viro *Jacobo* BERNOULLIO, Matheseos apud *Ba- Acta Erud.*  
*sileenses* Professore, in *Actis mensis Junii* nuperi †, velut invita- *Lips. 1694.*  
*tus*; præsertim circa Problema a me olim, cum nondum nostra calcu- *Aug. p. 364*  
*Jac. Bernoulli Opera.* LIII landi

\* *Gottfriedi Guilielmi* LEIBNITII. † N°. LIX. pag. 601.

N. LXIV. landi methodus frequentari cepisset, propositum, responsionem defugere nolui, tamen & valetudo vacillans & aliæ multiplices causæ excusare me fortasse possent. Et quidem profundius ista meditari non licet, aut demonstrationes introspicere; minime tamen dubito, pro explorato acumine *Viri*, vera attulisse. Quo constituto, libenter agnosco non facile in specialium Problematum solutione apud Geometras pulchriora reperitum iri. Quædam tamen annotabo, quæ mihi primo aspectu sese obtulere, nec novo studio indigebant. Theoremata pro inveniendis radiis circulorum osculantium \* elegantia & utilia sunt; utorque similibus vel expresse, vel potius virtualiter, ipsa calculi nostri natura jubente, quoties generatricem evolutoriam vel oscula quæro lineæ non nisi differentialiter, seu per tangentium proprietatem datæ; tunc enim ut ex duabus incognitis generatricem determinantibus unius [ altera sublata ] valor, per ipsas  $x, y, dx, dy$  lineæ differentialiter datæ, generaliter habeatur, utique veniendum est ad differentio-differentiales; quæ tamen cessant in applicatione, quia  $dy:dx$ , per ordinarias explicatur. Sed & pro centris, non minus ac radius, circulorum osculantium Theoremata generaliora formari possunt, quæ certorum elementorum æqualitate non indigent. Tale hoc est [cujus Corollaria sunt, quæ Vir Clarissimus attulit,] Radius osculi est ad unitatem, ut elementum unius coordinatæ est ad elementum rationis elementorum alterius coordinatæ & curvæ. *Rationem* autem hic fumo pro re homogenea unitati vel numero, quæ oritur ex divisione antecedentis per consequens. Item: Distantia centri osculantis circuli ab ordinata curvæ est ad unitatem, ut tertia proportionalis elementorum abscissæ & curvæ est ad elementum rationis elementorum abscissæ & ordinatæ. Et quod notatu dignum est, possunt hæc indagari sine meditatione figuræ; nempe ex calculo solo a nobis proposito: quærendo scilicet æquationem localem ad rectam curvæ normalem, eamque differentiando secundum quantitates in ea geminatas, methodo a me præscripta in *Actis Aprilis*, 1692, & nuper † illustrata. Nempe sit [Fig. 1] abscissa AB,  $x$ ; ordinata BC,  $y$ ; vel contra; & elementum curvæ sit  $dc$ . Et CP ad curvam perpendicularis axi occurrat in P; sumaturque in ea punctum quodcunque G, unde ad axem normalis GF ducatur. Jam sit AF,  $f$ ; & GF,  $g$ ; fietque [cum signa ita postulabunt]  $g+y$  ad  $f-x$  ut  $dx$  ad  $dy$ , seu fiet  $g+y = (f-x) dx:dy$ , quæ est æquatio localis ad rectam indefinite productam, curvæ normalem. Verum, quia jam duarum hujusmodi rectarum quæritur intersectio, differentianda est hæc æquatio; hoc tantum observato, ut  $g$  &  $f$ , ob commune punctum concursus, considerentur velut coincidentes in utraque recta, adcoque in-

\* N°.LVIII. pag. 578.

† N°. LXI.

differentiabiles. Et fiet  $dy = (f - x) d(dx : dy) - dx dx : dy$ ; seu N. LXIV.  $dc dc : dy$  [ tertia proportionalis ipsis  $dy, dc$  ] est ad  $d(dx : dy)$  [ elementum rationis inter  $dx$  &  $dy$  ] ut  $f - x$  ad unitatem: quod est posterius Theorema ex iis quæ paulo ante adduxi. Quod si rationem inter  $dx$  &  $dy$  vocemus  $r$ , fiet  $dx$  ad  $rdr : (1 + rr)$  [ elementum quoddam pro dicta ratione logarithmicum ] ut distantia a coordinata nempe  $f - x$  est ad unitatem (a). Iisdem positis, radius osculi vocetur  $q$ , fiet  $q dy : dc = f - x$ ; & differentiando fiet  $qd(dy : dc) = -dx$  seu fiet  $q$  ad 1, ut  $-dx$  ad  $d(dy : dc)$  vel  $q$  ad 1, ut  $dy$  ad  $d(dx : dc)$  quod est Theorema prius. Et omnino variari ista possunt infinitis modis, constituique pro usu Problematum; potissima tamen elegantioraque consignari prodest ad scientiæ incrementum. Et latent sane in istis, quæ egregios usus habere possunt.

De *Elastro* in universum quidem dici, opinor, potest: tensionem esse proportionalem vi tendenti. Sed cum in solidi contenti mutatione tensio consistat, non solet tota in longitudinem refundi; ut si fingamus pilas inflatas in lineam positas esse, vicinamque vicinæ nodo quodam alligari, ac totum funem ex illis compositum intendi; manifestum est, funis extensionem in longitudinem non fore proportionalem tensioni aeris inclusi in pilis, seu vi tendenti. Quæ causa etiam est, quod de lamina elastica non, æque ac de catena, certi aliquid constitui potest. Itaque recte *Clarissimus Vir* generalia dedit pro quacunque tensionis lege.

Cum varios modos construendi transcendentes lineas examinasset olim, omnium absolutissimum esse repereram, qui fieret inventione punctorum quocunque per meras quantitates ordinarias seu algebraicas, supposita tantum una quantitate constante transcendente pro punctis omnibus: cum alias perpetuo transcendentibus novis sit opus pro puncto quovis. Et hoc modo usus eram ad catenariæ constructionem. Is igitur valde probatur *Celeberrimo Viro* pagina 271 \*: dolendum tamen censet, quod non sit universalis; etsi enim succedat in his, quæ pendent a logarithmis vel quadratura hyperbolæ, non tamen adhiberi posse, ubi quadratura circuli vel altior alia requiritur. Cum vero mihi secus videatur, omninoque arbitrer pro circuli dimensionem, imo & pro altioribus, simile aliquid fieri posse; ad promotionem scientiæ interest, ut res nonnihil declaretur. Nempe

L III 2

quod

$$\begin{aligned} (a) \text{ Nempe, per mox demonstr. } & 1 = (1 + rr) dy : dr = (1 + rr) r dy : \\ f - x : 1 = \frac{dc^2}{dy} : dr. \text{ Sed } dc^2 : dy & r dr = (1 + rr) dx : r dr \text{ [ est enim } \\ = (dy^2 + dx^2) : dy^2 = dy^2 : dy^2 & r dy = dx ] = dx : \frac{r dr}{1 + rr}. \\ + dy^2 : dx^2 = 1 + rr. \text{ Ergo } dc^2 : & \\ dy = (1 + rr) dy, \text{ \& } (f - x) : & \end{aligned}$$

\* Pag. 591.



**N. LXIV.** quod pro quadratura hyperbolæ præstat sectio rationis, seu inventio mediarum proportionalium, id pro circulari præstat sectio anguli. Itaque loco logarithmicæ adhiberi potest *Linea sinuum* [nostro more explicata] vel *Linea tangentium*, aliaque similis. Nempe sumatur quadrans circuli  $ABCGA$ , [Fig. 2] cujus basis  $BC$  est sinus totus, altitudini  $BA$  utcumque productæ in  $E$ , tanquam axi, ordinatim applicentur sinus recti, hoc modo: Arcus quadrantis bisecetur in  $G$ ; & segmenta  $AG$ ,  $CG$  rursus bisecentur in  $H$  &  $K$ ; & segmenta  $AH$ ,  $HG$ ,  $GK$ ,  $KC$  denuo bisecentur, eodemque modo pergi intelligatur. Porro similiter altitudo  $EB$  bisecetur in  $(G)$ ; &  $E(G)$ ,  $B(G)$  in  $(H)$  &  $(K)$  atque ita porro: tum ipsæ rectæ a punctis sectionum ad axem ductæ, ut  $GL$ ,  $HM$ ,  $KN$  seu sinus angulorum  $GBC$ ,  $HBC$ ,  $KBC$ , [quos cum basi comprehendunt radii a punctis sectionum arcus ad centrum ducti] ordinatim applicentur respondentibus punctis sectionum altitudinis; seu transferantur in  $(G)(L)$ ;  $(H)(M)$ ;  $(K)(N)$ ; & sinus totus  $BC$  in  $B(C)$ ; & linea  $E(M)(L)(N)(C)$  erit linea sinuum. Atque ita, si ordinatæ velut  $(M)(H)$  sint ut sinus angulorum [velut  $ABH$ ], abscissæ  $E(H)$  erunt ut anguli, seu ut arcus, [velut  $AH$ ]. Et, siquidem tota altitudo  $EB$  sit æqualis arcui quadrantis, abscissæ erunt arcubus dicto modo respondentibus æquales. Igitur linea hæc sinuum per puncta describi potest, non minus ac logarithmica. Ipsa autem semel descripta, dataque una sola quantitate constante, quæ est ratio diametri ad circumferentiam; seu data ratione arcus quadrantis  $AGC$ , ad radium  $BC$ ; adeoque data ratione arcus  $AGC$  ad altitudinem  $BE$  [cujus ratio ad  $BC$  pro arbitrio sumpta est], patet, ope lineæ sinuum descriptæ, arcum circuli quemvis dari; adeoque & segmenti cujusque circularis vel sectoris quadraturam. Quemadmodum autem in logarithmica datur unica illa quantitas requisita, si detur figuræ descriptæ tangens; ita in linea sinuum idem est. Nam si ordinatæ sint sinus, & abscissæ sint proportionales arcubus, erunt elementa abscissarum proportionalia arcuum elementis. Jam elementum arcus est ad elementum sinus, ut radius ad sinum complementi. Ergo in figura sinuum dicta, erit elementum abscissæ ad elementum ordinatæ, id est, erit subtangentialis quæcumque  $T(G)$  ad ordinatam  $GL$  seu sinum, in ratione composita radii  $AB$  ad arcum quadrantis  $AGC$ , & altitudinis  $BE$  ad  $BL$  sinum complementi; & ipse arcus quadrantis erit ad radium, ut  $BE$  altitudo lineæ sinuum est ad  $T(G)$  subtangentialem quadraginta quinque graduum sinui respondentem. Porro quemadmodum lineæ transcendentes, id est, æquatione algebraica, seu certi gradus, inexplicabiles, nempe de gradu in gradum transeuntes, describi possunt sectione rationis & anguli; ita manifestum est, innumerabiles alias hujusmodi per puncta constructiones posse excogitari linearum transcendentium, quas ad alias quadraturas, itemque ad tangentium inversam methodum, seu differentialium primi gradus construas.



constructionem profuturas ex dictis intelligi potest. Atque ita ad novum N. LXIV. velut Pelagus meditationum aditus patet, quod rite ingredienti præclara dabit; cum in his vera consistat connexio Analyseos algebraicæ atque transcendentis. Qua occasione noto obiter, quod *Vir Clarissimus* in mei gratiam algebraicas se in posterum vocaturum ait, quas ante geometricas vocaverat, non ita a me accipi, quasi mihi nescio quam in his affectationem imputet; sed quod rationes meas non improbet, quibus inductus statuo, quicquid exactum est geometricum esse, mechanicum vero quod sit appropinquando; nec minus peccasse CARTESIUM hæc Geometria excludendo quæ ipsius Analyti non subijciebantur, quam Veteres CARTE- SIO peccasse erant visi, qui lineas supra rectam & circulum ad mechanicas retulerant.

Nota, quam *Vir Clarissimus* adhibet pagina 271 \*, unde intelligatur, an quadratura figuræ ordinariæ ope logarithmicæ exhiberi possit, quod scilicet res tum demum succedat, cum ordinata figuræ quadrandæ est subtangentialis algebraicæ; non videtur universalis; nec nisi pro illis est, quæ simpliciore ratione per logarithmos construuntur. Nam eo casu, quo hæc nota locum habet, logarithmus ordinatæ ad alteram illam curvam algebraicam dicta subtangentiali præditam, erit æqualis rationi, quam ordinata quadratricis seu summatricis habet ad constantem; scilicet in quadratrice sit ordinata  $y$ , in quadranda  $t$ , in altera algebraica  $v$ ; abscissa utrobique sit  $x$ , & in algebraica ad  $v$  sit subtangentialis  $q$ ; sitque  $ady = tdx$ ; &  $t$  detur per  $x$ , & ob notam præscriptam sit  $q = aa : t$ , erit ex natura subtangentialis  $dx : q = dv : v = tdx : aa = dy : a$ . Ergo  $\log. v = y : a$ . Sit jam in exemplo ad instantiam apto  $t = x + aa : x$ , fiet  $y = xx : 2a + a \log. x$  (\*). Ergo si nota ipsa esset universalis, deberet dari algebraica  $v$ , cujus logarithmus esset  $xx : 2aa + \log. x$  (†); seu logarithmus rationis inter quantitates algebraicas  $v$  &  $x$  (‡) deberet esse quantitas algebraica  $xx : 2aa$  indefinite, in quibuscunque  $v$  vel  $x$ ; quod fieri nequit. Invenire autem, utrum quadratura fieri possit per logarithmicam, vel etiam per dimensiones conicas, alterius est Analyseos, quam a methodo tangentium inversa distinguo. Et quod ad hanc attinet, agnosco me proposuisse, inter alias, viam per æquationem generalem  $a + bx + cy$  &c. ad curvam indefinitam; cujus usum non contemnendum puto, praxi ipsa & speciminibus edoctus. Sed contractionibus quibusdam, aliaque industria opus est.

LIII 3

Ad

\* Pag. 59r.

(\*) Quoniam  $\log. v = y : a$ .

(†) Integrando scil. æquationem  $dy [= tdx : a] = xdx : a + adx : x$

(‡) Nempe  $\log. v - \log. x = xx : 2aa$ .

N. LXIV. Ad seriem quam Professor Clarissimus exhibet pagina 274 \* pro exprimenda quantitate  $y = \int (x dx : \sqrt{1 - x^4})$  perveniri etiam potest simplici expressione potentiae binomii. Nam  $(1 + b)^e = 1 + \frac{e}{1} b + \frac{e(e-1)}{1 \cdot 2} b^2 + \frac{e(e-1)(e-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} b^3$  &c. quod si sit  $= 1 : \sqrt{1 - x^4}$  erit

$e = -1 : 2$  &  $b = -x^4$ , unde explicando seriem  $1 + \frac{e}{1} b$  &c. & proveniens multiplicando per  $x dx$ , habebitur valor ipsius  $dy$ : unde fiet

$$y = \frac{1}{3 \cdot 1} x^3 + \frac{1}{7 \cdot 2 \cdot 1} x^7 + \frac{1 \cdot 3}{11 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2} x^{11} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{15 \cdot 8 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} x^{15} \text{ &c.}$$

Ego sane, compendii causa, utor hoc artificio post NEWTONUM etiam ad series meas, cum unica irrationalis calculum ingreditur; quia sic sublatio ejus evitatur. Quanquam & post exaltationes [prolixius licet] ad idem perveniri possit, methodo a me præscripta.

Venio jam ad Problematis mei solutionem, seu *lineæ* [quam voco] *Isochrone paracentricæ* a me propositæ constructionem, occasione curvæ elasticæ a Viro Clarissimo feliciter inventam, & ipsa ejus evolutione exhibitam; qua me invitare videtur, ut meam quoque solutionem prodam. Fecissem multo ante, si satis vacare liceret his laboribus. Jam enim ante complures annos habui, & quidem paulo post Isochronam simplicem inventam (\*), quando & publice proposui quærendam hanc paracentricam paulo difficiliorem. Sed plerumque viam reperisse contentus, prosecutione abstinere cogor. Adeo ut ad ipsius Catenariæ constructionem vix demum, diu post repertam ejus analysin, me accinckerim; cum scilicet amici urgerent. Apparebit autem, meum processum non tam ab eo, quod feliciter extrinsecus oblatum est, quam ex ipsius rei natura statim per se provenisse. Et quanquam adeo non improbem constructionem datam, ut laudem potius, quippe quæ ad rem difficilem Auctori aditum dedit; nec iis assentiar, qui peccatum dicunt, composito magis modo præstari quod potest simpliciore, [neque enim peccatum est, quod perfectissimum non est,] cum tamen mihi sese obtulerit constructio satis expedita per rectificationem curvæ ordinariæ, hanc velut toto genere simpliciorem illa, quam Vir Clarissimus dedit, paucis designare voluit. Nam ipse curvam quandam construit, quadratura seu dimensione ejus figuræ, cujus ordinata est  $axx : \sqrt{a^4 - x^4}$ . Et hujus quadratricis transcendentis [quam ob usum Elasticam vocat] rursus dimensionem adhibet, ut solvatur Problema quæsitum:

\* Pag. 596.

(\*) Cujus constructionem vide N°. XXXIX. pag. 421.

tum: atque ita curvam a me propositam efficit per solutionem transcendentalem secundi generis. Sed cum curva sit ipsamet nonnisi generis primi, quia tantum ad ejus constructionem requiritur quadratura figuræ cujus ordinata est  $\sqrt{(a^4 - x^4)} : a (f)$ ; ideo lineam quoque quævis algebraicam, cujus rectificatione quæsitum commode præstaretur. Quomodo autem hæc duæ quadraturæ conicis dimensionibus respondeant, alias ostendam. Adest enim peculiaris pro talibus Analysis. Sane si quadranda esset figura ordinarum  $\sqrt{(a^4 + x^4)}$  [quæ signo tantum a dicta differt] per extensionem curvæ hyperbolicæ res præstaretur (\*). Sed nunc ad propriam constructionem Problematis propositi progrediamur.

Quæritur qualis sit [Fig. 3.] linea *Isochrone paracentrica* 1C 2C 3C, in qua moto gravi, quod descendit ex altitudine H, accessus & recessus, respectu centri cujusdam A, seu puncti fixi, sit æquabilis; adeoque elementa distantiarum ab A sint elementis temporum proportionalia. Distantiæ AC repræsentent tempora  $t$ ; ex 1C agatur 1C1 $\theta$ , normalis ad A2C, erunt 1 $\theta$  2C, ut elementa temporum  $dt$ . Arcus curvæ appellentur  $s$ ; elementa eorum,  $ds$ , tanquam elementa spatiorum, quæ grave percurrento absolvit. Sunt autem [ex generalissima motus lege] elementa spatiorum in ratione composita velocitatum & temporis elementorum. Velocitas vocetur  $v$ . Hinc [1]  $ds$  ut  $v dt$ . Distantia inter horizontes punctorum H & A, seu HA, vocetur  $a$ . Porro, ex lege motus gravium, velocitates sunt in duplicata ratione altitudinum HB. Sit AB,  $x$ , & HB erit  $a + x$  [nam varietates signorum pro talibus in ipso litteræ valore comprehendo, nec in calculo moror, cum omnia eodem modo proveniant] fiet [2]  $vv$  ut  $a + x$ , & per 1 & 2 fit  $ds$  ut  $dt \sqrt{(a + x)}$  seu ad implendam legem homogeneorum [3]  $ds = dt \sqrt{(aa + ax)} : a$ . Jam centro A, radio si placet AH, describatur circulus HKM, axem AB secans in K, & AC in M. Et arcus KM [qui vocabitur  $m$ ] repræsentet angulum conversionis rectæ ACM circa A; itaque, 1M 2M, seu  $dm$ , erit ipsius

(f) Pendet enim Isochrone Paracentricæ constructio [Nº. LIX. Not. d, p. 603.] ab integratione hujus quantitatis  $a dx : \sqrt{(a^4 - x^4)}$ , cujus integralis est  $\frac{3}{2aa} \int (dx \sqrt{(a^4 - x^4)}) - \frac{x}{2aa} \sqrt{(a^4 - x^4)}$ . Pendet igitur constructio ab integratione hujus  $dx \sqrt{(a^4 - x^4)}$ .

(g) Quadratura figuræ, cujus ordinata  $= \sqrt{(a^4 + x^4)} : a$ , pendet ma-

nifesto ex dimensione parabolæ cubicæ, cujus scilicet abscissa  $x$ , ordinata  $x^3 : aa$ . Id monitus LEIBNITIUS agnovit, dixitque „sibi visum fuisse, cum ista sub manibus olim haberet, „videre connexionem cum dimensione curvæ hyperbolicæ; sed talia tunc resumere non licere.” Procul dubio memoria lapsus erat Vir Celeberrimus.

N. LXIV. sius arcus circuli, five motus angularis, seu vertiginis, elementum. Itaque fit  $1C1\theta = tdm : a$ . Est autem quadr.  $1C2C$  æquale quadr.  $2C1\theta +$  quadr.  $1\theta1C$ . Ergo [4]  $dcdc = dtdt + ttdm : aa$  [5] = [per æqu. 3]  $dtdt + x dtdt : a$ . Ergo [6]  $dt : t = dm : \sqrt{ax}$ . Ex M ad axem agatur normalis ML, & AL vocetur  $z$ , fiet [7]  $ax = zt$ , nempe ob triangula similia ALM, ABC. Et per 6 & 7 fit [8]  $dt : \sqrt{at} = dm : \sqrt{az}$ . Jam ex proprietate tangentium circuli est [9]  $dm$  ad  $dz$  ut  $a$  ad  $\sqrt{(aa - zz)}$  id est, ut AM ad ML, radius ad sinum anguli KAM. Et ex 8 & 9 fiet [10]  $dt : \sqrt{at} = adz : \sqrt{(a^2z - az^3)}$ . Unde summando.  $2\sqrt{at} = aa f(dz : \sqrt{(a^2z - az^3)}) + b$ ; ubi  $b$  est quantitas constans pro arbitrio assumpta. Id enim licet inter summandum, quoties non vetatur Problematis conditionibus, Quod cum non satis observari videam, monere hoc loco volui, quoniam interest ad solutionum generalitatem. Nam infinitæ satisfaciunt curvæ, iisdem manentibus punctis H & A, sed quæ variari possunt pro variata recta  $b$ , adeo ut curva quæsitæ [quantum iudico] reperiri possit, quæ transeat, per punctum datum (\*). Nunc superest absolvenda quadratura  $f(dz : \sqrt{(a^2z - az^3)})$  id est, [si AN sit media proportionalis inter AL & AK] invenienda est area figuræ, cujus ordinata sit ad AH, ut quadratum ab AH ad rectangulum sub AN & LM.

Hanc quadraturam ita efficiemus: In HK, sumatur LW æqualis ipsi EK diagonali ab AH vel AE, & juncta MW, sumatur Aβ in AK, si opus producta, quæ sit ad AN in duplicata ratione MW ad WL, seu EK. Et ipsis Aβ ordinatim ad angulos rectos applicentur βγ, quæ sint ad LM [respondentes] ut rectangulum NAL ad quadratum ab EK. Et per puncta γ describatur linea Aγ, cujus extensione in rectum habebitur quadratura paulo ante dicta. Nempe triplum rectanguli sub curva Aγ & recta AH, dempto quintuplo dimidii rectanguli sub AN & LM [=  $\frac{1}{2}\sqrt{(a^2z - az^3)}$ ] dabit Figuræ supra dictæ ab A incipiendo sumptæ [cujus ordinatæ sunt reciproce proportionales dictis rectangulis sub AN & LM] aream; quam applicando ad  $a$  prodibit recta  $aa. f(dz : \sqrt{(a^2z - az^3)})$  (1). Hæc

(\*) Vid. Num. LXVI. Art. IV.

(1) Est enim  $EK = LW = a\sqrt{2}$ ,  $MW = \sqrt{(3aa - zz)}$ ,  $AN = \sqrt{az}$ ; adeoque cum fit  $EK^2 : MW^2 = AN^2$ ;  $A\beta$ , erit  $A\beta = \frac{1}{3}\sqrt{az} - \frac{zz}{2aa}\sqrt{az}$ , & cum fit  $EK^2 : NA \times AL = LM^2$ ;  $\beta\gamma$ , erit  $\beta\gamma = \frac{z}{2aa}\sqrt{(a^2z - az^3)}$ . Igitur longitudo curvæ Aγ, vulgari

modo computata, inveniatur =  $f((3a^2 - 5z^2) dz : \sqrt{(a^2z - az^3)})$ , ex cujus triplo in  $a$  [AH] ducto, si subducatur  $\frac{1}{2}\sqrt{(a^2z - az^3)}$ , remanebit  $f(a^2 dz : \sqrt{(a^2z - az^3)})$ , id quod differentiatio manifestat. Sufficiat hæc Synthesis. Analysin enim quid necesse est quærere, post Methodum generalem Bernoullianam, quam citavimus N°. LX, Nota b, in fine pag. 610.

Hæc recta sumatur cum recta constante  $b$ ; [signis tamen, prout casus po- N.LXIV.  
stulant, variatis], provenientis dimidium vocetur  $p$ . Ergo per æqu. 10 fit  
 $\sqrt{at} = p$  seu [11]  $t = pp : a$ . Et cum  $p$  habeatur ex  $z$  &  $a$ , habebitur  
ex illis &  $t$ , seu AC. Ergo &  $x$ , seu AB, per æqu. 7. Cum ergo ex as-  
sumpta AL, seu  $z$ , quacunque habeatur AB magnitudine, adeoque &  
positione, at AC magnitudine; habebitur AC etiam positione, seu dabi-  
tur punctum C. Nam centro A, radio AC magnitudine dato, describatur  
circulus, cui ex B normaliter ad ABeducta occurreret in puncto C, quod  
est in curva Isochrone paracentrica quæsitæ. Delineationes variabunt  
pro casibus, quam in rem &  $b$  assumpta variari debet. Nam quod ar-  
bitratur *Vir Clarissimus* (1), non nisi unam lineam quæsitam dari ad idem  
punctum A, & ad eandem altitudinem H; id rogo, ut denuo expendat:  
mihi enim visum est infinitas haberi posse, ita ut assignari regulariter  
queat, quæ per datum punctum transeat; exceptis punctis horizontalis rectæ  
transeuntis per A. Quin & supra A talis linea intelligi potest. Tantum  
vero ipsius acumini & profundæ harum rerum notitiæ tribuo, ut quod, re-  
rite expensa meisque rationibus consideratis, secunda meditatione statuet,  
plurimum apud me ponderis sit habiturum.

Interim quemadmodum rationem universalem hic aperui per quam so-  
lutiones Problematum differentialium redduntur generales; quæ negle-  
cta, ni fallor, obstitit quo minus *Vir Clarissimus* hic omnes lineas quæ-  
sito satisfaciennes complecteretur: ita dabo modum mechanicum quidem,  
sed tamen ob universalitatem & praxeos commoditatem non contemnen-  
dum, cujus ope *quacunque linea quæsitæ transcendentes differentialiter data*  
*per punctum datum [quando id fieri potest] duci possunt*, idque tam exacte,  
quam quis volet, licet non, ut geometricus supra declaratus exemplo li-  
neæ sinuum per puncta vera, sed tantum per veris proxima incedat. Ha-  
betque hunc usum, ut de linearum possibilitate, forma, & natura, multa  
etiam ante veram solutionem cognoscere possimus. Quin & ad differen-  
tio-differentiales cujuscunque gradus applicari potest. Nempe, in exem-  
plo præsentæ, datum sit punctum 1C, per quod ducenda linea Isochrone  
paracentrica CC, in qua grave lapsum ex altitudine H æquabiliter rece-  
dat a centro A; quæritur punctum aliquod aliud proximum 2C, ita ut  
recta 1C 2C sit latus polygoni, curvæ succedanei? Præter rectam A1M;  
in quam [si opus productam] incidit 1C, ducatur alia, quantum satis  
vicina A2M, ad eas partes ad quas ducere volumus lineam CC, & ad  
A2M agatur ex 1C perpendicularis 1C 10. Et in A10 [si opus producta]  
sumatur ad eas partes, ad quas ducitur linea 1C 2C, recta ipsi AH æqua-  
lis 10 1P; unde perpendiculariter educatur 1P 1Q ad easdem quas dixi  
partes.

Jac. Bernoullii Opera.

M m m m

(1) N°.LIX. Cor.2. p.605. Vide ibi Notam (e) & Num.LXVI.Art.IV.

N. LXIV. partes. Bifecta AB in  $\omega$ , centro  $\omega$ , radio  $\omega H$ , descriptus circuli arcus secet AE, si opus productam, in R; seu brevius quæretur AR media proportionalis inter AH & HB. Denique centro 1C, radio æquali ipsi AR, descriptus arcus circuli secet 1P 1Q in 1Q, & juncta 1C 1Q, secabit ipsam A 2M, si opus productam, in puncto quæsito 2C. Eodemque modo ex puncto 2C quæretur 3C, & ita porro. Et sic habebitur polygonum 1C 2C 3C &c. lineæ quæsitæ succedaneum, seu linea Mechanica Geometricæ vicaria <sup>(m)</sup>; simulque manifeste cognoscimus, possibilem esse geometricam per datum punctum 1C transeuntem, cum sit limes, in quem polygonæ continue advergencia evanescunt. Ita simul & seriem quantitatum ordinariorum habemus transcendentem quæsitæ advergentem.

Quæ ad tangentium conversam de cætero meditati sumus, alio loco, Deo volente, proferemus: multa enim diversissima itinera non sine successu exploravimus, tametsi prosequi satis non vacet. Pro radicibus æquationum omnino dari puto methodum generalem, neque imaginarias moramur. Itaque quod inde colligit Vir Doctissimus \*, hætenus probo, ne miremur, si in Transcendentibus intra paucissimos annos non omne præstitum est quod vellemus; quando in ipsa Analyfi ordinaria, seu algebraica, circa radices æquationum, seu valores incognitarum analyticos, nemo gradum quarto altiore absolvit, nec VIETA, vel CARTESIUS in eo negotio quicquam majorum inventis adjecerunt.

Postremo ne disceptatiunculæ pristinæ inter nos, circa numerum radicum osculationis, monitorumque *Viri Clarissimi* plane obliviscar †. Equidem quod initio scripseram, cum materiam hanc Geometris proponerem, adhuc mihi verum videtur; quando scilicet circulus lineam osculatur, duos contactus, seu quatuor intersectiones in unum abire; adeoque adesse quatuor radices æquales. Interim verum quoque est, si quis modo circulum reperiat lineæ in tribus punctis coeuntibus occurrentem, habere osculantem. Nam quartum punctum eo ipso adest, etsi ejus non fiat mentio. Cujus rei ratio est, quod nunquam circulus lineam ad easdem partes cavam secat in tribus punctis, quin simul secet in quarto. Si vero circulus lineam secet in tribus tantum punctis; oportet in arcum lineæ, in

(<sup>m</sup>) Est enim, [ob parallelas Cθ, PQ]  $CQ : \theta P = CC : 1\theta 2C$  vel  $2\theta 3C$ . Atqui, ex constructione  $CQ = AR =$  mediæ proportionali inter AH & HB  $= \sqrt{(aa + ax)}$ , &  $\theta P = AH = a$ , ac quæ quasi infinite parva sumitur,  $CC = dc$ , nec non  $1\theta 2C$  aut  $2\theta 3C = dt$ . Igitur

analogia supra posita analytice exprimitur sic,  $\sqrt{(aa + ax)} : a = dc : dt$ , unde  $dc = dt \sqrt{(aa + ax)} : a$ , quæ est æquatio 3, pag. 633.

\* N°. LIX. pag. 607. Item N°. LXII. pag. 622.

† N°. LVI. Art. 2. pag. 559.



in punctis interceptum, cadere punctum flexus contrarii. Et tamen ni-N. LXIV. hilominus in ipso puncto flexus possumus pro osculante concipere quatuor intersectionum coincidentiam, seu duos ab eodem latere curvæ contactus circulares, unum ante, alterum post punctum flexus, seu unum in concava, alterum in convexa parte arcus ex duabus partibus hujusmodi compositi; qui contactus continue convergentes tandem in ipso flexu coibunt. Et revera flexus contrarius est punctum extremum commune, in quo duæ lineæ, una concava, altera convexa, [ unam totam constituentes ] se tangunt. Coincidunt ergo duo contactus seu quatuor intersectiones in omni osculo. Sed si de intersectionibus rectæ cum linea quæretur, tria tantum puncta intersectionum coincidentia, vel contactum cum intersectione coeuntem, nempe in ipso puncto flexus, non vero duos contactus, concipere licet (°).

(°) Vide Num. LXVI. Art. 3. sub finem.



N°. LXV.

# EXCERPTA

*Ex Epistola C. H. Z.*

*ad G. G. L. \**

**P** Rincipium, quo usus est *Clarissimus Matheseos Professor* BERNOU-*Ad. Erud. Lips. 1694. Sept. p. 339*  
LIUS, verum puto, & bene adhibitum, quod radii qui curvedi-  
nem metiuntur, sint in ratione contraria virium rem elasticam fle-  
ctentium. Puto tamen non tantum superficiem externam extendi,  
sed & internam contrahi (°). Magnum admodum postulatum est, figu-  
M m m m 2 rarum

\* *Christiani* HUGENII *de Zuy- lichem ad Goth. Gul. LEIBNI- TIUM.*

(°) Vide Num. seq. Art. 1. potis-  
simum autem Num. CII.



No. LXV. rarum curvilinearum quadraturas tanquam datas assumere. Ego me nihil admodum egisse putarem, si Problema aliquod huc tantum reduxissem, excepta tamen Circuli & Hyperbolæ quadratura. Præstat linearum curvarum rectificationes tanquam semper in potestate existentes assumere, quod etiam Tibi probari video.

De reliquo *Clarissimus* BERNOULLIUS videtur mihi tantum [Fig. 1] determinasse figuram, ubi tangentes extremitatum sunt parallelæ, cum arcus Elastici A termini per chordam EF junguntur. Sed si arcus sit ut in B, vel C, vel D, aut extremitates non chorda, sed recta rigida HI jungantur, figuræ determinandæ supersunt (\*). Subtile etiam fatebor inventum consensus inter figuram elasticam & lintei vel veli a liquoris pondere pressi, si modo demonstratum videam (\*). Alioqui cogor sustinere assensum, quia & ipsum Auctorem circa figuram veli sententiam mutasse video, & demonstrare possum, velum ex numero finito rectarum æqualium compositum [ut in Fig. 2] aliam a vento quam a pondere figuram accepturum, cum tamen *Bernoulliana* sententia sit eandem esse velariam cum catenaria; oporteret ergo discrimen evanescere in casu infiniti.

Præstat haud dubie Isochronam tuam Paracentricam construere, ut a Te fieri scribis, rectificatione lineæ ordinariæ, vel saltem talis cujus puncta possint construere, quam per lineæ Elasticæ extensionem, quæ ipsamet nondum est constructa.

Quod ait *Clarissimus* BERNOULLIUS (4) unicam tantum esse paracentricam ut  $A\chi\omega$ , [Fig. 3.] respectu ejusdem puncti, vel centri A, post descensum ex TA, ejus contrarium manifeste video, Tibique assentior dari infinitas, ut  $A\beta\chi$ ,  $A\delta\gamma$ , &c. easque sumo usque ad rectam  $A\omega$  inclusive (\*). Quin imo supersunt adhuc aliæ Curvæ determinandæ, si scilicet æqualiter accedendum sit ad punctum C, linea autem incipiat vel ab A, directe supra C, vel ad latus a D. Quo casu lineæ ut ABC, AEC infinitos facient gyros circa C [Fig. 4].

## G. G. L. ADDITIO.

Puto in *Figura prima* ex *Bernoulliana* determinatione arcus A etiam duci posse determinationem arcuum B, C, D, G, assumendo lineæ partem, aut eam producendo; sed hoc tamen distincte admoneri operæ pretium fuit. Rationi consentaneum est principium determinandæ figuræ Elasticæ,

(\*) Vide Num. seq. Art. II.

(\*) Vide Num. LVIII. Art. III.

Cor. 18. pag. 597. Not. 1.

(4) No. LIX. Cor. 2. pag. 605;

(\*) Vide Num. seq. Art. 4.

Elasticæ, quod vires flectentes sint curvedinibus proportionales; potest-No. LXV, que ad Hypotheseos aptæ modum assumi, tamen non prorsus sit exploratum, quo usque natura eo utatur, cum fingi possint constitutiones corporum, ubi res aliter procedat. Præclara sunt monita de diversis Isochronarum paracentricarum speciebus & constitutionibus; omnes tamen mea constructione comprehenduntur. Et licet ipsam lineam rectam A, visus sum excludere, quia in ea nullus revera fit descensus vel ascensus, quia tamen in ea potest concipi descensus vel ascensus ut infinite parvus, seu evanescens, haberi potest pro limite, seu ultima harum linearum. Problemata curvarum transcendentium ad quadraturas reducere, magna quidem ad solutionem præparatio est; fateor tamen [seposita mea generali constructione tractoria] præstare rem reduci ad linearum jam constructarum reductiones; quod & ego, quoties opus, feci, faciamque.



Nº. LXVI.

# JACOBI BERNOULLI EXPLICATIONES, ANNOTATIONES ET ADDITIONES

*Ad ea quæ in Actis superiorum annorum de Curva Elastica, Isochrone Paracentrica, & Velaria, hinc inde memorata, & partim controversa leguntur; ubi de Linea mediarum directionum, aliisque novis.*

- I. **C**Um ea quæ superioribus annis variis speciminibus meditata exhibui, Prælustribus Geometrarum Duumviris Dno. *Act. Erud. Linc. 1695. Dec. p. 537*  
HUGENIO & Dno. LEIBNITIO digna visa fuerint,  
Mmm 3

N.LXVI. rint, quæ peculiari submitterent examini; ubi nonnulla approbarunt, quædam occultius dicta conjecturis supplerunt, alibi scrupulos invenerunt, alibi etiam dissensum apertum testati sunt; statui secundas meditationes primis superaddere, & quid de singulis mihi videatur, ordine & candide exponere, ut & Celeberrimorum Virorum desiderii satisfaceret, & puriores veritatis scintillæ ex abditis illis naturæ recessibus in dies magis ac magis emicarent. Præmiseram in *Actis* Mensis Junii 1694 \* Solutioni curvæ Elasticæ Theoremata quædam de radiis circulorum osculantium, quæ tum nobis solis & paucis aliis, quibuscum Frater nostra communicaverat, perspecta credebam. Respondit Celeberrimus LEIBNITIUS sequente Augusto \*\*, se jam antea similibus, vel expresse, vel tacite usum fuisse: & vero nemo est, qui nesciat, illum etiam multo majora dedisse, & dare potuisse. At quantum ad hæc Theoremata, fateor me dubitandi rationes habuisse. Sciebam enim, Virum acutissimum a Flexionum contemplatione non plane abstinuisse, cujus & ipse in privatis ad me litteris olim mentionem fecit, & ad quam solutionis meæ significatione jam Mense Junio 1691 † facta invitari potuit. Videbam etiam non modo ipsummet principii a me adhibiti Auctorem fuisse, sed & insuper calculum huic superstructum, [ sola parte excepta, quæ Theorema dictum concernit ] tam simplicem esse, tamque facilem, prout ex analysi quam subjungo palam fiet, ut summe in ipsum fuisset injurius, si credidissem cognovisse Theorema, nec solutionem dedisse. In lamina curvata A Q R S Y V, [ Fig. 1 ] cujus elementum constans sit S Q, vectem concipio fulcro Q innixum, in quo laminæ crassities Q Y brevioris, ipsaque laminæ curvaturæ portio Q A longioris brachii vicem gerat; unde quia brachium brevius Q Y, & pondus longiori appensum Z constanter manent eadem, perspicuum fit, vires tendentes fibram SY [ hoc est in vulgari hypothese ipsam tensionem Yy ] proportionari rectæ QP distantiae fulcri a linea directionis ponderis A P.

Et

\* Supra N°. LVIII. pag. 578.

\*\* N°. LXIV. pag. 628.

† N°. XLII. pag. 451.

Et quoniam, ob similitudinem Triang.  $YyQ$  &  $RQn$ , ubi etiam N.LXVI.  
 $RQ$  longitudo elementi laminæ constans fingitur, dicta  $Yy$  re-  
 ciproce proportionatur ipsi  $Qn$ , quam patet esse radium osculi,  
 sequitur ipsam  $Qn$ , sive  $z$ , quoque reciproce proportionari ipsi  
 $QP$ , seu  $x$ ; adeoque constans quoddam spatium  $\frac{1}{2}aa = xz$ ;  
 hoc est, per Theorema nostrum,  $\frac{1}{2}aa = xdxds : ddy$ , seu  
 $aaddy = 2x dx ds$ , & facta summatione  $aady = x x ds$ ;  
 quadrandoque  $a^4 dy^2 = x^4 ds^2$ , subtrahendo  $(a^4 - x^4) dy^2$   
 $= x^4 ds^2 - x^4 dy^2 = x^4 dx^2$ , ac denique extrahendo radicem  
 $dy \sqrt{(a^4 - x^4)} = x x dx$  seu  $dy = x x dx : \sqrt{(a^4 - x^4)}$ ;  
 quæ ultima est æquatio, e qua constructio mea, & cætera, quæ  
 dedi, fere omnia fluunt; inque cujus investigatione nihil, ut  
 apparet, Geometras morari potuit, nisi forte transitus ab  $xz$  ad  
 $x dx ds : ddy$ , quem proin illos latuisse non absque veri specie  
 concludebam. Sed utcunque sit de novitate hujus Theorematis,  
 de altero certe, quo dixi, radiis osculorum reciprocas rectas axi  
 applicatas spatium quadrabile efficere \*, nemo litem movebit:  
 estque hoc tanto præstantius illo *Barrowiano* de subtangentibus  
 eidem applicatis, quanto osculorum, quam tangentium conside-  
 ratio rarior hucusque extitit. Huic addo nunc, quod explicabo  
 alias †, easdem reciprocas ipsi curvæ in rectam extensæ applicatas  
 perpetuo spatium circulabile efficere; quod non minus memora-  
 bile Theorema est, & sæpe magnum usum habere potest in se-  
 cundis differentiis æquationum ad primas reducendis. At hæc  
 ὡς ἐν παραδείῳ. Radios, qui curvedines metiuntur, esse in ratione  
 contraria virium tendentium [verius tensionum], quod ambo Vi-  
 ri Celeberrimi me pro principio assumpsisse opinantur, ex æqua-  
 tione primo inventa  $\frac{1}{2}aa = xz$  cognoscitur, & est conclusio  
 potius quam principium, prout diserte inter Corollaria reuli,  
 vide Corollarium 6 constructionis primæ, & Corollarium quar-  
 tum constructionis tertiæ \*\*. Principium autem quo usus sum,  
 quodque sumit punctum quodlibet superficiæ concavæ curvati el-  
 teris.

\* Supra pag. 583. 584.

† Vide Num. CIII. Art. X.

\*\* Supra pag. 583, &amp; 593.

N. LXVI. teris pro hypomochlio vectis alicujus, ipsum illud est, quod jam olim adhibuit Acutissimus LEIBNITIUS in Schediasmate *De Resistencia solidorum* Mense Julio 1684; adeo ut si dubium fuisset visum Dno. HUGENIO, putanti non tantum superficiem externam extendi, sed & internam contrahi, id objectum oportuisset Dno. LEIBNITIO, non mihi, qui decennio post ab Auctore principii illud mutuatus fui. Fateor autem, quod cum primum olim aspexissem hoc Schediasma, idem mihi scrupulus subortus fuerit; propterea quia quicquid extensionis, etiam compressionis capax esse debet. Et hæc ratio quoque est, cur aliam Problematis constructionem quæsierim, prius quam moneret Vir Illustris, quæ ita habet. [Fig. 2.] Sit Linea Tensionum AB, & Linea compressionum AC, quam quidem verosimile est esse tantum continuationem prioris AB, cum vires comprimentes nihil videantur esse aliud, quam vires negative tendentes, hoc est, tendentes in partem contrariam; uti compressio nihil aliud est, quam negativa tensio; adeo ut hinc constet, Lineam Tensionum ultra verticem A flecti debere in partem oppositam, atque ex parte C habere asymptoton parallelam axi AE, cum utique nihil ultra totam sui longitudinem comprimi possit; unde simul omnia Paraboloidæ, ac Hyperboloidæ, ipsamque Lineam rectam, hinc excludi manifestum fit. Utcunque vero se res habeat, siue curvæ AB, AC ejusdem, siue diversarum curvarum partes existant; intelligantur ductæ in angulis DAH & QAE duæ oppositæ Hyperbolæ Cubicæ BG,  $\beta$ C, intersecantes curvas AB & AC in B & C, sic ut AD in DB<sup>2</sup> & AE in EC<sup>2</sup> æquantur eidem constanti solido; hinc alteri ipsarum applicetur FG = DB + EC, ad habendum punctum G: tum fiant aliæ duæ Hyperbolæ, quarum abscissæ in applicatarum quadrata ductæ æquantur majori minorive solido, & inveniatur novum punctum G. Omnia denique sic inventa puncta G connectantur Curva AG, quæ est illa, ad quam Elastica eo modo construenda est, quem Mense Junio 1694, pagina 265 \*, præscripsimus; prorsus ac si ipsa AG,

\* Supra pag. 580. 581.

AG, non AB, tensionum curva foret; faciendo nimirum quadrum N. LXVI. tum AK = spatio AIR, & rectangulum AN = indefinitæ ejus portioni AFG, ac tum describendo circuli quadrantem LPM secantem rectam NO in P, &c. (\*) Puncta enim sic inventa S vera

(\*) Concipiatur laminæ crassities VX [=c] divisa in S, in partes duas, extensam unam [SV=f], compressam alteram [SX=g]; Sic ut S spectari debeat tanquam hypomochlium, circa quod in æquilibrio constitutæ sunt tres potentia, nempe pondus in A appensum [quod dicatur 2cc], resistentia fibrarum tensarum, & resistentia compressarum, quarum loco fingantur una extensa rV in superficie convexa, & una compressa qX in concava superficie laminæ elasticæ. Quoniam vero pars extensa est ad compressam ut SV [f] ad SX [g], fingi debet fibræ rV crassities ad crassitiem fibræ qX in eadem ratione, ita ut f & g repræsentent etiam crassitudines fibrarum rV, qX. Tensioni Vv fibræ rV, & compressioni Xx fibræ qX proportionales sint BD in linea tensionum & EC in linea compressionum; hoc est, quia vis AD [z] fibram, cujus longitudo est b, extendere valet quantitate BD=t, eadem vis fibram rV, vel sS [ds] extendet quantitate Vv=t ds: b, & vis AE [u], quæ potis est fibram b comprimere quantitate EC=τ, comprimet fibram qX vel sS [ds] quantitate Xx=τ ds: b. His positis, cum nisus, quibus rV resistit tensioni & qX tensioni, simul agant con-

Jac. Bernoulli Opera.

tra nisum ponderis appensi in A; erit momentum tam fibræ rV, quam fibræ qX [quæ momenta facile ostenduntur æqualia] dimidium momenti ponderis in A. Est autem hujus momentum compositum ex pondere [2cc] & veste Sp [x]. Momentum autem fibræ rV componitur ex ejus crassitie [f], veste SV [f], & vi tendente AD [z]. Ac pariter momentum fibræ qX componitur ex ejus crassitie [g], veste SX [g], & vi comprimente AE [u]. Igitur ccx=ffz=gg u. Est etiam Vv [t ds: b] ad Xx [τ ds: b], vel t ad τ, ut SV [f] ad SX [g]; atque ideo BD [t], EC [τ], & BD + EC seu FG [t+τ=θ] sunt inter se ut f, g, & c. Substituendo igitur t, τ, & θ pro f, g, c, erit θx=τz=ττ u. Quare ratio virium, tendentis AD, & comprimentis AE, determinatur per hyperbolam cubicam BG, βC, cujus natura est ut sit tτz=ττ u, vel AD × DB² = AE × EC². Et AF [x], cum sit = τz:θ, determinatur applicando ad hyperbolam BG rectam FG=θ=BD + EC. Præterea similia Triang. VVv, sSs dant Vv [t ds: b]: VS [f vel c t: θ] = sS [ds]: Sα [dx ds: ddy]. Unde fit θdx ds = c b ddy, quæ eadem est æquatio quam N°. LVIII, Nota (c), p. 581,

N n n n

habui-



N. LXVI. vera erunt fulcra vectium, junctaque lineam constituent AST, quæ inter partes convexas & concavas curvati elateris media est; ipsius vero internæ ac externæ superficiiei puncta habentur, si per S ducantur curvæ perpendiculares SV & SX, quæ se habeant in ratione rectarum BD & CE, ac simul sumptæ æquent crassitiem laminæ. Ponderus in A appendendum duplum esse debet ejus quod requiritur in Q, ad vectem in QTY suffultum hypomochlio in T & affixum portioni laminæ YZ eo usque deprimentum, donec YΠ ad IR fiat sicut YZ ad spatium AIR seu AK. Excessus longitudinis convexæ superficiiei a V supra concavam a X ad crassitiem laminæ rursum hic est, sicut arcus LP ad AL. Quinimo generalis hæc est natura *condescriptarum*, ut ipsarum vel aggregatum vel differentia ad arcum circuli reduci possit; quod etiam Fratri observatum video nupero Augusto, ubi hæc fusius exponit. Ex dictis autem constare potest, quod si Curvæ tensionum AB & compressionum AC essent similes & eadem curvæ, ac circa eundem axem DAE similiter dispositæ, sic ut positis AD, AE æqualibus, ipsæ DB & EC etiam æquales essent, puta si BAC foret vel linea recta, vel ex genere Paraboloidum &c. constructio prorsus conveniret cum illa, quam jam Mense Junio 1694 dedi, excepta sola quantitate appendendi ponderis, & quod linea fulcrorum AS, quæ ibi in parte concava curvati Elateris concipitur, hic inter illam & convexam præcise media est, & utrique condescribitur, existente ubique  $SV = SX$ .

II. Quid statuendum porro sit de figuris Elaterum a Dno. HUG-

habuimus, nisi quod illic  $r$ , hic  $\theta$  scribatur. Unde sumpta, non AB, sed AG pro curva tensionum, eadem fuit constructio quæ data est N°. LVIII, pag. 580, & ea omnia sequuntur quæ præsentī constructioni subjungit Noster.

Multa sunt quæ me movent ut suspicer non valde absurdum ab ista

fuisse Auctoris analysin. Nollem tamen id affirmare, ne ipsi affingere videar solutionem non uno defectu laborantem, qualis est substitutio illa fibræ  $rV$  quo omnibus fibris tensis, & fibræ  $qX$  pro omnibus compressis. Id cum animadvertisset, Problema iterum considerandum suscepit, N°. CII, quem vide.



HUGENIO, pag. 340, Fig. 2. propositis \*, jām diserte expli- N.LXVI.  
 cueram Scholio † constructionis meæ generalis. Sed quia Vi-  
 ros acutissimos de istis etiamnum per conjecturas tantum loqui  
 video, operæ pretium erit totam rem tradere apertius. Si Elater  
 quispiam ABC [Fig. 3. & seqq.] firmatus in puncto medio, aut  
 nixus aliquo repagulo B, trahatur in extremitatibus A & C a  
 duabus potentiis æqualibus juxta directiones AD, CD, tangenti-  
 bus extremitatum perpendiculares, curvaturam acquireret conflatam  
 ex partibus ipsius lineæ, quam huc usque contemplati sumus,  
 efficiendo arcum quem appello, vel *diminutum* ut Fig. 3; vel  
*auctum*, ut Fig. 4, 5, 6. At si trahatur Elater juxta directiones  
 AC, CA, sibi mutuo oppositas & ad tangentes extremitatum obli-  
 quas [quod fit, ubi hæ extremitates aut chorda junguntur, ut  
 in Figuris 3, 4, 5, aut virga rigida, ut in Fig. 6; aut etiam fir-  
 mis parietibus, ut in Fig. 7, utcumque suffulciuntur] mutabit Ela-  
 ter paululum figuram suam, ut dicto Scholio † expresse monui;  
 quod vel hinc colligitur, quia isto casu nullo amplius in B re-  
 tinaculo opus est ad coercendum Elaterem in statu violentæ ten-  
 sionis. Interim tamen generalis est solutio pro omnibus, perve-  
 niturque ad eandem æquationem supra inventam  $aa = 2xx$  seu  
 $aa ddy = 2x dx ds$ , nisi quod in summatione statuendum sit  
 $\int aa ddy = aady - abds$ , pro 3, & 7 Fig. &  $\int aa ddy =$   
 $abds \pm aady$  pro reliquis; designante  $a$  ad  $b$  rationem Sinus to-  
 tius ad sinum anguli CAD seu obliquitatis directionis virium  
 comprimantium; quo pacto finalis æquatio [e qua constructio-  
 nes cæteraque omnia facile deducuntur,] hæc reperitur:  $\pm dy$   
 $= (xx \pm ab) dx : \sqrt{(a^4 - (xx \pm ab)^2)}$ . (\*) Monendum  
 etiam hoc est, quod linteum ejusdem cum Elatere longitudinis in-  
 ter punctum A & C suspensum & fluido impletum usque in AC,

Nnnn 2

ab

\* N°. præc. pag. 638.

† N°. LVIII. pag. 582. 583.

(\*) Hæc enim æquatio ostendit,  
 posito  $x=0$ , esse  $dy$  ad  $dx$ , ut  $ab$   
 ad  $\sqrt{(a^4 - aabb)}$  vel ut  $b$  ad  $\sqrt{(aa$   
 $-bb)}$ . Est autem  $dy$  ad  $dx$ , posito $x=0$ , hoc est in punctis A & C;  
 ut sinus ang. CAD ad cosinum ejus,  
 Quare hic sinus ad cosinum ut  $b$   
 ad  $\sqrt{(aa - bb)}$ , atque adeo sinus  
 ang. CAD ad sinum totum ut  $b$   
 ad  $a$ .

**N.LXVI.** ab coque tensum, eandem & his in casibus figuram induat. Quintimo si Elater  $ABC$  cohibeatur chorda  $FG$  [ ut in Fig. 8, ] quæ non ipsi elateri, sed extremitatibus rigidorum brachiorum  $AF$ ,  $CG$ , sit annexa; ac deinde ejus loco concipiatur linteum  $ABC$  affixum firmis parietibus  $AF$ ,  $CG$ , atque impletum liquore usque in  $FG$ , certum est & tunc eandem utriusque curvaturam fore, quippe quæ portio tantum esse debet resecta ex priorum aliqua. Atque ita plene satisfactum puto utilissimo Problemati, ut ei posthac nihil quicquam desit, quam ut experientiis determinentur in quavis materia veræ tensionum & compressionum leges. Nam constructionum inventio est generalioris considerationis, nec proprie ad solutionem Problematum particularium pertinet.

**III.** Cæterum num modus construendi transcendentes lineas per meras quantitates algebraicas, assumpta una sola quantitate transcendente, universalis sit, atque etiam in illis curvis locum habeat, quæ nec a circuli quadratura, nec logarithmicæ descriptione dependent, nullibi discussi; tantum dixi, logarithmicam non semper adhiberi posse; quanquam nec prius ita clarum sit, ut omni dubitatione careat: scrupulum enim movet hoc, quod nullæ non rectificabiles curvæ continuo bisecari possunt, ut arcus circulares & logarithmi. Novi equidem quod, data quavis curva algebraica, reperiri possint puncta alicujus transcendents lineæ per meram Geometriam ordinariam; exempli gratia, per solas bisectiones inscriptarum; sed quæ sit hujus transcendents natura, sive differentialis æquatio, adeoque data æquatione, qualis assumenda curva algebraica, cujus inscriptas bisecando illa possit construi, repertu arduum & difficile existimo. Nota, quam dedi supra \*, qua constet, num curva mechanica ope logarithmicæ construi possit, vera est, sed recte interpretanda; nam si quantitas  $x$  pluribus constet membris, examinanda sunt non tantum omnia conjunctim, sed & singula seorsim, atque secundum omnes modos possibiles inter se combinata; quoniam hoc casu proprie

\* N°. LVIII. pag. 591. 592.

prie non una adest æquatio, sed plures, velut in exemplo quod N. LXVI. objicitur \*  $ady = (x + aa : x) dx$ , quam æquationem [ posita  $y = s + z$  ] possum resolvere in has duas:  $ads = x dx$  &  $adz = a adx : x$ ; quarum hæc cum notam præscriptam habeat, illa absolute integrari possit, constat etiam ex ambabus compositam, ope logarithmicæ construibilem esse (\*). Ad series, quas dedi pro summendis quantitatibus  $xx dx : \sqrt{(a^2 - x^2)}$  &  $aadx : \sqrt{(a^2 - x^2)}$  per interpolationes *Wallifianas* perveni; easdem tamen etiam obtineri posse per indefinitam potentiam binomii eleganter observavit Celeberrimus D. LEIBNITIUS (d). Iis quæ subjicit hic Vir de numero concurrentium intersectionum in oculis, non habeo quæ reponam; cum non eo dicta putem, ut sententiam meam, cujus veritatem paulatim agnoscere videtur, impugnaret, sed commoda potius explicatione cum sua conciliaret. Ego profecto mentem mutare prius non possum, quam ad instantiam Parabolæ circulum osculantem in alio præterea puncto intersecantis responsum legero, aut calculum pro quatuor intersectionum concursu militantem in aliquo speciali exemplo videro, similem meo qui trinum tantum concursum supponit (e).

IV. Jam porro ad constructionem accedendum Curvæ accessus & recessus æquabilis, sive Isochronæ, ut Dno. LEIBNITIO appellatur, Paracentricæ, qua mense Junio superioris Anni Problema jam dudum sopitum resuscitavi. Hic illud primo reprehensum video, quod rectificationem curvæ alicujus adhibuerim, quæ &

N n n n 3 ipsa

\* Supra N°. LXIV. pag. 627.

(\*) Scil.  $s = xx : 2a$ , &  $z = \log. x$ .  
x. Igitur  $y[s + z] = xx : 2a + \log. x$ .

(d) Vide Num. CI. Prop. 56. 57. 58.

(e) Satis liquet Nostro, cum hæc scriberet, nondum visa fuisse quæ de hac quæstione, jam mense Aug. 1695 *Actorum*, candide falsus erat LEIB-

NITIUS. „ Nunc re accuratius consi-  
„ derata, ea quæ Celeb. Jac. BEN-  
„ NOULLIUS de numero radicum of-  
„ culi monuerat, probo, quibus quo-  
„ minus assentire antea, non alia  
„ causa fuit, quam quod diversæ oc-  
„ cupationes cogitationesque effe-  
„ cerant, ut tardius accederem ad  
„ rem de integro satis consideran-  
„ dam.

N. LXVI. ipsa ad sui constructionem spatii quadraturam requirit; cum Problema immediate per quadraturam vel etiam rectificationem curvæ ordinariæ confici potuisset. Quod recte quidem; at non dissimulanda fuisset ratio hujus meæ opinionis, quam ibidem pag. 277, & postmodum pag. 336, \* expresse addidi. Nempe existimo curvas, quas natura ipsa simplici & expedito motu producere potest, quorumcunque sint generum & graduum, in constructionibus præferendas esse aliis, etiam algebraicis, quas arte vel nullo modo vel difficulter delineamus; cum illud semper in practica effectione operis sit censendum optimum, quod cum summa exactitudine summam quoque facilitatem conjunctam habet. Sed etiam si quippiam hic peccatum esset, illud tamen sequenti mense Septembri † abunde reparatum a me puto, ubi non tantum constructionem hujus Problematis omnium facillimam per rectificationem curvæ algebraicæ, quam *Lemniscatam* voco, exhibui, sed & generaliter docui, quænam curvæ algebraicæ, in tentandis constructionibus mechanicarum, lineam circularem & parabolicam proxime excipiant; ad quod perquirendum memini Fratrem paulo ante per litteras a D. LEIBNITIO instigatum fuisse. Quod vero constructiones per quadraturas concernit, quas ceteroquin cum Dno. HUGENIO non magni facere soleo, ut hinc inde sum professus, non rejiciendas puto; tum, cum id tantum intenditur, ut in æquatione construenda literæ indeterminatæ cum suis differentialibus separentur a se invicem, quod solum intendebant Illustris cum Fratre HOSPITALIUS, cum primum præsens Problema mihi proposuissent; nec enim reduci Problema ad quadraturas potest, nisi literæ jam separatæ sint, unoque præstito, alterum quoque præstitum habetur. Multo minus autem quadraturæ debuerunt negligi in materia Elasticarum, cum in hypothesi indeterminata Problema aliter confici non potuisset. Sed non demonstratum video, semper alias constructiones haberi posse: BARROVII sane tempore nullæ aliæ fuere notæ, nisi quæ fierent per quadraturas; nec illas prius fastidire ceperunt Geo-

\* Supra pag. 603, & 609.

† N°. LX. pag. 608.

Geometræ, quam Celeberrimus D. LEIBNITIVS elegantissimam N. LXVI. Catenariæ constructionem per logarithmicam dedisset.

Dixeram, unam tantum dari Isochronam respectu ejusdem centri ejusdemque altitudinis, quod quanquam eo sensu quo dictum fuit excusari forte possit, malo tamen melioribus monitis locum dare, fateorque magis congrue dici dari infinitas. Errorem autem sola peperit festinatio; nec enim ignorabam, in summatione differentialium summas absolutas augeri minuique posse constante quadam quantitate  $b$ ; cum id alias observatum esse, ex generali solutione Elasticarum supra allata & jam mense Junio 1694, pag. 267, Scholio §†, prælibata constet: & meminisse potest Lector, inventam mihi fuisse solutionem, cum prolixum satis Schediasma pene finivissem, atque jam scribendo lassatus fuisset; ubi de summa rei certus ad singulas Problematis circumstantias cautius attendere non sustinui. Agnosco itaque, cum Acutissimo D. LEIBNITIO, quod possit assignari Isochrone, quæ per datum quodvis punctum transeat: sed nescio, cur excipiat puncta rectæ horizontalis per ipsum centrum transeuntis, cum similiter nullum eorum sit, per quod non aliqua satisfaciens duci possit. Sit enim ubivis in illa datum punctum C [Fig. 9] invenientur puncta Isochronæ convenienter constructioni meæ Mensis Septembris hoc pacto. Sumpto indefinite puncto Q in curva lemniscata AQB, subtendatur ei ex nodo recta AQ, tertiaque proportionalis ad rectas AB & AQ, quæ sit  $\zeta$ , applicetur semicirculo & jungatur A $\zeta$ , in qua si abscindatur A $a$  tertia proportionalis ad AB & lemniscatæ portionem AQ, auctam minutamve constante quadam longitudine  $b$ , quæ media sit proportionalis inter AB & AC, erit punctum  $a$  in quadam Isochrone, quam apparet transiturem per datum C punctum (†). Potest

vero

† Pag. 582. 583.

(†) Nam, per constr. est  $Aa = (ALQ \pm \sqrt{AC \cdot AB})^2 : AB$ , vel  $\sqrt{Aa \cdot AB} = ALQ \pm \sqrt{AC \cdot AB}$  aut  $\sqrt{Aa \cdot AB} \mp \sqrt{AC \cdot AB} = ALQ$ .

Sed A $a$ , N°. LIX, dicebatur  $t$ , AB,  $a$ , AC sit  $c$ ,  $\zeta = AQ^2 : AB = uu : a = z$ , & est  $ALQ$  [N°. LX, Nota b, pag. 610]  $= f(aadu : \sqrt{(a^4 - u^4)}) = f(\frac{1}{2}adz\sqrt{a} : \sqrt{(aaz - z^2)})$ . Igi-

N. LXVI. vero fieri, ut quæ per diversa horizontis puncta transeunt, non semper sint totidem diversæ lineæ, sed portiones tantum unius ejusdemque. Sciendum enim, terminos quos ipsi assignavi pag. 279, §. 3 \*, non esse nisi secundum quid tales; unamque & eandem Isochronam ab utraque horizontis parte in infinitum produci posse, omnes vero in centro A coire, ac inde sub horizonte utrinque per infinitos plexus seu mæandros se diffundere, quales *Fig. 10*, etsi ob spatii angustiam non debita proportionem delineati, conspiciuntur; adeo ut grave per curvam latum perpetuas circa A librationes, sed usque & usque ampliores, peragat & post singulas oscillationes horizontalem repetat eamque radat. Cujus rei argumentum est, quod lemniscatæ seu curvæ in se redeuntis portio AQ, quæ longitudinem rectæ Aa in *Fig. 9*, determinare debet, intelligi potest non de ipsa tantum solitarie accepta, sed & cum assumpta semel pluriesve integra perimetro lemniscatæ; quo fit, ut in eadem recta Aa semper plura plurave puncta, qualia a, reperiri possint. Discimus etiam hinc, Isochronam geometricæ non construibilem esse; cum Lemniscata nequeat esse rectificabilis. Statuo enim etiamnum, [ne quid eorum intactum relinquamus, quæ antehac inter nos acta sunt; Vide *Mensem Januarium anni 1691*, (\*) pag. 21,] nullam curvam geometricam

Igitur est  $\sqrt{at} \mp \sqrt{ac} = \frac{1}{2} \int (adz \sqrt{a: \sqrt{aa^2 - z^2}})$  aut,  $\sqrt{t} \mp \sqrt{c} = \frac{1}{2} \int (adz : \sqrt{aa^2 - z^2})$ , & differentiendo  $dt : \sqrt{t} = a dz : \sqrt{aa^2 - z^2}$ , quæ est æquatio ad Isochronam Paracentricam N°. LIX., Nota c, pag. 602. Quod si fiat  $\zeta [z] = 0$ , erit AQ[u] & ALQ=0, Quare  $\sqrt{Aa} \cdot AB \mp \sqrt{Ac} \cdot AB = 0$ , vel  $Aa = Ac$ . Transit igitur Isochrone per datum punctum C.

\* Pag. 605. Vide ibi Notam (g).

(\*) Vide Num. XLI. pag. 490. Objectio Celeb. LEIBNITII ista fuit:

„Hæreo circa id quod a Dno. BER-  
„NOULLIO dictum est, nullius curvæ  
„geometricæ in se redeuntis rectifi-  
„cationem generalem esse possibi-  
„lem. Scio alium Virum Clarissi-  
„mum, [is est NEWTONUS, *Princ. Math. Phil. Nat. Lib. I. Sect. VI. Lemm. 28.*] „simili argumento  
„probare instituisse nullius areæ cur-  
„væ geometricæ in se redeuntis qua-  
„draturam indefinitam esse possibi-  
„lem: visum tamen est Dn. HUGE-  
„NIO non minus quam mihi, rem  
„non esse confectam. Et ni fallor,  
„dantur instantiæ, quibus tamen hujus-



cam in se redeuntem rectificationem admittere; quod quia me-  
mini me potuisse demonstrare, valde scire cupio quales sint in-  
stantiæ, quas in contrarium adduci posse scripsit D. LEIBNITIUS  
Mense Septemb. 1691, pag. 437. Sed & hoc ex dictis conse-  
quitur, quod Isochronæ, quæ supra horizontalem assurgunt, non  
possunt circa centrum A in spiras convolvi, ut coniecit Acutif-  
simus D. HUGENIUS; cum secus partes inferiores cum Iso-  
chronis nostræ constructionis communes habere, adeoque hori-  
zontalem per A extensam simul & secare & tangere deberent,  
quod impossibile. Memini tamen me reperisse, quod ejusmodi  
spiræ circa centrum A prodirent, si ipsum simul poneretur cen-  
trum gravium, & quod eo casu curvæ constructio ope duarum  
Spiralium *Archimedeæ* & logarithmicæ facile peragi posset (<sup>h</sup>).

V. Sed

, hujusmodi argumenta applicari pos-  
sunt.

Vide autem quæ regesserit LEIB-  
NITIUS, N°. LXXI, & Auctoris  
nostri responsionem N°. LXXII.  
Art. 2.

(<sup>h</sup>) Sit BMmC [Fig. A] Spiralis  
Isochrona, sic dicta quod grave il-  
lam describens, velocitate initiali in  
B tali, qualem acquireret labendo ex  
altitudine AB [*a*], æquabiliter ac-  
cedit ad centrum C gravium. Sitque  
BC = *b*, BP = *x*, Pp = MN = *dx*,  
arcus BR = *u*, & Rr = *du*; atque  
erit Mm = CM × Rr : CR = (*b*  
— *x*) *du* : *b*, & Mm = √(MN<sup>2</sup>  
+ Mm<sup>2</sup>) = √(*dx*<sup>2</sup> + (*b* — *x*)*du*<sup>2</sup> : *b*<sup>2</sup>)  
Hoc spatium percursum si dividatur  
per velocitatem, quæ, juxta doctri-  
nam GALILÆI, ponitur proportio-  
nalis radici quadratæ altitudinis AP,  
[*a* + *x*] ex qua grave in M descen-  
dit, habebitur tempus quo percurritur  
Mm, quod, quia BMm ponitur Spi-  
ralis, Bernoulli Opera,

ralis Isochrona, statui debet propor-  
tionalis accessui MN [*dx*] corporis  
ad centrum. Fiat igitur √(*dx*<sup>2</sup> + (*b*  
— *x*) *du*<sup>2</sup> : *b*<sup>2</sup>) : √(*a* + *x*) = *dx* : √*a*,  
& erit *du* = *b dx* √*x* : (*b* — *x*) √*a*, vel  
[ponendo *x* = *zz* : *b*] *du* = √ $\frac{b}{a}$   
× (*zz dz* : (*bb* — *zz*)) = √ $\frac{b}{a}$  ×  
(—*dz* + *2bb dz* : (*bb* — *zz*)); cu-  
jus integralis [omissa constantis ad-  
ditione, quæ nihil nisi situm curvæ  
mutaret] est *u* = √ $\frac{b}{a}$  × (—*zz* +  
Log.  $\frac{b+z}{b-z}$ ). Igitur arcus BR [*u*]  
est ad differentiam duorum arcuum,  
quorum alter est = Log.  $\frac{b+z}{b-z}$ , al-  
ter = *zz*, ut √*b* ad √*a*. Id quod sic  
potest construi. Assumpta abscissa  
quacunque BP = *x*, descripta sit, in  
circulo bfg, cujus radius cb = CB  
O o o o = *b*



N. LXVI. V. Sed ut ad reliqua meletematum nostrorum capita transeamus, atque aliquid etiam adjiciamus de *Curva Velaria*, quam eandem esse statui cum catenaria, sciendum, me nunquam mutasse sententiam, sed tantum distinxisse casus. Dixeram, Mense Maio

$= b$ , Spiralis *Archimedeae* bel, fiatque ut peripheria bgh [c], vel quæ ipsi æqualis est subtangens Spiralis in b, ad diametrum [2b], ita media proportionalis inter CB & BP [ $\sqrt{bx} = z$ ] ad bd  $= 2bz : c$ , & centro c descriptus circulus de secet Spiralem in e, ac radius cef per e ductus abscindet arcum bf  $= 2z$ . Est enim, ex demonstratis ab ARCHIMEDE, bc [b] : bgh [c]  $= bd [2bz : c] : bf = 2z$ . Descripta pariter intelligatur Spiralis  $\beta\zeta$  logarithmica, semirectangula, hoc est quam radii sub angulo  $45^\circ$  secant: fitque radius  $\alpha\beta = CB$  [b], & capiantur  $\beta\gamma$  &  $\beta\delta$  æquales ipsi  $z = \sqrt{bx}$ , mediæ proportionali inter CB & BP, ut sit  $\alpha\gamma = b + z$ , &  $\alpha\delta = b - z$ . Tum centro  $\alpha$  describantur circuli  $\gamma\epsilon$ ,  $\delta\zeta$  Spiralem secantes in  $\epsilon$  &  $\zeta$ , & radii  $\alpha\epsilon$ ,  $\alpha\zeta$ , in peripheria  $\theta\beta\eta$ , centro  $\alpha$ , radio  $\alpha\beta$  descripta intercipient arcum  $\theta\beta\eta = \text{Log.}(\alpha\epsilon : \alpha\zeta) = \text{Log.} \frac{b+z}{b-z}$  [Vid. N°. XLIX. Not. 1, pag. 498. Prop. III. Cor. 3.]. Sumatur itaque arcus bfg  $= \theta\beta\eta = \text{Log.} \frac{b+z}{b-z}$ , & quoniam est bf  $= 2z$ , erit fg  $= \text{Log.} \frac{b+z}{b-z} - 2z$ . Superest igitur tantum ut inveniatur arcus go, qui sit ad fg, ut  $\sqrt{b}$  ad  $\sqrt{a}$ . Id autem

nullo negotio perficitur sumendo lp quæ sit ad li [differentiam radiorum ce, cl quibus arcus fg intercipitur] ut  $\sqrt{b}$  ad  $\sqrt{a}$ . Arcus enim pq, centro c descriptus, si secet Spiralem *Archimedeam* in q, radius cgo, abscindet arcum go, qui erit ad fg, ut ut lp ad li, ut  $\sqrt{b}$  ad  $\sqrt{a}$ . Atque ideo, si capiatur, in peripheria BRr, arcus BR  $= go$ , ducaturque radius CR, quem secet in M circulus PM, centro C, radio CP descriptus; erit punctum M ad Spiralem Isochronam quæsitam.

Hanc autem infinitos gyros circa centrum C absolvere, ex ejus æquatione  $u = \sqrt{\frac{a}{b}} \left( \text{Log.} \frac{b+z}{b-z} - 2z \right)$  liquet. Ubi enim BP [x] evadit æqualis BC [b], tunc  $z$  [ $\sqrt{bx}$ ] fit etiam  $= b$ , atque  $(b+z) : (b-z)$  evadit  $[= 2b : 0]$  infinita. Hujus itaque Logarithmus  $\theta\beta\eta$ , vel bfg infinitus. Est autem bf [ $= 2z = 2b$ ] finitus. Igitur arcus fg infinitus; & BR [ $fg \times \sqrt{\frac{b}{a}}$ ] pariter infinitus. Infinites igitur peripheriam BRr describit radius CR, priusquam punctum M ad centrum C pervenerit, hoc est Spiralis Isochrone infinitos gyros circa centrum C describit.

Maio 1692., pag. 203, articulo 1 \*, Velum arcuari in circulum, N. LXVI. si quando ventum sic excipiat, ut hic intra sinum ejus stagnare, totamque suam pressionem in velum exercere cogatur; velut sane manifestum fit in bullis saponariis, quæ flatu oris in perfectas sphaeras rotundantur. At hæc pro velis marinis hypothesis tantum fuit, quæ, si veritati minus consona, propterea primarium calculi fundamentum non evertit. Et revera, aut nullus aer intra veli sinum stagnat, sed omnis ad latera veli evadit; aut si quis stagnat, is non nisi partem pressionis, quam ab aere pone insequente partemque motus sui retinente accipit, in velum transfert, illudque proin aliter non afficit, quam faceret, si juxta casum §. 10, ipsemet oblique in velum irrueret, ac reliquum motus sui libere continuare posset. Unde re attentius pensiculata non tantum non sententiam muto, sed jam nullus dubito, velum inflatum omni in casu Funiculariæ curvaturam assumere. Nec moror discrimen, quod fortasse intercederet, si velum ex numero finito rectarum compositum intelligeretur †; cum nihil sit frequentius in natura, quam ut in casu infinite parvorum quantitatum differentia evanescat; nec magis hoc mirandum, quam miramur quod, evanescente base trianguli, evanescit crurum differentia. Approbavit autem in fundamentalibus solutionem ipse Frater, nec approbavit tantum, sed & suam fecit, brevisque inventi historiola hæc est. Cum incunte Anno 1691 Fratri *Genevam* misissem proportionem hanc solvendam;  $ddx : dx = dy^3 : \int dy^3$ , qua Velariam comprehendi indicabam, ille ex Patre *Gastone PARDIES* retulit, Velum considerari posse instar funiculi pondere carentis, cui infinitæ lineæ æquidistantes & æque graves insistant; adeoque in Prisma Parabolicum curvari, juxta id quod in *Actis* habetur Mensis Junii 1691, pag. 288 \*. Sed monitus diversam esse rationem fluidi impellentis, ac solidi ponderis juxta eandem directionem trahentis vel prementis, mox sententiam mutavit, intuensque velum ceu linteum liquore aliquo

O o o o 2

imple-

\* N°. XLVIII. pag. 484.

† N°. præc. pag. 638.

\* Supra N°. XLII. pag. 449.

N.LXVI. impletum, indagare cœpit quænam ejus curvatura foret, si pressio fluidi linteo communicaretur secundum directionem horizontalem sive verticalem; harum enim hypothesium alterutram veram esse persuasum habebat: & cum ne hoc quidem probarem, existimabat saltem lintei hujus, si non veli, curvaturam se dedisse; donec ego, paulo post apertius me explicans, hanc fluidorum naturam esse perhiberem, ut pressionem communicent, nec secundum horizontalem, nec verticalem, sed secundum lineam corpori impulsio in quovis impulsus puncto perpendicularem; hac tamen cum differentia, quod ubi fluidum motum suum post impulsum potest proseguere, partem tantum virium in premendo corpore impendat; si vero stagnat alicubi, nec habet quo evadat, omnes suas vires in illud transfundat: hinc velum concipiendum instar funis [Fig. 11.] ab infinitis potentiis æqualibus, aut inæqualibus, tracti vel impulsu, quæ cum sint æquales, manifestum esse formari circulum, quemadmodum etiam per calculum inveneram, eoque in hypotheseos assumptæ veritate prorsus confirmabar. Interea dum ille, sub finem Anni 1691, *Parisos* se confert, transmutato proportionem hanc  $ddx:dx = dy^3: \int dy^3$ , in æqualitatem  $adsddx = dy^3$  (i), indeque ope methodi cujusdam †, quam pro secundis differentiis ad primas reducendis paulo ante excogitaveram, Funiculariam elicio; mox etiam æquationem testâ solutione Fratri *Lutetiam* mitto, visurus num & sua huc pertingeret. Is vero rem sibi successisse videns, atque jam factus cupidior sciendi quomodo ad hanc æquationem pervenerim; denuo ad Veli contemplationem redit; nec cessat, donec animadverteret, artificium in hoc uno consistere ut singulæ impulsuum directiones in duas alias, horizontalem puta & verticalem resolvantur. Nec mora, protinus inventum prælo committit, ac Mense *Aprilis* 1692, *Ephemeridibus Gallicis* curat inseri,

(i) Etenim, cum sit  $ddx$  ad integram suam  $dx$ , ut  $dy^3$  ad suam  $\int dy^3$ , erit  $ddx$  proportionalis ipsi  $dy^3$ , id quod, servata homogeneitate, dabit

æquationem  $dy^3 = adsddx$ . Ponuntur enim  $a$  &  $ds$  constantes.

† N°. CIII. Art. X.

inferi, & quia se solum Problema absolvisse putabat, me de ple- N. LXVI.  
naria resolutione desperasse scribit; nescius quod illam jam præ-  
cedente Martio una cum Regulis usum inventi concernentibus  
*Lipsiam* misissem. Corrigere etiam postea voluit curvaturam suam  
liniei liquore adimpleti, novamque D. Marchioni HOSPITA-  
LIO solutionem exhibuit, sed eam etiamnum erroneam & a  
mea diversam. Hanc enim eandem esse cum Elastica, non mi-  
nus atque Velariam cum Funicularia, constanter sentio; & quod  
certum veritatis indicium esse potest, identitatem hanc, quam ini-  
tio ex speciali natura curvarum prolixiore analysi collegi, nunc  
absque omni fere calculo duabus lineis ostendo \*. Factum inte-  
rim fuit, ut uterque principium pressionis fluidorum ad alia quo-  
que utiliter adhiberemus, ille ad motum muscutorum explican-  
dum, ego ad eximendum mihi scrupulum, quem olim habui  
circa causam perpendicularis descensus gravium, Mense Februa-  
rio 1686 †. Videbam enim ex eodem fonte rationem peti pos-  
se, cur materia terreni vorticis juxta directiones æquatori paral-  
lelas excussa, in circumferentia vorticis, vi sui elateris, per li-  
neas circumferentiæ perpendiculares reperiatur, ac propterea gra-  
via versus centrum potius, quam per easdem directiones, repel-  
lere debeat. Quanquam autem in hoc negotio nonnulla fuerunt,  
quæ initio ut vera assumpsimus, demonstrare vero non potuimus;  
velut illud primarium, quod legem pressionis fluidorum stagnan-  
tium concernit, eorum tamen veritatem omnem nunc a priori  
cognosco. Quorsum etiam pertinet aliud, quod me monere co-  
git veritatis amor. Supposueram, initio, axem æquilibrii transfi-  
re per concursum rectarum extremitates veli linteive tangentium,  
& esse curvæ perpendicularem; sed cum postea certis indicis cog-  
noscerem, ambas hujus hypotheseos partes non posse simul stare;  
priori repudiata, alteri ceu, ut videbatur, verisimiliori inhæsi.  
Quis enim existimasset ex infinitis directionibus, quæ omnes cur-  
væ alicui perpendiculares sunt, solum axem æquilibrii, seu li-  
neam

O o o o 3

neam

\* Vide N°. CIII. Art. XI.

† N°. XIX. pag. 239.

N. LXVI. neam directionis mediæ talem non esse? At nunc cum evidentia successit conjecturis, omnino contrarium video, cogorque retractare omnes illas Regulas, Mense Maio 1692, pag. 204 \*, & Mense Junio 1694, pag. 275 †, quæ ex priorè opinione fluxerunt, dum reliquarum, directionem hanc atque impulsus vim concernentium, veritas inconcussa manet. Quibus, ut ἀβλυσίαι meam utcunque reparem, addo nunc novum aliquod Curvæ genus, determinandæ generaliter huic directioni inserviens, quam ab usu *Lineam mediarum directionum* appello, atque sequenti modo construo, Fig. 12. In data quavis curva AB, quam concipio formatam esse a pressionibus, utcunque inæqualibus, fluidi alicujus, seu præterlabentis, seu stagnantis, sunt rectæ AI, BD, ei perpendiculares, tangentes AC, BC, ponaturque AF = x, FB = y, & AB = s; quo factò, si ex perpendiculari BD abscindatur  $BD = (x ds^2 + x dy ds) : dx^2$  [quod semper & in omni curva duobus circini ductibus absolvo, speciatim autem in Velaria, seu Funicularia, cujus centrum G, faciendo tantum  $BD = GF$ ; in Elastica, sumendo  $BD = AI^2 : (AI + IF)$ ] dico fore punctum D ad curvam desideratam ED, quæ talis est, ut ducta quavis BD perpendiculari ad AH & abscidente ex illa portionem AB, secante vero curvam ED in D, juncta CD media sit directio portionis AB, sive axis æquilibrii circa quem hinc inde portio AB impulsionem æqualium momentorum sustinet (\*). Cæterum observavit olim Acutissimus D. LEIBNITIUS [vide

\* N°. XLVIII. pag. 486.

† N°. LVIII. pag. 598.

(\*) Curva AbB [Fig. B] formata intelligitur innumerabilium potentiarum pressionibus ad curvam perpendicularibus. Ducantur tangentes AC, BC, bc, & sint potentiarum omnium in arcu Ab, AbB agentium mediæ directiones cD, CD. *Lineam mediarum directionum* ED

vocat Noster eam quam perpetuo tangunt mediæ directiones cD, CD; vel quæ formatur per concursum D mediarum directionum infinite vicinarum cD, CD.

Ostendo primum rectam BD, normalem ad curvam AB in puncto B, occurrere mediæ directioni CD in puncto D lineæ mediarum directionum ED. Occurrat enim in puncto d. Et quia cD, CD bisecant [N°. XLVIII.

[vide *Ephemerides Gallicas* Mensis Septembris 1693] quod recta N.LXVI. tendentiæ, seu directionis mediæ, mobilis a pluribus potentiis impulsus transeat per commune centrum gravitatis omnium punctorum tendentiæ particularium; quod verum etiam cum potentiæ sunt infinitæ: at tum cavere debet Lector, ne centrum gravitatis loci punctorum, seu lineæ per infinita puncta transeuntis, cum centro ipsorum punctorum confundat; quippe quod, ob interval-

XLVIII. Nota a, pag. 484] angulos  $Acb$ ,  $ACB$ , erit  $cBC = Acb$  —  $ACB = 2AcD$  —  $2ACD = 2cDC$ . Ergo, si centris  $B$  &  $D$  describantur per  $c$  arcus  $cH$ ,  $cG$ , angulorum  $cBC$ ,  $cDC$  mensuræ, erit  $Bc : \frac{1}{2}cH = Dc : cG$ , vel alternando  $Bc : Dc = \frac{1}{2}cH : cG$ . Ducatur  $bN$  parallela ipsi  $cD$ , & demittatur ex  $N$  normalis  $NI$  in  $Bb$ , eruntque similia  $Tr.$   $cCH$ ,  $NBI$ , nec non  $bNI$ ,  $CDB$ , &  $cCG$ , ob æquales angulos  $cCG$ ,  $BCD$ ; atque ideo erit  $cH : cC = NI : NB$  &  $cC : cG = bN : NI$ , & ex æquo  $cH : cG = bN : NB$ , &  $\frac{1}{2}cH : cG [= Bc : Dc] = \frac{1}{2}bN : BN$  vel  $Bb$ . Est enim  $Tr.$   $BbN$  isosceles, cum sit ang.  $BNb = Nb f = DCA = DCB = NbB$ . Itaque  $BK$  demissa normalis ex vertice  $B$  in basin  $bN$  ipsam bifecat. Ergo  $Bc : Dc$ , quod erat  $= \frac{1}{2}bN : Bb$ , est  $= bK : bB$ ,  $= bI : bN$  [ob sim.  $Tr.$   $bBK$ ,  $bNI$ ]  $= Bc : cd$  [ob sim.  $Tr.$   $bIN$ ,  $cBd$ ]. Igitur cum sit  $Bc : Dc = Bc : cd$ , est  $cd = cD$ , hoc est, coincidunt puncta  $D$  &  $d$ , concursus  $D$  mediarum directionum  $cD$ ,  $CD$  quamproximarum, & earundem intersectio  $d$ , cum  $B$ , d perpendiculari ad curvam. Differt igitur

linea mediarum directionum ab evoluta, adeoque media directio non est ad curvam normalis.

Deinde ostendo  $Bd$ , vel  $BD$ , esse  $= (xds^2 + xdyds) : dx^2$ , aut simplicius  $xds : (ds - dy)$  [æquales enim esse has fractiones liquet, si in prioris denominatore scribas  $ds^2 - dy^2$  pro  $dx^2$ , & utrumque terminum divides per  $ds + dy$ ]. Etenim demittendo  $bM$  normalem in  $BN$  ex  $b$ , æqualia fiunt, ob æquales hypotenusas  $Bb$ ,  $BN$ , & communem ang.  $BBN$ , Triangula  $BbM$ ,  $BIN$ , adeoque  $IN = bM = dx$ , &  $BI = BM = dy$ , atque  $bI = Bb - BI = ds - dy$ . Ergo sim. Triang.  $BbM$  &  $CBL$ , nec non  $bNI$  &  $CDB$ , dant  $bM$  vel  $IN : bB = BI$  vel  $AF : BC$ , &  $bI : IN = BC : BD$ ; aut, ex æquo,  $bI [ds - dy] : bB [ds] = AF [x] : BD [xds : (ds - dy)]$ .

Est autem in Velaria [Nº. XLVIII, Nota (e), pag. 485]  $ds : dy = FG : GA$ . Igitur  $BD = xds : (ds - dy) = AF \times FG : AF = FG$ . In Elastica vero [Nº. LVIII. Art. 3] est  $ds : dy = AI^2 : IF^2$ . Igitur  $BD = AF \times AI^2 : (AI^2 - IF^2) = (AI - IF) \times AI^2 : (AI^2 - IF^2) = AI^2 : (AI + IF)$ .



N. LXVI. intervallula punctorum plerumque inæqualia , ab altero est diversum. Quanquam autem peregregium hoc sit Theorema , nullius in re præsentis usus esse poterit ; cum supponat omnes directiones particulares ex uno puncto divergere ; quas hic ex integra linea , Evoluta scilicet , emanare concipimus \*. Alia via est , qua idem certo & expedite licet consequi. Jam enim plane assevero me omnia demonstrare posse ; facileque fidem impetrabo apud Lectorem , si perpenderit mihi & satis esse perspicaciæ , ut sponte agnoscam cum impegero , & satis quoque ingenuitatis , ut fatear. Sed non omnia hic vacat agere , malleque hæc cum affinibus aliis , quæ resistantias fluidorum , velocitates corporum motorum in fluidis , &c. concernunt , integro Tractatui reservare , si modo valetudo firmatior , & sufficiens huic elaborando otium concederetur , nec meæ conditionis necessitas ignobilioribus plerumque studiis adstringeret. Ut tamen certius appareat , me non vana promittere in hac materia ; volo hic in veritatis patrocinium , & commodum rei nauticæ , etiam symbolam meam conferre ad discussionem quæstionis illius utilissimæ , de velocitatibus Navium eodem vento in diversas partes velificantium , quæ , superioribus annis , inter D. RENAVIUM Auctorem Theoriæ *de la Manœuvre des Vaisseaux* & D. HUGENIUM agitata fuit ; quorum ille velocitates has voluit esse ut sinus angulorum veli navisque , hic ut sinuum radices. Quanquam enim D. HUGENIUS veritati multo propius accedat , uterque tamen , si præcise loquendum sit , navi obliquius latæ velocitatem justo minorem tribuit ; quod palpabile fit consideranti , naves in diversas plagas tendentes non iisdem ab eodem vento viribus impelli , [ ut tacite supponit HUGENIUS ; ] cujus rei ratio est , quia navis in tantum se subducit pone insequentis venti impulsui , in quantum propria celeritate , juxta directionem venti promovetur , adeo ut ventus non totali sua celeritate , sed parte tantum celeritatis in navem agat ; eo minore , quo rectior est navis cursus ; hoc est , ut posita

\* Vide Nos. LXXI , & LXXII. Art. 2.



posita celeritate venti  $a$ , navis rectioris  $y$ , obliquioris  $z$ , & ratione sinuum angulorum veli navisque  $a : b$ ; ventus ad priorem navem appellat velocitate  $a - y$ , ad alteram velocitate  $a - bz : a$ ; unde cum vires, quibus naves impelluntur, componantur ex simplici ratione sinuum  $a$  &  $b$ , ac duplicata velocitatum  $a - y$  &  $a - bz : a$ , atque insuper [ in casu maximæ velocitatis navium ] resistentiis aquæ, quæ duplicatis navium celeritatibus proportionales sunt, æquantur, erit  $yy : zz = a(a - y)^2 : b(a - bz : a)^2$ ; hoc est, quia posito pondere aquæ ad pondus aeris ut  $p$  ad  $a$ , & superficie proræ ad subtenfam veli ut  $a$  ad  $m$ , reperi olim maximam velocitatem navis  $y = a\sqrt{m} : (\sqrt{p} + \sqrt{m})^*$ , fiet inde  $z = aa\sqrt{bm} : (a\sqrt{ap} + b\sqrt{bm})$ ; adeo ut emergat  $z : y = \sqrt{b} + \sqrt{(bm : p)} : \sqrt{a} + \frac{b}{a}\sqrt{(bm : p)}$ , quæ ratio major est ratione *Hugeniana*  $\sqrt{b}$  ad  $\sqrt{a}$ , & differentiam parit trigessimæ circiter partis totius velocitatis, quod in longiori itinere errorem nimis enormem reddit. Optassem vero, ut aliquando mihi licuisset propius cum desideratissimo D. HUGENIO, at nunc cheu vivis crepto! super his conferre; qui, tum ob loci commoditatem, tum ob profundam rerum cognitionem atque in mechanisimis excogitandis solertiam, multa inventis nostris perficiendis, ac in usum rei maritimæ traducendis communicare potuisset.

VI. Restarent nunc nonnulla Fratris schediasmata examinanda, præsertim illud Mense Octobri 1694, quod constructionem Isochronæ spectat, meque propius tangit. Verum de re ipsa non multa dicenda habeo, nisi quod nobis hic ova, quod aiunt, post prandium apponit, nihilque novi docet, quod non simplicius quodammodo jam præcedenti Septembri a me præstitum sit. Dixeram, illum multum fuisse in Problemate; quandiu autem ejus solutioni præcise incubuerit, non definio: hoc tantum novi, quod D. Marchio HOSPITALIUS, eo tempore quo Fratrem

*Jac. Bernoulli Opera.*

Pppp

secum

\* Vide N<sup>o</sup>. LVI, Notam u, pag. 562. Aut N<sup>o</sup>. CIII, Art. XVIII.

N. LXVI. secum habebat, super æquatione  $(x dx + y dy) \sqrt{y} = (x dy - y dx) \sqrt{a}$ , bis me per litteras pulsarit; ipseque Frater post suum e Gallia reditum, cum æquationem denuo mihi proponeret, atque simul Problema, ex quo fluxisset, indicaret, sponte fassus sit, se methode sua, qua BEAUNII Problema aliaque difficiliora solverat, hic nihil efficere potuisse; quod utique satis arguit, rem non semel ipsi antea tentatam fuisse. Calculum suæ constructioni præfigit; ne quis eam, ut inquit, ex mea Mensæ Junio desumptam existimet; quasi quid esset facilius, quam synthesein meam converttere in analysin, ac perspicere ex illa, quamquam lineæ pro indeterminatis sint accipiendæ. Miror autem, cur casu potius quam industria me huc pervenisse scribat; cum initio sui Schediasmatis de sua solutione sic loquatur, ut innuere velle videatur, se filo certæ methodi ad illam perductum fuisse; nisi forte dicere velit, semet arte posse consequi, quod a me non nisi casu invenitur. Qua ipse arte fuerit usus, nolo curiosius inquirere; mihi certe nihil hic casuale, nihil inexpectati accidit; sed hoc ipsum, quod inveni, quærere intendi, certoque consilio, non temere factum est, quod has potius lineas indeterminatas quam alias adhibuerim. Non nego, fortuito mihi natam fuisse occasionem cogitandi primum de Problemate: at si hoc inventum casuale faciat, nihil non casui debetur, atque, exempli gratia, observatio identitatis Curvæ æquilibrationis cum Cycloide a Fratre facta Mensæ Februario 1695\*, non industriæ alicui, sed casui accepta ferenda est; eo quod, ex fortuito aspectu figurarum D. Marchionis, suspicio cycloidis ipsi oboriri potuit, qualis mihi nata fuit, priusquam Fraternali solutionem legissem. Pergit deinde Frater, ac promittit nobis modum mihi, ut opinabatur, ignotum construendi æquationes differentiales per rectificationes curvarum algebraicarum, quem in eo consistere ait, ut quadratum quantitatis differentialis dividatur in duo alia quadrata, quorum latera, si fieri possit, integrabilia sint, [scilicet hoc omnes norunt, etiamsi non dixisset;] at qui hoc semper & ubique fieri possit, non ostendit; quod tamen vel maxime factum oportuisset, ne lectores meris solutionibus pascerentur, atque etiam existimare possent,

\* Vide N. LXIII. Notam, pag. 626. 627.

possent, casu potius quam industria rem hic nobis successisse. Sic N. LXVI. ut quoque optandum esset, ut vires methodi suæ, si quam habet, separandi indeterminatas cum suis differentialibus a se invicem ac constituendi per rectificationes, expertus fuisset in resolvenda Isochrone supracentrali, nec non æquatione  $xxdx + ydy = aady$ , quam ipse proposuit Mense Novembri, pag. 436. Nam modus generalis illa construendi, quem ibidem affert [quique ab illo quem D. LEIBNITIVS jam Mense Augusto, pag. 373 \* exposuerat, nisi in superfluis non differt] nullibi quam in speculatione locum habet, cum constructiones non versentur circa quantitatum elementa; & quam primum in praxin transfertur, cessat esse constructio geometrica, & fit mechanismus. Sed nec series, alias satis ingeniosa, quam nobis dedit, pag. 438 (1), hic in usum verti potest: quod tenendum, ne quis existimet hæc adeo universalis esse, ut nihil amplius desiderari possit. Quod si autem constructionibus speculativis, saltem earum æquationum, quæ litteras indeterminatas jam separatas habent, acquiescere velimus, plures aliæ elegantes Theoriæ excogitari possunt. Talis est constructio, quæ fieret per Elastra: posita enim generaliter natura curvæ construendæ  $ady = tdx$ , ubi  $t$  datur per  $x$ ; dico, si qua arte in materiam ea induci possit tensionis lex, ut, dum vires tendentes sunt ut  $x$ , tensiones sint ut  $a^4 dt : (aa + tt) \sqrt{(aa + tt)} dx$ , fore, ut lamina inde confecta & inflexa curvaturam optatam sponte sit acquisitura (<sup>m</sup>). Ita determinare licet, qualiter filum aliquod gravari conveniat, ut ab extremitatibus suspensum desideratam

P p p p 2

curvam

\* Supra N°. LXIV. pag. 635.

(1) Ista series hæc est  $\int ndz = nz - \frac{z^2 dn}{1.2.dz} + \frac{z^3 ddn}{1.2.3.dz^2} - \frac{z^4 d^2 n}{1.2.3.4.dz^3} + \dots$  De qua serie utilissima non satis æque sentire videtur Noster.

(=) Ostensum est [N°. LVIII. Not. c, pag. 581], si sint  $\tau$  tensiones, quas inducunt laminæ elasticæ vires

tendentes  $x$ , curvam elasticam designari per æquationem  $dy = Sdx : \sqrt{(a^4 - SS)}$ , ubi  $S = \int \tau dx$ . Comparetur hæc æquatio cum proposita  $dy = tdx : a$ , & erit  $t : a = S : \sqrt{(a^4 - SS)}$ , adeoque  $S [= \int \tau dx] = aat : \sqrt{(aa + tt)}$ , & differentiando  $dS = \tau dx = a^4 dt : (aa + tt) \sqrt{(aa + tt)}$ , adeoque  $\tau = a^4 dt : (aa + tt) \sqrt{(aa + tt)} dx$ .

N. LXVI. curvam repræsentet. Verbo, huc referri possunt omnes illi constituendi modi, qui certam aliquam conditionem prærequirunt in materia, qua posita, natura ipsa spontaneo motu quæsitum exhibeat. \*

Hæc vero omnia, ne sequius accipiantur, unice in veritatis præsidium hic allata moneo, & ut illi, qui historica inventorum narratione delectantur, sciant quid quantumque singulis tribuendum sit; minime vero ut aliorum reperta vel sugillem & elevem, aut mea contra nimium quantum extollam. Præstat enim hic sentire cum COLUMBO, qui amicis detectionem novi Orbis sibi invidentibus respondisse fertur, non jactando & exaggerando inventi magnitudinem, sed quæstionem de re aliqua frivola ipsis proponendo; qua modeste innuere voluerit, ipsos eidem inveniando, si advertissent, facile pares esse potuisse, attamen hoc ipsis ante se in mentem non venisse. Imo vero tantum abest, ut existimem nos multum gloriari posse de inventorum difficultate vel subtilitate aliqua, ut persuasus potius sim, [ puto, Frater & de suis fatebitur ] nos nihil hic præstitisse quod non cuivis mediocri ingenio nostris principiis imbuto pariter in mentem venire potuisset. Quemadmodum enim in Natura nuspiam, ita nec in Scientiis saltus datur, sed omnis nostra cognitio, more quantitatum, crescit per elementa, atque ita pedetentim augetur, ut ab uno ejus gradu ad gradum proxime sequentem non nisi saltus, ut sic dicam, requiratur infinite parvus; ut nemo tam sit hebes, qui si modo ordine incedere velit, ac præcedentia intellexerit, non proprio Marte pergere & ad sequentia transire possit. Quin etiam subtilissima sæpe quæ videntur inventa, principia habent tam obvia tamque trivialia, ut non inepte comparari posse videantur cum artificiolis illis Præstigiatorum [ *Tours de passe-passe*, ] quæ ignari tantopere mirantur; qui vero norunt, contemnunt ac rident. Ratio vero, cur non omnia inveniamus omnes, hæc est, quod tanta rerum multitudo sit, ut iis omnibus animum advertendi nulli sufficiens otium vel occasio

\* Vide Num. LXX.

occasio detur; aut etiamsi duo eidem quærendæ rei mentem ap- N. LXVI.  
plicent, fieri plerunque solet, ut diversas vias incant, naturæ rei  
non æque accommodas, quas tamen quo ducant initio prævide-  
re non possunt; similes duobus, qui pari quidem sagacitate Ter-  
ras incognitas lustrant, amboque novis spoliis onusti domum re-  
deunt; sed neuter, quæ alterius tantum Terra tulit, asportare  
potest.

VII. *Problema*: Æquationem  $ady = y^p dx + by^n q dx$  [ubi  
 $a$  &  $b$  quantitates datas & constantes;  $n$  potestatem quamvis li-  
teræ  $y$ ;  $p$  &  $q$  quantitates utcunque datas per  $x$  denotant,] con-  
struere, saltem per quadraturas; hoc est, separare in illa lit-  
teras indeterminatas  $x$  &  $y$  cum suis differentialibus a se invi-  
cem †.

† Vide Num. LXXII.

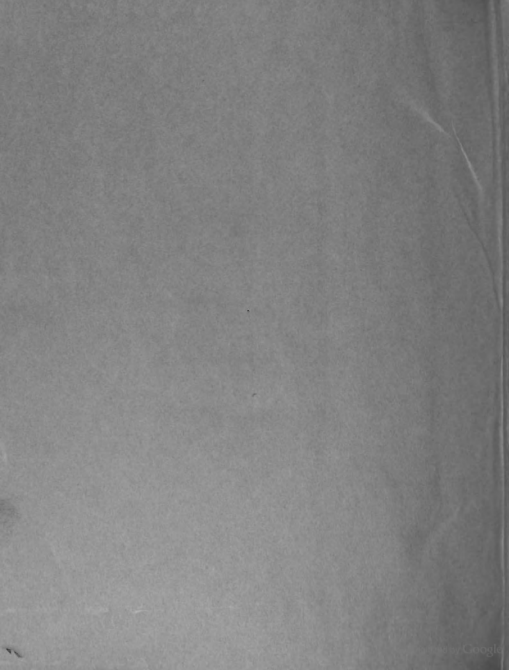






1





BOUND

JAN 8 1936

UNIV. OF MICH.  
LIBRARY

UNIVERSITY OF MICHIGAN



3 9015 06924 5150

